

ROZSTRAJANIE OPTYMALNE KONSTRUKCJI DRGAJĄCYCH JAKO ZAGADNIENIE WIELOEKSTREMALNE^{*)}

BODGAN OLSZOWSKI (KRAKÓW)

W pracy omówiono sformułowanie problemu, podstawy algorytmu jego rozwiązania numerycznego oraz wyniki obliczeń testowych dla belki dwuprzęsłowej wykonującej drgania giętne pod wpływem wymuszenia harmonicznego.

1. WSTĘP

Kształtowanie układów konstrukcyjnych dla nadania im takich własności dynamicznych, które są optymalne w pewnym określonym sensie, jest zagadnieniem o stale rosnącym znaczeniu praktycznym. Jednym z wielu możliwych zadań kształtowania optymalnego jest najskuteczniejsze rozstrajanie konstrukcji drgających od działających na nie obciążeń harmonicznyc [3, 5, 6].

Zagadnienie optymalnego rozstrajania konstrukcji można analizować w dwu zasadniczych aspektach: teoretycznym i praktycznym. Jeżeli chodzi o aspekt teoretyczny, to ma on znaczenie istotne dlatego, że na ile autorowi wiadomo, brak jest dotąd takich analiz zagadnienia, które mogłyby stanowić podstawę budowania uniwersalnych algorytmów numerycznych rozstrajania optymalnego. Analizy teoretyczne są interesujące także i z tego powodu, że efekty rozstrajania pojawiają się ubocznie również i wtedy, gdy optymalizacji podlega na przykład rozkład tłumienia w układzie drgającym dobierany na podstawie warunku minimalizacji jego odpowiedzi. Efekty rozstrajania nakładają się wówczas na efekty pochodzące od dysypacji energii zaciemniając obraz zjawiska i uniemożliwiając właściwą ocenę skuteczności działania zastosowanych środków tłumiących [7].

Podstawowa trudność w realizacji sprawnych i uniwersalnych algorytmów rozstrajania optymalnego wynika z faktu, że rozwiązywanie zadań z tej dziedziny wymaga stosowania metod optymalizacji globalnej [2 i 4]. Wymaganie to jest konsekwencją spostrzeżenia, że zależność funkcji celu od zmien-

^{*)} Praca została wykonana w ramach problemu węzłowego PW 05.12 koordynowanego przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN w Warszawie.

nych decyzyjnych w zagadnieniach rozstrajania może przybierać postać bardzo złożoną o charakterze wieloekstremalnym.

Z praktycznego punktu widzenia rozstrajanie optymalne jest zabiegiem stwarzającym pewne możliwości poprawiania dynamicznych własności konstrukcji i to zarówno na etapie ich projektowania, jak też i eksploatacji. Ocena tych możliwości, a tym bardziej praktycznej skuteczności rozstrajania optymalnego, byłaby obecnie nieco przedwczesna i należy do niej podchodzić ostrożnie. Faktem jest jednak, że rozstrajanie nadmiernie drgających konstrukcji przemysłowych niejednokrotnie okazywało się jedynym sposobem zapewnienia możliwości ich dalszej bezawaryjnej eksploatacji. Wobec braku niezbędnych doświadczeń w zakresie wdrażania metod rozstrajania optymalnego do praktyki, w obecnej pracy ograniczymy się wyłącznie do omawiania teoretycznych aspektów zagadnienia.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Wprowadźmy następujące określenie bezwymiarowych częstości własnych rozważanej konstrukcji

$$(2.1) \quad \beta_n = \omega_n / \omega_0, \quad n \in I_1 = \{1, 2, 3, \dots, N \text{ lub } 1, 2, 3, \dots\},$$

w którym ω_n oznacza n -tą kołową częstość własną, a ω_0 pewną kołową częstość porównawczą. Dla układów prętowych wykonujących tylko drgania giętne możemy przyjąć, że

