

ANIZOTROPOWA PLASTYCZNOŚĆ POROWATYCH METALI^{*)}

JANUSZ MIELNICZUK I JÓZEF KUBIK (POZNAŃ)

Rozważania przedstawione w pracy dotyczą opisu deformacji porowatego ośrodka w ramach teorii plastycznego płynięcia przy uwzględnieniu anizotropowej struktury porów. Wzięto pod uwagę plastyczną ściśliwość ośrodka oraz efekt asymetrii naprężeń uplastycznienia przy rozciąganiu i ściskaniu. Opierając się na wcześniejszych wynikach eksperymentalnych równania fizyczne przyjęto w postaci stowarzyszonego z warunkiem plastyczności prawa płynięcia. Sformułowano zbiorczy układ równań teorii. Szczegółowo rozważono płaskie plastyczne płynięcie izotropowych metali porowatych ustalając zakres hiperboliczności równań.

1. WSTĘP

Części maszyn wykonywane techniką spiekania sproszkowanych metali znajdują coraz szersze zastosowanie w technice dzięki prostej, bezodpadowej technologii wytwarzania. Łatwe jest również sterowanie parametrami procesu w szerokim zakresie mającymi wpływ na fizyczne i chemiczne własności spieków.

Podstawową cechą charakteryzującą materiał spiekany jest porowatość, która charakteryzuje tę część przestrzeni próbki spieku o jednostkowej objętości, która nie jest wypełniona przez ziarna spiekane proszku metalu. Większość porów jest drożna (połączona ze sobą) i tworzy złożony trójwymiarowy układ kapilar. Efektywna porowatość objętościowa spieków może zmieniać się w granicach od prawie zera do 50% (i więcej) [1] i silnie wpływa na konstrukcyjne własności mechaniczne takiego materiału, między innymi na własności sprężyste i plastyczne.

Problemy wytrzymałościowe materiałów porowatych są zagadnieniami złożonymi z punktu widzenia mechaniki ciała stałego. W materiałach takich mogą mieć miejsca zjawiska, których opis jest możliwy jedynie w ramach mikromechaniki z koniecznością uwzględnienia kształtów i charakteru połączeń poszczególnych ziaren (lub porów) szkieletu. Jednakże w większości zagadnień związanych z deformacjami sprężystymi lub plastycznymi zadawa-

^{*)} Praca wykonana w ramach problemu MR-I-23 Temat 2 koordynowanego przez IPPT PAN.

lające wyniki daje użycie opisu kontynualnego w makroskali, uwzględniając przy tym wpływ struktury porów na przebieg badanych zjawisk.

Przedmiotem niniejszej pracy jest opis własności plastycznych ciągliwych spieków metali z uwzględnieniem makroskopowej struktury porów.

Przy charakterystyce plastycznej nieporowatych metali najczęściej stosowanymi kryteriami uplastycznienia są warunki Hubera–Misesa (H-M) oraz Treski, które nie zależą od pierwszego niezmiennika stanu naprężenia. Liczne obserwacje doświadczalne wykazały jednak, że materiały porowate uplastyczniają się również pod wpływem ciśnienia hydrostatycznego, a więc warunki plastyczności dla takich materiałów muszą uwzględnić pierwszy niezmiennik naprężenia, podczas gdy uplastycznienie materiału szkieletu (ziaren) może być nadal opisane kryteriami H-M lub Treski. Ponadto powierzchnia płynięcia dla ciągliwych materiałów porowatych musi być powierzchnią zamkniętą w odróżnieniu od powierzchni granicznych dla materiałów sypkich czy gruntów, dla których to materiałów powierzchnia jest otwarta wzdłuż osi ściskania i dopuszczalne są małe lub zerowe naprężenia uplastyczniające przy rozciąganiu.

Większość prac poświęconych badaniu własności plastycznych spieków metali dotyczy materiałów izotropowych [2–5], których struktura porów charakteryzowana jest parametrem skalarnym — porowatością objętościową f_v . Zakłada się ponadto, że granica plastyczności przy rozciąganiu takiego ośrodka jest liczbowo równa granicy plastyczności przy ściskaniu. Przyjmuje się także, że materiał szkieletu jest sztywno idealnie plastyczny scharakteryzowany warunkiem plastyczności H-M. W takim przypadku ogólna postać warunku plastyczności jest następująca ([2 i 3]):

$$\text{tr } S^2 + \psi_1(f_v) \text{tr}^2 \sigma = \psi_2(f_v) k^2,$$

gdzie σ jest tensorem naprężenia, S oznacza dewiator naprężenia natomiast k oznacza granicę plastyczności materiału szkieletu przy czystym ścinaniu. Parametry materiałowe ψ_1 i ψ_2 zależą od porowatości f_v w taki sposób, że gdy $f_v \rightarrow 0$, to $\psi_1 \rightarrow 0$ i $\psi_2 \rightarrow 1$ i wówczas (1.1) redukuje się do warunku H-M.

Należy podkreślić, że warunek (1.1) nie uwzględnia faktu, że naprężenia uplastyczniające materiał porowaty przy ściskaniu i rozciąganiu różnią się liczbowo, co potwierdzają obserwacje doświadczalne [6]. Ponadto nie uwzględnia on wpływu często występującej anizotropowej struktury porów na kierunkowe własności mechaniczne materiału, które są ściśle ze sobą związane.

