ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 33, 3, 409–416, 1985
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

KLASA ŚCISŁYCH OSIOWO-SYMETRYCZNYCH ROZWIĄZAŃ RÓWNAŃ STOKESA

STANISŁAW T O K A R Z E W S K I (WARSZAWA)

Osiowo-symetryczne równania Stokesa rozwiązano ściśle w obszarze nieskończonego cylindra w przypadku, gdy warunki brzegowe postawione na jego powierzchni są wyrażone za pomocą funkcji dostatecznie gładkich. Wyniki uzyskano w postaci sum nieskończonych szeregów funkcyjnych.

1. Wstęp

Równania Stokesa należą do podstawowych równań mechaniki cieczy i gazów. Stosuje się je do opisu tzw. przepływów powolnych charakteryzujących się małymi liczbami Reynoldsa. Przepływy takie występują na dużą skalę zarówno w technice jak również w przyrodzie. Mamy z nimi do czynienia między innymi w procesach smarowania, sedymentacji, flotacji i wielu innych. Stąd poszukiwanie klas ścisłych rozwiązań równań Stokesa jest ważne nie tylko z teoretycznego, ale również praktycznego punktu widzenia.

W niniejszej pracy znaleziono klasę ścisłych rozwiązań równań Stokesa w przypadku, gdy na brzegu nieskończonego walca kołowego są dane osiowo-symetryczne, dostatecznie gładkie funkcje. Identyczne zadanie rozwiązali w 1981 r. Sampson [5], w 1953 r. Savic [6] oraz w 1958 r. Haberman i Sayre [1]. Uzyskane przez nich rozwiązania mają postać całek Fouriera i są powszechnie stosowane w obliczeniach. Natomiast ścisłe rozwiązanie osiowo-symetrycznych równań Stokesa uzyskane w tej pracy ma postać nieskończonych szeregów funkcyjnych, których poszczególne wyrazy są iloczynami niezależnych od warunków brzegowych wielomianów mnożonych przez kolejne pochodne funkcji określonych na powierzchni nieskończonego walca kołowego. Istotnie więc się różnią od rozwiązań podanych w pracach [1, 5 i 6].

2. Sformułowanie zagadnienia

Do opisu powolnych, osiowo-symetrycznych przepływów stacjonarnych realizujących się w rurach kołowych używa się następujących równań Stokesa:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_2)+\frac{\partial v_1}{\partial z}=0,\\
(2.1)\qquad &\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_2)\right]+\frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2}-\frac{\partial v_0}{\partial r}=0,\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_1}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}-\frac{\partial v_0}{\partial z}=0
\end{aligned}
$$

wraz z następującymi warunkami brzegowymi

$$
\begin{aligned}
&v_1(0,z)<\infty, \qquad v_2(0,z)<\infty,\\
(2.2)\qquad &v_1(1,z)=\frac{\partial}{\partial z}Q_1(z), \qquad v_2(1,z)=\frac{\partial^2}{\partial z^2}Q_2(z),
\end{aligned}
$$

gdzie funkcje Q_1 oraz Q_2 są funkcjami klasy C^∞ z góry danymi. Jako zmienne bezwymiarowe przyjęto

$$
(2.3)\qquad v_0=\frac{v_0' R'}{\mu V'}, \quad v_1=\frac{v_1'}{V'}, \quad v_2=\frac{v_2'}{V'}, \quad r=\frac{r'}{R'}, \quad z=\frac{z'}{R'}.
$$

Występujące w (2.3) wielkości nazywać będziemy odpowiednio: ciśnieniem, prędkością wzdłużną, prędkością promieniową, współrzędną promieniową i współrzędną wzdłużną. Wyznaczenie klasy funkcji $\{v_0(r,z), v_1(r,z), v_2(r,z)\}$ ściśle rozwiązującej zagadnienie brzegowe (2.1) jest głównym celem niniejszej pracy.