$$(2.2) \quad \omega_0 = (\pi/l)^2 \sqrt{EI/\mu},$$

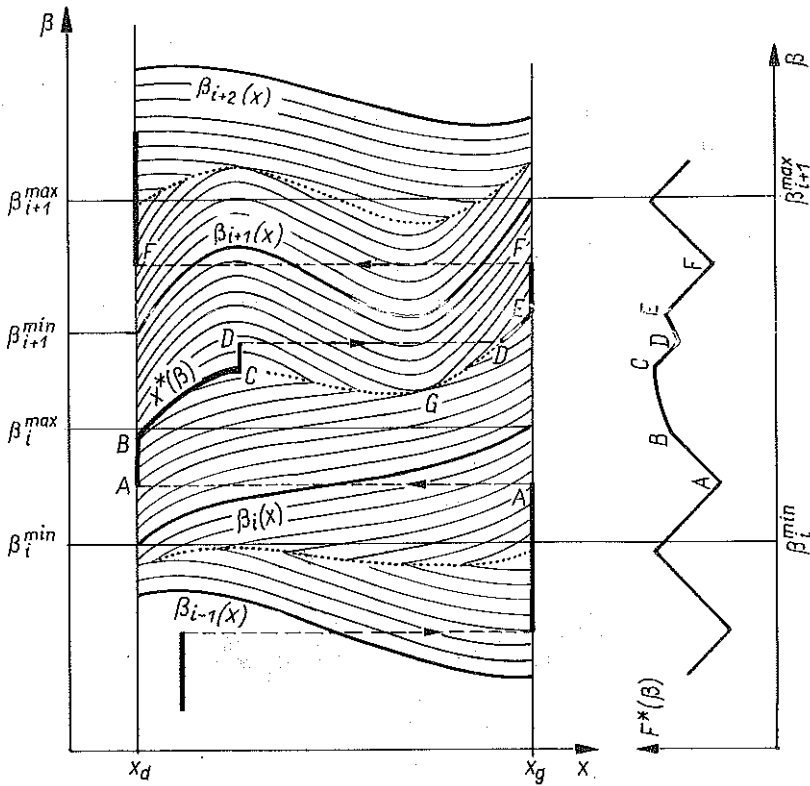
przy czym l, EI, μ są pewnymi wielkościami porównawczymi o odpowiednich wymiarach m, Nm², kg/m.

Zalóżmy dla prostoty, że własności konstrukcji zależą tylko od jednej zmiennej decyzyjnej x . Każda z częstości własnych $\beta_n, n \in I_1$ jest wówczas jednoznacznie określoną funkcją tej zmiennej z tym, że odwzorowania $\beta_n(x)$ są niejawne i realizowane za pomocą odpowiednich algorytmów.

Rozważmy w danym przedziale dopuszczalnym $D = [x_d, x_g]$ zmiennej x cztery funkcje $\beta_n(x), n \in I_2 = \{i-1, i, i+1, i+2\}$ pokazane na rys. 1. Jeżeli przez $\beta \in E_1 = [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$ oznaczmy daną ustaloną wartość częstości wymuszenia, to za miarę jakości rozstrojenia układu możemy przyjąć funkcję

$$(2.3) \quad F(x, \beta) = \min_{n \in I_2} |\beta_n(x) - \beta|,$$

przy czym $\beta_{i-1}(x) \leq \beta_i(x) \leq \beta \leq \beta_{i+1}(x) \leq \beta_{i+2}(x)$.



Rys. 1

Dla uzyskania rozstrojenia optymalnego należy znaleźć takie rozwiązanie $x^*(\beta)$, dla którego

$$(2.4) \quad \max_{x \in D} F(x, \beta) = F(x^*(\beta), \beta) = F^*(\beta), \quad \beta \in E_1.$$

Ze względu na to, że warunek $\beta = \text{const}$ na ogół nie jest nigdy dokładnie spełniony, powyższe sformułowanie problemu możemy nieco zmodyfikować dla zbliżenia go do realiów praktyki.