Rozważania przedstawione w tej pracy koncentrują się na ustaleniu opisu deformacji ośrodka porowatego w ramach teorii plastycznego płynięcia przy uwzględnieniu anizotropowej struktury porów oraz efektu asymetrii naprężeń uplastycznienia przy rozciąganiu i ściskaniu.

2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

Jak już wspomniano we wstępie istniejące związki anizotropowej plastyczności dla materiałów nieporowatych przedstawione przez MISESA [7], HILLA [8] oraz OLSZAKA i URBANOWSKIEGO [9] nie mogą być bezpośrednio zastosowane do opisu anizotropowych ciągliwych ośrodków porowatych. Nie uwzględniają one faktów obserwowanych doświadczalnie dla takich materiałów jak trwała zmiana ich objętości czy obrót i translacja powierzchni plastyczności, które są skutkiem istnienia porowatości. Próby sformułowania warunku plastyczności i prawa płynięcia dla plastycznych ośrodków porowatych bez wzmocnienia podejmowali autorzy w pracach [10 i 11] charakteryzując makrostrukturę porów tensorem strukturalnej przepuszczalności \mathbf{P} [12]. Przyjmuje się, że tak opisana struktura porów i jej grupa asymetrii generuje ten sam rodzaj anizotropii globalnego materiału porowatego. Pozwala to na założenie, że trzy wzajemnie ortogonalne osie główne tensora \mathbf{P} są jednocześnie głównymi osiami asymetrii materiału ustalając ortotropową anizotropię.

Wykorzystując teorię reprezentacji funkcji tensorowych do formułowania związków konstytutywnych materiałów anizotropowych (podobnie jak w pracach [13, 14, 15, 16]) ogólną postać warunku plastyczności w naszym przypadku możemy napisać następująco:

$$(2.1) \quad F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{P}) = 0.$$

Takie ujęcie umożliwia jednoczesne włączenie asymetrii materiału do opisu procesu uplastycznienia oraz uwzględnienie w jawnej postaci wpływu struktury porów na ten proces.

Równania fizyczne można przyjąć w postaci prawa płynięcia stowarzyszonego z warunkiem plastyczności

$$(2.2) \quad d_{ij} = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \Lambda \geq 0,$$

gdzie d_{ij} jest tensorem prędkości odkształceń plastycznych, a Λ jest dodatnim mnożnikiem skalarnym. Przyjęcie funkcji F w roli potencjału uzasadniają wyniki doświadczeń dla stosunkowo małych porowatości f_v (8 do 10%) spieków metali [6], gdzie przy badaniu ortogonalności wektorów przyrostów odkształceń do powierzchni plastyczności wykorzystano metodę zaproponowaną w pracy [17].

3. WARUNEK PLASTYCZNOŚCI

3.1. Anizotropowa struktura porów

Przedyskutujemy możliwie prostą wielomianową postać warunku plastyczności. Po wykorzystaniu twierdzeń teorii niezmienników dla funkcji skalarnej o argumentach tensorowych warunek (2.1) można przyjąć w postaci następującej ([11]):

$$(3.1) \quad \{\alpha + \phi_1 \operatorname{tr} \mathbf{P}\} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} + \{\beta + \phi_2 \operatorname{tr} \mathbf{P}\} \operatorname{tr}^2 \boldsymbol{\sigma} + \phi_3 \operatorname{tr} \mathbf{S}^2 + \\ + \phi_6 \operatorname{tr} \mathbf{P} \mathbf{S}^2 + \phi_{12} \operatorname{tr} \mathbf{P}^2 \mathbf{S}^2 + \phi_4 \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr} \mathbf{P} \mathbf{S} + \\ + \phi_5 \operatorname{tr} \mathbf{P} \mathbf{S} + \phi_{11} \operatorname{tr} \mathbf{P}^2 \mathbf{S} + \frac{2}{3} \phi_{12} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr} \mathbf{P}^2 \mathbf{S} = k^2 - \phi_4 \operatorname{tr} \mathbf{P},$$

gdzie

$$\phi_1 = \frac{1}{3} (\phi_5 + 3\phi_7 + \phi_{11} \operatorname{tr} \mathbf{P}),$$

$$\phi_2 = \frac{1}{9} (\phi_6 + 9\phi_8 + 3\phi_9 + 3\phi_{10} + \phi_{12} \operatorname{tr} \mathbf{P}),$$

$$\phi_3 = 1 + \phi_9 \operatorname{tr} \mathbf{P},$$

$$\phi_4 = \frac{2}{3} \phi_6 + \phi_{10},$$

przy czym \mathbf{S} jest dewiatorem naprężenia, α , β , k są stałymi materiału szkieletu, natomiast 9 nieznanymi stałymi materiałowymi ośrodka porowatego ϕ_4 do ϕ_{12} wymaga wyznaczenia na podstawie badań doświadczalnych. Sposób ich wyznaczania pokazano w pracy [11].

Można pokazać, że tak ustalony warunek (3.1) uwzględnia żądane efekty ściśliwości plastycznej, obrotu i przesunięcia powierzchni plastyczności i redukuje się do klasycznego warunku plastyczności dla izotropowego nieporowatego materiału.

Przyjmując $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, co odpowiada ośrodkowi bez porów, warunek (3.1) redukuje się do warunku HU-PAE [18] dla plastycznie ściśliwych metali

$$(3.2) \quad \operatorname{tr} \mathbf{S}^2 + \alpha \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} + \beta \operatorname{tr}^2 \boldsymbol{\sigma} = k^2,$$

gdzie parametry α i β charakteryzują wpływ hydrostatycznego ciśnienia na uplastycznienie. Zakładając następnie $\alpha = \beta = 0$ warunek (3.2) przyjmuje postać klasycznego warunku H-M.

Rozważając przypadek hydrostatycznego stanu naprężenia zauważamy, że uplastycznienie materiału nastąpi gdy

$$(3.3) \quad \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} = \frac{-(\alpha + \phi_1 \operatorname{tr} \mathbf{P}) \pm \sqrt{\Delta}}{2(\beta + \phi_2 \operatorname{tr} \mathbf{P})},$$

gdzie

$$\Delta = (\alpha + \phi_1 \operatorname{tr} \mathbf{P})^2 + 4(\beta + \phi_2 \operatorname{tr} \mathbf{P})(k^2 - \phi_4 \operatorname{tr} \mathbf{P}).$$

Łatwo stwierdzić, że jeśli spełniony jest warunek

$$\frac{(\alpha + \phi_1 \operatorname{tr} \mathbf{P})^2}{4(k^2 - \phi_4 \operatorname{tr} \mathbf{P})} + (\beta + \phi_2 \operatorname{tr} \mathbf{P}) \geq 0,$$

to naprężenia uplastyczniające przy rozciąganiu i ściskaniu mają wartości skończone i różnią się od siebie o wartość

$$\left| \frac{\alpha + \phi_1 \operatorname{tr} \mathbf{P}}{\beta + \phi_2 \operatorname{tr} \mathbf{P}} \right|.$$

Jeżeli materiał szkieletu jest plastycznie nieściśliwy, to różnica ta wynosi $|\phi_1/\phi_2|$.

3.2. Izotropowa struktura porów

Jeżeli geometryczna struktura porów jest izotropowa, to tensor strukturalnej przepuszczalności ma postać $\mathbf{P} = \lambda \mathbf{1}$, gdzie λ określa efektywną porowatość powierzchniową. W tym przypadku, jeśli ograniczymy się do liniowej zależności względem λ , to warunek (3.1) przyjmuje formę

$$(3.4) \quad \operatorname{tr} \mathbf{S}^2 + \frac{\beta + (\gamma_0 + \gamma_1) \lambda}{1 + \gamma_1 \lambda} \operatorname{tr}^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{\alpha + \gamma_2 \lambda}{1 + \gamma_1 \lambda} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} = \frac{k^2 - \phi_4 \operatorname{tr} \mathbf{P}}{1 + \gamma_1 \lambda},$$

gdzie

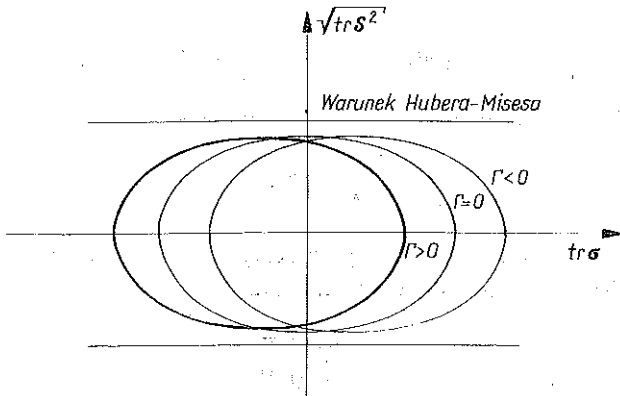
$$\gamma_0 = 3\phi_8 + \phi_{10}, \quad \gamma_1 = \phi_6 + 3\phi_9, \quad \gamma_2 = \phi_5 + 3\phi_7.$$

Ponieważ dla ciągłych ośrodków porowatych powierzchnia plastyczności jest zamknięta, przeto musi być spełniony warunek

$$(3.5) \quad \frac{\beta + (\gamma_0 + \gamma_1) \lambda}{1 + \gamma_1 \lambda} > 0.$$

Wówczas w przestrzeni naprężeń równanie (3.4) przedstawia elipsoidę obrotową. Znak współczynnika $\Gamma = (\alpha + \gamma_2 \lambda)/(1 + \gamma_1 \lambda)$ decyduje o przesunięciu powierzchni plastyczności wzdłuż osi średniego ciśnienia, co przykładowo w płaszczyźnie $\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}$, $\operatorname{tr} \mathbf{S}^2$ przedstawiono na rys. 1. Należy nadmienić, że na podstawie obserwacji doświadczalnych dla spieków metali naprężenie uplastyczniające przy ściskaniu jest większe od naprężenia przy rozciąganiu; a zatem mamy

$$(3.6) \quad \frac{\alpha + \gamma_2 \lambda}{1 + \gamma_1 \lambda} > 0.$$



Rys. 1. Położenie powierzchni plastyczności w płaszczyźnie $\text{tr } \sigma$, $\text{tr } S^2$ w zależności od współczynnika Γ

3.3. Wpływ anizotropowej struktury porów na uplastycznienie w przypadku płaskiego stanu naprężenia

Ustalmy układ współrzędnych x_i w taki sposób, że osie x_1 , x_2 są głównymi osiami tensora naprężenia σ . Wówczas reprezentacja tensora σ jest następująca