Załóżmy mianowicie, że $\beta \in E_2 = [\beta_d, \beta_g]$ i przyjmijmy funkcję celu o postaci

$$(2.5) \quad G(x, \beta_d, \beta_g) = \min_{\beta \in E_2} F(x, \beta).$$

Rozstrojenie będzie w tym przypadku optymalne dla takiego $x^*(\beta_d, \beta_g)$, dla którego

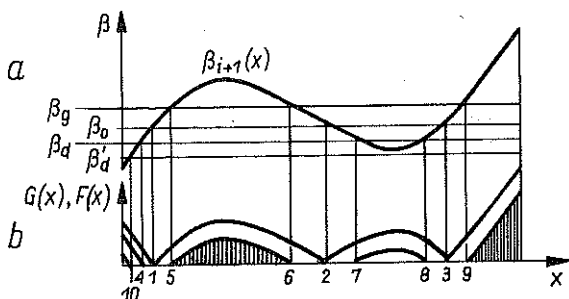
$$(2.6) \quad \max_{x \in D} G(x, \beta_d, \beta_g) = G(x^*, \beta_d, \beta_g) = G^*(\beta_d, \beta_g).$$

3. ROZWIĄZANIA OPTYMALNE

Dla przeprowadzenia analizy rozwiązań problemów sformułowanych w p. 2 posłużymy się planem warstwicowym funkcji $F(x, \beta)$ pokazanym na rys. 1. W rozważaniach założymy, że $x \in D = [x_d, x_g]$, $\beta \in E_2 = [\beta_d, \beta_g]$.

3.1. Problem $\max_{x \in D} F(x, \beta)$, $\beta = \text{const} \in E_2$

Dla ustalonej wartości $\beta = \beta_0$ typowy wykres funkcji $F(x, \beta_0)$ pokazano na rys. 2b. Funkcja ta osiąga w przedziale D cztery maksima lokalne



Rys. 2

i przybiera wartości zerowe w izolowanych punktach 1, 2, 3. Dzięki prostocie omawianego sformułowania wyznaczenie rozwiązania optymalnego $x^*(\beta)$ można uzyskać na podstawie rozważań topograficznych nad planem warstwicowym z rys. 1. Z rozważań tych wynika, że $x^*(\beta)$ jest funkcją odcinkowo ciągłą o wykresie przechodzącym przez punkty $AABCDDEFF$. Skokowe nieciągłości tej funkcji występują na skończonym zbiorze wartości zmiennej β odpowiadających minimom lokalnym funkcji $F^*(\beta)$.

3.2. Problem $\max_{x \in D} G(x, \beta_d, \beta_g)$, $\beta = \text{var} \in E_2$

W przypadku, gdy wartość β zmienia się w przedziale E_2 (obejmującym punkt $\beta = \beta_0$) funkcja $G(x, \beta_d, \beta_g)$ przybiera wartości zerowe w pewnych przedziałach osi x zawierających punkty 1, 2, 3. Na rys. 2b zerowanie się funkcji G występuje w przedziałach ograniczonych przez punkty 4–5, 6–7 i 8–9. Obniżenie dolnej granicy β_d do wartości β'_d powoduje, że $G \equiv 0$ pomiędzy punktami 10–5 i 6–9. Przy dostatecznie szerokim przedziale E_2 może się zdarzyć, że $G \equiv 0$ dla każdego $x \in D$. W tym przypadku rozwiązanie optymalne nie istnieje, a uniknięcie rezonansu nie jest możliwe. Istnienie rozwiązania optymalnego $x^*(\beta_d, \beta_g)$ oznacza, że $G^* > 0$. Teoretycznie jest to rów-

noważne możliwości uniknięcia rezonansu, pozostaje jednak zawsze kwestią otwartą, czy uzyskane rozstrojenie optymalne jest równocześnie i racjonalne to znaczy wystarczające z praktycznego punktu widzenia. Taka ocena rozstrojenia nie mieści się już w ramach postępowania optymalizacyjnego i musi być dokonywana na podstawie przesłanek dodatkowych.