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

natomiast w ogólnym przypadku współrzędne tensora \mathbf{P} są niezerowe. Warunek plastyczności (3.1) redukuje się wtedy do postaci

$$(3.7) \quad \psi_1 \sigma_1 + \psi_2 \sigma_2 + \psi_3 \sigma_1^2 + \psi_4 \sigma_2^2 + \psi_5 \sigma_1 \sigma_2 - (k^2 - \varphi_4 \text{tr } \mathbf{P}) = 0,$$

gdzie

$$\psi_1 = \alpha + \varphi_5 P_{11} + \varphi_7 \text{tr } \mathbf{P} + \varphi_{11} (P_{11}^2 + P_{12}^2 + P_{13}^2),$$

$$\psi_2 = \alpha + \varphi_5 P_{22} + \varphi_7 \text{tr } \mathbf{P} + \varphi_{11} (P_{21}^2 + P_{22}^2 + P_{23}^2),$$

$$\psi_3 = \beta + \frac{2}{3} + (\varphi_6 + \varphi_{10}) P_{11} + (\varphi_8 + \varphi_9) \text{tr } \mathbf{P} + \varphi_{12} (P_{11}^2 + P_{12}^2 + P_{13}^2),$$

$$\psi_4 = \beta + \frac{2}{3} + (\varphi_6 + \varphi_{10}) P_{22} + (\varphi_8 + \varphi_9) \text{tr } \mathbf{P} + \varphi_{12} (P_{21}^2 + P_{22}^2 + P_{23}^2),$$

$$\psi_5 = 2\beta - \frac{2}{3} + 2\varphi_8 \text{tr } \mathbf{P} + \varphi_{10} (P_{11} + P_{22}).$$

Równanie (3.7) jest równaniem elipsy, jeżeli spełniony jest warunek

$$4\psi_3 \psi_4 - \psi_5^2 > 0.$$

Wprowadzając nowe osie $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ określone równaniami

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \bar{\sigma}_1 \cos \theta - \bar{\sigma}_2 \sin \theta, \\ \sigma_2 &= \bar{\sigma}_1 \sin \theta + \bar{\sigma}_2 \cos \theta\end{aligned}$$

równanie elipsy (3.7) możemy napisać w postaci kanonicznej:

$$(3.8) \quad \frac{[\bar{\sigma}_1 - h_1(\psi_1, \psi_2)]^2}{A_1^2} + \frac{[\bar{\sigma}_2 - h_2(\psi_1, \psi_2)]^2}{A_2^2} = 1,$$

gdzie h_1 i h_2 oznaczają przesunięcia elipsy (3.8) w płaszczyźnie naprężeń σ_1, σ_2 , przy czym

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{\psi_3 - \psi_4}{\psi_5}.$$

Podstawiając $\theta = \frac{\pi}{4} + \delta$ i wykorzystując zależność $\operatorname{ctg} 2\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right) = -\operatorname{tg} 2\delta$ otrzymamy następujący wzór

$$(3.9) \quad \operatorname{tg} 2\delta = \frac{\psi_4 - \psi_3}{\psi_5} = \frac{(\varphi_6 + \varphi_{10})(P_{22} - P_{11}) + \varphi_{12}(P_{22}^2 - P_{11}^2 + P_{23}^2 - P_{13}^2)}{2\beta - \frac{2}{3} + 2\varphi_8 \operatorname{tr} \mathbf{P} + \varphi_{10}(P_{11} + P_{22})},$$

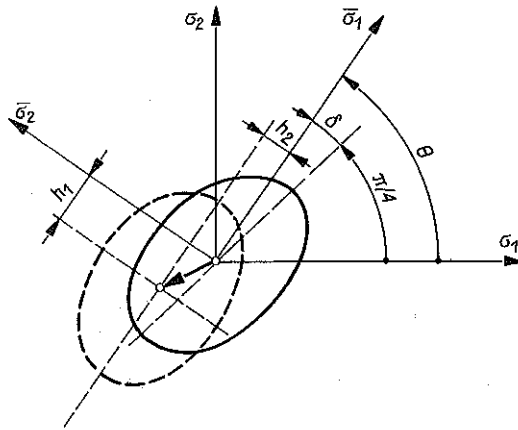
gdzie δ oznacza kąt obrotu elipsy w płaszczyźnie naprężeń σ_1, σ_2 względem osi średniego ciśnienia.

Na podstawie warunku (3.7) stwierdzamy, że przesunięcia powierzchni plastyczności związane są z istnieniem niezerowych parametrów $\alpha, \varphi_5, \varphi_7, \varphi_{11}$ występujących w wyrazie liniowo zależnym od $\operatorname{tr} \sigma$ w warunku plastyczności (3.1). Ze wzoru (3.9) wynika, że obrót powierzchni plastyczności wystąpi wówczas, gdy co najmniej jeden z parametrów $\varphi_6, \varphi_{10}, \varphi_{12}$ jest różny od zera. W warunku (3.1) odpowiadają temu wyrazy

$$\varphi_6 \operatorname{tr} \mathbf{P} \mathbf{S}^2, \left(\frac{2}{43} \varphi_6 + \varphi_{10} \right) \operatorname{tr} \sigma \operatorname{tr} \mathbf{P} \mathbf{S}, \varphi_{12} \operatorname{tr} \mathbf{P}^2 \mathbf{S}^2, \frac{2}{3} \varphi_{12} \operatorname{tr} \sigma \operatorname{tr} \mathbf{P}^2 \mathbf{S}.$$

Należy zauważyć, że obrót powierzchni plastyczności powodowany jest wyłącznie anizotropową strukturą porów opisaną tensorem \mathbf{P} i w przypadku materiału porowatego o strukturze izotropowej obrót taki nie wystąpi.

Dyskutowane powyżej efekty przesunięcia i obrotu powierzchni plastyczności w płaskim stanie naprężenia przedstawiono na rys. 2. Bardziej szczegółowa analiza jest utrudniona nieznanymi, jak dotychczas, szeregi parametrów materiałowych.



Rys. 2. Obrót i przesunięcie powierzchni plastyczności

4. PRAWO PŁYNIĘCIA PLASTYCZNEGO. PEŁNY UKŁAD RÓWNAŃ

W ogólnym przypadku prawo płynięcia plastycznego dla ośrodków porowatych może być prawem niestowarzyszonym. Jednakże, jak wykazały badania doświadczalne [6], dla spieków metali o stosunkowo małych porowatościach i niewielkich ich zmianach, wektory przyrostów odkształceń plastycznych są praktycznie ortogonalne do powierzchni plastyczności. Pozwala to na przyjęcie warunku plastyczności jako funkcji potencjału. Zatem odpowiednio rozwinięte prawo płynięcia (2.2) ma w przypadku anizotropowej struktury porów postać

$$(4.1) \quad \mathbf{d} = A \left\{ \left[\alpha + \varphi_7 \operatorname{tr} \mathbf{P} + \left[2 \left(\beta - \frac{1}{3} \right) + 2\varphi_8 \operatorname{tr} \mathbf{P} \right] \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} + \varphi_{10} \operatorname{tr} \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} \right] \cdot \mathbf{1} + \right. \\ \left. + 2(1 + \varphi_9 \operatorname{tr} \mathbf{P}) \boldsymbol{\sigma} + (\varphi_5 + \varphi_{10} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{P} + \right. \\ \left. + \varphi_6 (\mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{P}) + \varphi_{11} \mathbf{P}^2 + \varphi_{12} (\mathbf{P}^2 \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{P}^2) \right\},$$

gdzie $\mathbf{1}$, $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{P} , $\mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{P}$, \mathbf{P}^2 , $\mathbf{P}^2 \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{P}^2$ stanowią zbiór tzw. generatorów tensorowych.

Z powyższego prawa wynika, że z wyjątkiem przypadków szczególnych kierunki główne $\boldsymbol{\sigma}$ i \mathbf{d} nie są współosiowe na skutek występowania generatorów zawierających tensor \mathbf{P} . Ten fakt powoduje, że za zmianę objętości ośrodka porowatego odpowiada nie tylko część kulista stanu naprężenia, ale również jego część dewiatorowa.

Dla izotropowej struktury porów, czyli $\mathbf{P} = \lambda \mathbf{1}$, równanie (4.1) redukuje się do postaci

$$(4.2) \quad \mathbf{d} = A \left\{ \left[\left[\alpha + 2 \left(\beta - \frac{1}{3} \right) \text{tr } \boldsymbol{\sigma} + [\varphi_5 + 3\varphi_7 + (6\varphi_8 + 2\varphi_{10}) \text{tr } \boldsymbol{\sigma}] \lambda + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \varphi_{11} \lambda^2 \right] \right] \cdot \mathbf{1} + 2 [1 + (\varphi_6 + 3\varphi_9) \lambda + \varphi_{12} \lambda^2] \boldsymbol{\sigma} \right\}.$$

W tym przypadku kierunki główne $\boldsymbol{\sigma}$ i \mathbf{d} są współosiowe i zmiana objętości ośrodka może być wywołana wyłącznie kulistą częścią tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$.

Przyjęcie $\alpha, \beta = 0$, $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ redukuje równanie (4.2) do znanego prawa płynięcia Levy'ego-Misesa

$$\mathbf{d} = \lambda \mathbf{S}.$$

Pełny układ równań dla quasi-statycznych zagadnień teorii plastyczności ośrodków porowatych tworzą: 1) równania równowagi

$$(4.3) \quad \sigma_{ij,j} = F_i,$$

gdzie F_i są siłami masowymi; 2) warunek plastyczności (3.1) napisany w postaci

$$(4.4) \quad (\alpha + \phi_1 P_{ii}) \sigma_{ii} + (\beta + \phi_2 P_{ii}) \sigma_{ik} \sigma_{ki} + \phi_3 S_{ik} S_{ki} + \phi_6 P_{ik} S_{kl} S_{ii} + \\ + \varphi_{12} P_{ik} P_{kl} S_{lm} S_{mi} + \phi_4 \sigma_{ii} P_{ik} S_{ki} + \varphi_5 P_{ik} S_{ki} + \\ + \varphi_{11} P_{ik} P_{kl} S_{ii} + \frac{2}{3} \varphi_{12} \sigma_{ii} P_{ik} P_{kl} S_{ii} = k^2 - \varphi_4 P_{ii};$$