Ze względu na wieloekstremalność funkcji $F(x, \beta)$ i $G(x, \beta_a, \beta_g)$ numeryczne rozwiązywanie zadań najskuteczniejszego rozstrajania wymaga w przypadku ogólnym stosowania metod optymalizacji globalnej takich, jak metoda systematycznego przeszukiwania czy Monte-Carlo [2 i 4]. Ze względu na małą skuteczność tych metod w przypadku zadań o dużym wymiarze zachodzi konieczność uciekania się do efektywnych metod optymalizacji lokalnej i stosowania odpowiednich zabiegów mających na celu zwiększenie prawdopodobieństwa osiągnięcia maksimum globalnego.

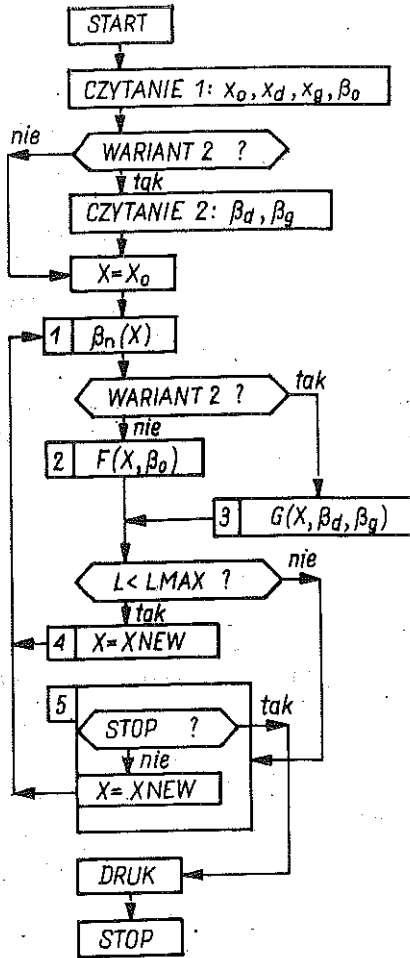
4. OPIS PROPONOWANEGO ALGORYTMU

Dla zbudowania uniwersalnego algorytmu rozstrajania optymalnego posłużymy się schematem blokowym pokazanym na rys. 3, w skład którego wchodzi pięć podprogramów głównych.

Zadaniem podprogramu nr 1 jest obliczanie wartości czterech częstości własnych $\beta_n(x)$ występujących w określeniu (2.3) funkcji celu $F(x, \beta_0)$. Podprogram ten działa na zasadzie dynamicznej syntezy podkonstrukcji z wykorzystaniem uogólnionej koncepcji ciągów STURMA [1].

Przy ustalonej częstości wymuszenia β_0 (wariant 1) wartości funkcji celu $F(x, \beta_0)$ są obliczane przez podprogram nr 2. W przypadku, gdy częstość β może się zmieniać w przedziale $E_2 = [\beta_a, \beta_g]$ funkcja celu zostaje zmodyfikowana (wariant 2) zgodnie ze wzorem (2.5). Zakładając, że szerokość przedziału E_2 jest mała, minimalizację występującą w tym wzorze możemy przeprowadzić za pomocą efektywnej procedury optymalizacji lokalnej (podprogram nr 3).

W obecnej wersji algorytmu proces maksymalizacji funkcji celu przebiega dwuetapowo. W etapie pierwszym maksymalizacja odbywa się za pomocą metody Monte-Carlo (podprogram nr 4) wykorzystującej generowanie liczb pseudolosowych przy użyciu procedury FPMCRV z biblioteki FSCE. W momencie, gdy liczba losowań pomyślnych osiągnie założoną wartość LMAX, następuje przejście do etapu drugiego, w którym maksimum funkcji celu jest obliczane za pomocą metody Powella (podprogram nr 5) działającej według procedury VA04A z biblioteki HARWELL. Procedura ta startuje z ostatniego punktu pomyślnie wylosowanego w etapie pierwszym. Właściwy dobór wartości LMAX pozostaje na razie kwestią otwartą, ze wzrostem bowiem tej