3) związek konstytutywny między tensorem naprężenia i tensorem prędkości odkształcenia plastycznej w formie

$$(4.5) \quad d_{ij} = A \left\{ \left[\left[\alpha + \varphi_7 P_{ii} + \left[2 \left(\beta - \frac{1}{3} \right) + 2\varphi_8 P_{ii} \right] \sigma_{ii} + \varphi_{10} P_{ik} \sigma_{ki} \right] \right] \delta_{ij} + \right. \\ \left. + 2 (1 + \varphi_9 P_{ii}) \sigma_{ij} + (\varphi_5 + \varphi_{10} \sigma_{ii}) P_{ij} + \varphi_6 (P_{ik} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} P_{kj}) + \right. \\ \left. + \varphi_{11} P_{ik} P_{kj} + \varphi_{12} (P_{ik} P_{kl} \sigma_{lj} + \sigma_{ik} P_{kl} P_{lj}) \right\}$$

oraz 4) związek kinematyczny wiążący tensor prędkości deformacji z polem prędkości

$$(4.6) \quad d_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}).$$

Dla danej struktury P_{ij} równania (4.3)–(4.5) opisują przestrzenne zagadnienie plastycznego płynięcia i tworzą układ 16 równań algebraicznych i różniczkowych. W tym ogólnym przypadku pozostaje do wyznaczenia 16 niewia-

domych, to jest po sześć składowych stanów naprężenia i prędkości odkształcenia, trzy składowe pola prędkości i nieznyany mnożnik skalarny Λ .

5. PŁASKIE PLASTYCZNE PŁYNIĘCIE IZOTROPOWEGO OŚRODKA POROWATEGO

Rozważania w tym rozdziale dotyczyć będą ośrodków porowatych o izotropowej strukturze porów. Rozpatrywany przypadek płaskiego stanu odkształcenia jest w klasycznej teorii plastyczności działem najbardziej opracowanym. Przyjęcie modelu idealnie plastycznego pozwala uzyskać efektywne rozwiązania wielu ważnych zagadnień brzegowych dotyczących np. teorii obróbki plastycznej. Wykorzystanie metody użytej w klasycznej plastyczności materiałów nieporowatych może również i w odniesieniu do ośrodków porowatych doprowadzić do efektywnych rozwiązań (np. [19]). Wymaga to sformułowania układu równań opisujących płaskie płynięcie plastyczne metali porowatych i określenie typu tych równań.

Kinematyka płaskiego płynięcia opisana jest następująco:
pole prędkości płynięcia

$$(5.1) \quad v_x = v_x(x, y), \quad v_y = v_y(x, y), \quad v_z = 0;$$

tensor prędkości deformacji

$$(5.2) \quad d_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad d_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad d_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right),$$

$$d_{zz} = d_{zx} = d_{zy} = 0.$$

Dla izotropowego ośrodka porowatego o nieściśliwym materiale szkieletu ($\alpha = \beta = 0$) warunek plastyczności (3.4) przyjmie postać

$$(5.3) \quad \text{tr } \mathbf{S}^2 + f_1 \text{tr}^2 \boldsymbol{\sigma} + f_2 \text{tr } \boldsymbol{\sigma} = f_3,$$

gdzie

$$f_1 = \frac{(\gamma_0 + \gamma_1) \lambda}{1 + \gamma_1 \lambda}, \quad f_2 = \frac{\gamma_2 \lambda}{1 + \gamma_1 \lambda}, \quad f_3 = \frac{k^2 - 3\varphi_4 \lambda}{1 + \gamma_1 \lambda}.$$

Stowarzyszone z tym warunkiem prawo płynięcia jest następujące:

$$(5.4) \quad d_{ij} = \Lambda \left[2\sigma_{ij} + \left(2f_1 - \frac{2}{3} \right) \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \delta_{ij} + f_2 \delta_{ij} \right];$$

po rozpisaniu w układzie osi głównych ma ono następującą szczegółową postać:

$$d_{11} = 2\Lambda \left[\sigma_1 + \left(f_1 - \frac{1}{3} \right) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + f_2 \right],$$

$$(5.5) \quad \begin{aligned} d_{22} &= 2\lambda \left[\sigma_2 + \left(f_1 - \frac{1}{3} \right) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + f_2 \right], \\ d_{33} &= 2\lambda \left[\sigma_3 + \left(f_1 - \frac{1}{3} \right) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + f_2 \right]. \end{aligned}$$

Dla płaskiego stanu odkształcenia mamy $d_{33} = 0$ i wówczas

$$(5.6) \quad \sigma_3 = \frac{\frac{1}{3} - f_1}{f_1 + \frac{2}{3}} (\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{f_2}{f_1 + \frac{2}{3}};$$

natomiast napężenie średnie jest następujące:

$$(5.7) \quad \sigma = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3 \left(f_1 - \frac{2}{3} \right)} (\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{f_2}{3 \left(f_1 + \frac{2}{3} \right)}.$$

Należy zauważyć, że dla ośrodka pełnego ($\lambda = 0$) wzory (5.6) i (5.7) sprowadzają się do znanych wzorów z idealnej plastyczności, to znaczy

$$\sigma_3 = \sigma = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

Wykorzystując wzory (5.6) i (5.7) można warunek plastyczności (5.3) przekształcić do postaci

$$(5.8) \quad K (\sigma_1 + \sigma_2)^2 - 2 \left(f_1 + \frac{2}{3} \right)^2 \sigma_1 \sigma_2 + L (\sigma_1 + \sigma_2) = M,$$

przy czym

$$K = \left(f_1 - \frac{1}{3} \right) \left(f_1 + \frac{2}{3} \right)^2 + \left(f_1 + \frac{2}{3} \right)^2 + \left(f_1 - \frac{1}{3} \right)^2 f_1 - \\ - 2 \left(f_1 - \frac{1}{3} \right) \left(f_1 + \frac{2}{3} \right),$$

$$L = \left(f_1 - \frac{1}{3} \right) f_1 f_2 + \left(f_1 + \frac{2}{3} \right) \left(\frac{7}{3} - 2f_1 \right) f_2,$$

$$M = f_3 - 2 (f_1 + 1) f_2^2.$$

Geometrycznym odwzorowaniem powyższego warunku na płaszczyźnie naprężeń jest elipsa przesunięta wzdłuż osi średniego napężenia. Granicznym przypadkiem (dla $\lambda = 0$) jest warunek Hubera-Misesa (dwie proste równoległe).

Warunek plastyczności (5.8) łącznie z równaniami konstytutywnymi (5.5)

i równaniami równowagi tworzy układ płaskiego płynięcia plastycznego ośrodka porowatego. Należy nadmienić, że w odróżnieniu od równań idealnej plastyczności występuje tutaj sprzężenie tensora naprężenia z tensorem prędkości deformacji przez funkcję porowatości i tylko poczynienie pewnych założeń (np. stała porowatość) pozwoli zastosować wygodną metodę charakterystyk do rozwiązania układu równań w obszarze ich hiperboliczności.

Przy założeniu, że w trakcie deformacji ośrodka porowatość jego jest stała, można ze zbiorczego układu równań wydzielić, podobnie jak dla ośrodka idealnie plastycznego, układ trzech równań, to jest równania równowagi i warunek plastyczności o trzech niewiadomych (w układzie osi x , y) współrzędnych tensora naprężenia. Są to równania statyki w następującej postaci:

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

$$K(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 - 2\left(f_1 + \frac{2}{3}\right)^2 \sigma_{xx} \sigma_{yy} + L(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + 2\sigma_{xy}^2 = M.$$

Metoda rozwiązania tego układu równań zależeć będzie od jego typu, dla określenia którego wykorzystamy znane z klasycznej plastyczności podstawienie Levy'ego. Polega ono na wprowadzeniu w miejsce naprężeń dwóch nowych niewiadomych, mianowicie funkcji p zależnej od sumy naprężeń normalnych oraz kąta θ , jaki tworzy większe z naprężeń głównych z osią x .

Następujące podstawienie

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= p + \frac{1}{\left(f_1 + \frac{2}{3}\right)} \sqrt{p^2 \left(f_1 + \frac{2}{3}\right)^2 - 2p^2 K - pL + \frac{1}{2} M}, \\ \sigma_2 &= p - \frac{1}{\left(f_1 + \frac{2}{3}\right)} \sqrt{p^2 \left(f_1 + \frac{2}{3}\right)^2 - 2p^2 K - pL + \frac{1}{2} M}, \end{aligned}$$

spełnia tożsamościowo warunek plastyczności (5.8) i stanowi zarazem jego postać parametryczną. Dla układu osi x , y powyższe podstawienie można napisać w formie

$$(5.11) \quad \sigma_{xx} = p + \frac{1}{f_1 + \frac{2}{3}} \sqrt{p^2 \left(f_1 + \frac{2}{3}\right)^2 - 2p^2 K - pL + \frac{1}{2} M} \cos 2\theta,$$

$$\sigma_{yy} = p - \frac{1}{f_1 + \frac{2}{3}} \sqrt{p^2 \left(f_1 + \frac{2}{3}\right)^2 - 2p^2 K - pL + \frac{1}{2} M \cos 2\theta},$$

$$\sigma_{xy} = \sqrt{p^2 \left(f_1 + \frac{2}{3}\right)^2 - 2p^2 K - pL + \frac{1}{2} M \sin 2\theta}.$$

Aby równania statyki były hiperbolicznego typu, musi zachodzić warunek (por. [20])

$$(5.12) \quad \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial p} \frac{\partial \sigma_2}{\partial p} \right) = 1,$$

co jest równoważne nierówności

$$(5.13) \quad \left[16K^2 - 8 \left(f_1 + \frac{2}{3}\right)^2 K \right] p^2 + \left[4 \left(f_1 + \frac{2}{3}\right)^2 L + 8KL \right] p + \\ + L^2 - 2 \left(f_1 + \frac{2}{3}\right)^2 M < 0.$$

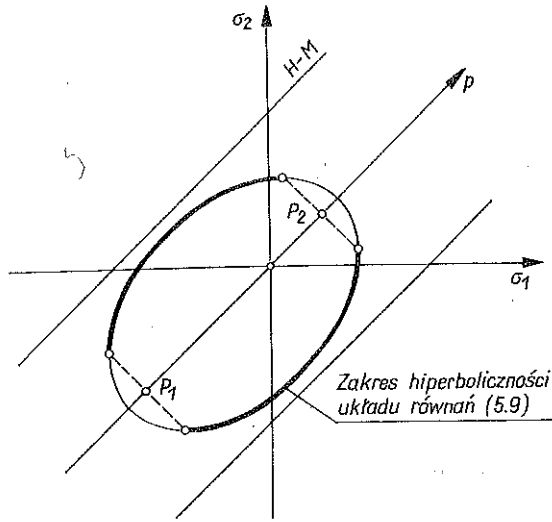
Efektywne rozwiązanie tej nierówności bez znajomości występujących w niej wartości stałych materiałowych napotyka na trudności. Jedynie dla ośrodką o równych granicach plastyczności przy rozciąganiu i ściskaniu, to jest dla $f_2 = 0$, można stosunkowo łatwo wyliczyć rozwiązania nierówności (5.13), które wynoszą

$$(5.4) \quad p_1 > -(1 + 2\gamma_1 \lambda) \sqrt{\frac{k^2 - 3\varphi_4 \lambda}{(3\gamma_1 \lambda + 1) \gamma_1 \lambda}},$$

$$p_2 < (1 + 2\gamma_1 \lambda) \sqrt{\frac{k^2 - 3\varphi_4 \lambda}{(3\gamma_1 \lambda + 1) \gamma_1 \lambda}}.$$

Rozwiązania powyższe określają zarazem obszar hiperboliczności równań statyki, który pokazano na rys. 3. Z analizy wynika, że w obszarze hiperboliczności zawiera się większość stanów obciążeń z wyjątkiem obciążeń bliskich stanom hydrostatycznym.