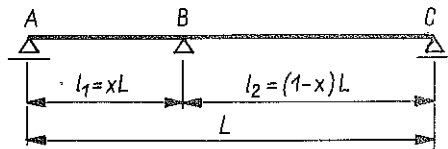


Rys. 3

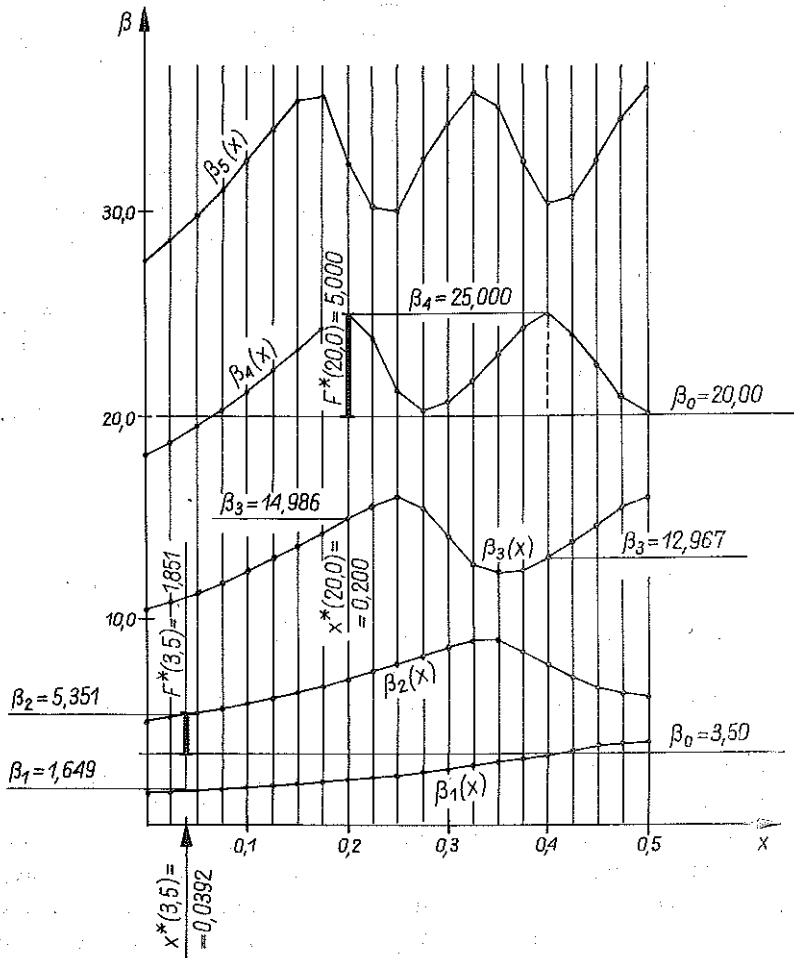
wartości rośnie nie tylko prawdopodobieństwo osiągnięcia optimum globalnego, ale również, i to bardzo znacznie, czas potrzebny na wykonanie obliczeń.

5. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

Na podstawie algorytmu opisanego w p. 4 sporządzono próbną wersję programu na EMC ODRA 1305 w języku FORTRAN. W wersji tej przyjęto, że optymalizacja odbywa się według wariantu 1, a więc dla przypadku, gdy funkcja celu ma postać określoną wzorem (2.3). Obliczenia testowe wykonano



Rys. 4



Rys. 5

na przykładzie belki dwuprzęsłowej (rys. 4), dla której należy dobrać położenie podpory pośredniej B z warunku na optymalne rozstrojenie od działającego wymuszenia harmonicznego o ustalonej częstotliwości β . Położenie podpory jest określone przez bezwymiarową zmienną decyzyjną $x = l_1/L$, $0, 0 \leq x \leq 0,5$.