W obszarze hiperboliczności, jak już wspomniano, można stosować metodę charakterystyk do określenia stanu naprężenia drogą określenia siatki charakterystyk i spełnianych wzdłuż nich zależności. Ponieważ w licznych zagadnieniach inżynierskich plastyczności występujący stan naprężenia odbiega na ogół od stanów hydrostatycznych, zatem metoda powyższa może mieć zastosowanie przy ich rozwiązywaniu.



Rys. 3. Zakres hiperbolicznosci równań (5.9)

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. RUTKOWSKI, *Projektowanie wyrobów spiekanych z proszków i włókien*, PWN, Warszawa 1977.
2. R. J. GREEN, *A plasticity theory for porous solids*, *Int. J. Mech. Sci.*, **14**, 215-226, 1972.
3. S. SHIMA, M. OYANE, *Plasticity theory for porous metals*, *Int. J. Mech. Sci.*, **18**, 285-291, 1976.
4. M. S. GADALA, M. L. MULLINS, M. A. DOKAINISH, *A modified plasticity theory for porous metals*, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **15**, 649-660, 1980.
5. A. L. GURSON, *Porous rigid-plastic materials containing rigid inclusions ...*, *Fracture*, **2**, 357-364, 1977.
6. J. MIELNICZUK, *Plasticity of porous metals*, *Int. Conf. CNRS, Villard de Lans*, 1983.
7. R. MISES, *Mechanik der plastischen Formänderungen von Kristallen*, *ZAMM*, **8**, 161-185, 1928.
8. R. HILL, *Mathematical theory of plasticity*, Oxford University Press, 1950.
9. W. OLSZAK, W. URBANOWSKI, *The plastic potential and the generalized distortion energy in the theory of nonhomogeneous anisotropic elastic-plastic bodies*, *Arch. Mech. Stos.*, **8**, 671-694, 1956.
10. J. KUBIK, J. MIELNICZUK, *Yield condition of oriented porous solid*, *Ingenieur-Archiv*, **53**, 53-60, 1983.
11. J. KUBIK, J. MIELNICZUK, *Plasticity theory for anisotropic porous metals*, *Engng. Fracture Mech.* **4**, 663-671, 1985.
12. J. KUBIK, *Permeability tensor and porosity of material with rectilinear channels*, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, **10-11**, 445-453, 1979.
13. J. P. BOEHLER, *A simple derivation of representation for non-polynomial constitutive equation*, *ZAMM*, **59**, 157-167, 1979.
14. J. P. BOEHLER, A. SAWCZUK, *On yielding of oriented solids*, *Acta Mech.*, **27**, 185-206, 1977.

15. A. J. SPENCER, *Theory of invariants*, w: *Continuum Physics*, C. A. ERINGEN (ed.) Academic Press, New York 1971.
16. A. LITEWKA, *Anizotropowa plastyczność materiałów perforowanych*, Rozprawy Nr 111, Politechnika Poznańska, 1980.
17. J. MIĄSTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, *Doświadczalne badanie powierzchni plastyczności odkształconego mosiądzu*, *Mech. Teoret. Stos.*, 3, 55–66, 1965.
18. L. W. HU, K. D. PAE, *Inclusion of the hydrostatic stress component in formulation of the yield condition*, *J. Franklin Inst.*, 6, 491–502, 1963.
19. J. MIELNICZUK, *Zum ebenen plastischen Fließen der porigen Metalle*, *Ingenieur-Archiv*, 52, 221–228, 1982.
20. J. ZAWIDZKI, *Plane states of plastic media in non-orthogonal curvilinear coordinates*, *Rozpr. Inż.*, 4, 629–652, 1967.

РЕЗЮМЕ

АНИЗОТРОПНАЯ ПЛАСТИЧНОСТЬ ПОРИСТЫХ МЕТАЛЛОВ

Рассуждения, представленные в работе, касаются описания деформации пористой среды в рамках теории пластического течения, при учете анизотропной структуры поров. Приняты во внимание пластическая сжимаемость среды и эффект асимметрии напряжений пластичности при растяжении и сжатии. Опираясь на более ранние экспериментальные результаты, физические уравнения приняты в виде ассоциированного с условием пластичности закона течения. Сформулирована полная система уравнений теории. Подробно рассмотрены плоские пластические течения изотропных пористых металлов, устанавливая область гиперболичности уравнений.

SUMMARY

ANISOTROPIC PLASTICITY OF POROUS METALS

Plastic behaviour of ductile porous metals with anisotropic pore structure is described. Basic equations of the theory are established taking into account such main features of porous materials like plastic compressibility and anisotropy. Plastic potential is assumed to be the same as the yield function. Plane plastic flow of isotropic porous metal is analysed in detail and hyperbolic range of the corresponding equations is evaluated.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 października 1984 r.