Tablica 1

Lp	$\beta = 3,5$			$\beta = 20,0$		
	Numer losowania	F	x	Numer losowania	F	x
1	1	1,824	0,0500	1	0,539	0,0500
2	7	1,829	0,0481	2	2,979	0,3500
3	49	1,842	0,0430	3	3,341	0,1500
4	252	1,850	0,0395	9	3,516	0,2275
5	Metoda Powella	1,851	0,0392	Metoda Powella	5,000	0,2000

Optymalizacji rozstrojenia dokonano dwukrotnie dla wartości $\beta = 3,5$ i $\beta = 20,0$, a jej wyniki zestawiono w tablicy 1. Uwidocznione w wierszu 5 tej tablicy maksymalne wartości funkcji celu F obliczone metodą Powella z losowym wyborem punktu startowego są zgodne z wynikami obliczeń numerycznych wykonanych w pracy [6], przedstawionymi fragmentarycznie w postaci wykresów na rys. 5. Z analizy tych wykresów wynika ponadto, że dla $\beta = 20,0$ zbiór rozwiązań optymalnych tworzą dwie wartości zmiennej decyzyjnej: $x_1 = 0,2000$ i $x_2 = 0,4000$, dla których istnieje wspólna wartość maksymalna funkcji celu $F_1 = F_2 = 5,000$. Stanowi to pewną osobliwość rozważanego zadania wynikającą z dynamicznych własności analizowanego układu drgającego.

6. UWAGI KOŃCOWE

Omówiony w pracy ogólny algorytm rozwiązywania wielkoekstremalnych zadań optymalizacji może być stosowany przy rozstrajaniu dowolnych konstrukcji drgających. Ze wzrostem liczby zmiennych decyzyjnych należy jednak liczyć się ze znacznym spadkiem jego efektywności spowodowanym czasochłonnością numerycznych zabiegów randomizacyjnych. Zabiegi te są niestety konieczne przy poszukiwaniu ekstremum globalnego i z ich usprawnieniem można wiązać nadzieje na poszerzenie zakresu zastosowań algorytmu. Warto również zwrócić uwagę na fakt, że w sytuacjach najczęściej występujących w praktyce zakresy dopuszczalnych wariacji zmiennych decyzyjnych bywają z reguły dość ograniczone. Wynikają stąd pewne możliwości zaniechania randomizacji i posługiwania się wyłącznie algorytmami optymalizacji lokalnej o dużej efektywności.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. H. WITTRICK, F. W. WILLIAMS, *A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures*, Quart. J. Mech. Appl. Math., **24**, 3, 263–284, 1971.

2. J. GOLIŃSKI, *Metody optymalizacyjne w projektowaniu technicznym*, WNT, Warszawa 1974.
3. B. OLSZOWSKI, *Some problems of optimum design of vibrating systems*, Arch. Mech., **27**, 4, 605—615, 1975.
4. В. П. Малков, А. Г. Угодчиков, *Оптимизация упругих систем*, Изд. Наука, Москва 1981.
5. B. OLSZOWSKI, A. TOMANA, *Optymalne kształtowanie prętowych układów drgających*, W: *Optymalizacja Wytrzymałościowa Konstrukcji*, Ossolineum, 403—421, 1983.
6. B. OLSZOWSKI, *Dobór schematu belki drgającej z warunku na optymalne rozstrojenie* (w przygotowaniu do druku w *Rozprawach Inżynierskich*).
7. M. MATYJASZEK, B. OLSZOWSKI, *Optymalny kształt pręta lepkosprężystego poddanego podłużnemu wymuszeniu harmonicznemu*, Materiały VII Sympozjum Techniki Wibracyjnej i Wibroakustyki, Akademia Górniczo-Hutnicza, 12—14 grudnia 1984, Kraków 1984.

РЕЗЮМЕ

ОПТИМАЛЬНОЕ РАССТРАИВАНИЕ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ КОНСТРУКЦИЙ КАК МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

В работе обсуждены формулировка задачи, основы алгоритма ее численного решения, а также результаты тестовых расчетов для двупролетной балки, совершающей изгибные колебания под влиянием гармонического вынуждения.

SUMMARY

OPTIMUM DETUNING OF VIBRATING STRUCTURES AS A MULTI-EXTREMUM PROBLEM

The paper contains the formulation of the problem and a short description of the numerical algorithm based on Powell's optimization routine with a randomized starting point. The results of the numerical tests performed for a two-span beam vibrating under stationary harmonic excitation are presented. One-dimensional optimization problem is considered with a decision variable defining the middle support position.

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA, KRAKÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 października 1984 r.