3. Metoda rozwiązania

Wykorzystując warunki brzegowe (2.2) można drogą prostych przekształceń matematycznych sprowadzić układ równań (2.1) do następującej postaci:

$$
\begin{aligned}
&v_1=-(L^2+2L)v_1+\frac{r^2}{2}\varphi(z)+\psi(z),\\
(3.1)\qquad &v_2=-\frac{1}{r}\int_0^r r\frac{\partial v_1}{\partial z}dr,\\
&v_0=-\frac{\partial v_1}{\partial z}+\int_0^r \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2}dr+\int^z \varphi(z)\,dz,
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
(3.2)\qquad L=\int_0^r \frac{1}{r}dr\int_0^r r\frac{\partial^2}{\partial z^2}dr
$$

jest operatorem liniowym, natomiast funkcje $\varphi(z)$ oraz $\psi(z)$ są dowolnymi funkcjami zmiennej z. Należy zauważyć, że równanie $(3.1)_1$ jest równaniem biharmonicznym napisanym w postaci różniczkowo-całkowej. Ścisłe rozwiązanie równania $(3.1)_1$ daje się napisać w postaci następującej:

$$v_1 = \sum_{n=0}^{\infty} [-(L^2+2L)]^n \left(\frac{r^2}{2}\varphi(z)+\psi(z)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) L^n \left(\frac{r^2}{2}\varphi(z)+\psi(z)\right). \tag{3.3}$$

Po wykonaniu w (3.3) działań wskazanych przez różniczkowo-całkowy operator (3.2) otrzymujemy

$$v_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left\{\frac{r^{2n+2}}{(2n+2)!!}\varphi^{(2n)}(z)+\frac{r^{2n}}{2n!!}\psi^{(2n)}(z)\right\}, \tag{3.4}$$

gdzie wprowadziliśmy następujące oznaczenia:

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial z^{2n}}\varphi(z) = \varphi^{(2n)}(z), \quad \frac{\partial^{2n}}{\partial z^{2n}}\psi(z) = \psi^{(2n)}(z), \quad 2n!! = 2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot\ldots(2n)^2. \tag{3.5}$$

Oznaczenia (3.5) używane będą w dalszej części pracy. Załóżmy, że funkcje $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ zależą od warunków brzegowych sformułowanych za pomocą funkcji $Q_1(z)$ i $Q_2(z)$ następująco

$$\varphi(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s^1 Q_1^{(2s+1)}(z)+\alpha_s^2 Q_2^{(2s+1)}(z), \quad \psi(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s^1 Q_1^{(2a+1)}(z)+\beta_s^2 Q_2^{(2s+1)}(z), \tag{3.6}$$

gdzie α_s^j i β_s^j są stałymi współczynnikami. Stosując do równań (3.6) oraz (3.4) kryterium d'Alemberta, otrzymujemy następujące nierówności:

$$\lim_{s\to\infty}\left|\frac{\alpha_{s+1}^j}{\alpha_s^j}\frac{Q_j^{(2s+2)}(z)}{Q_j^{(2s)}(z)}\right|<1, \quad \lim_{s\to\infty}\left|\frac{\beta_{s+1}^j}{\beta_s^j}\frac{Q_j^{(2s+2)}(z)}{Q_j^{(2s)}(z)}\right|<1, \quad \lim_{s\to\infty}\left|\frac{1}{(2s)^2}\frac{Q_j^{(2s+2)}(z)}{Q_j^{(2s)}(z)}\right|<1 \tag{3.7}$$

gwarantujące szeregowi (3.4) zbieżność w obszarze nieskończonego walca kołowego o promieniu jednostkowym. Ciąg nieznanych współczynników α_s^j i β_s^j wyznaczymy na podstawie warunków brzegowych (2.2). W tym celu wprowadźmy (3.6) do (3.4) i pogrupujmy wyrazy względem kolejnych rzędów pochodnych funkcji Q_1 oraz Q_2. Następnie spełniając za pomocą $(3.1)_2$ warunki brzegowe $(2.2)_2$ otrzymujemy następujące formuły rekurencyjne na współczynniki α_s^j i β_s^j:

$$
(3.8)\quad
\begin{aligned}
\alpha_s^j &= -8\sum_{n=1}^{s}\frac{(-1)^n}{(2n)!!}\left[\frac{1}{4(n+2)}\alpha_{s-n}^j+n\beta_{s-n}^j\right],\\
\beta_s^j &= \sum_{n=1}^{s}\frac{(-1)^n}{(2n)!!}\left[\frac{n}{4(n+2)(n+1)}\alpha_{s-n}^j+(n-1)\beta_{s-n}^j\right],\\
\alpha_0^1 &= 8,\quad \beta_0^1=-1,\quad \alpha_0^2=16,\quad \beta_0^2=-4.
\end{aligned}
$$

Sumę szeregu (3.4) można również przedstawić w innych równoważnych postaciach. Na przykład grupując w (3.4) wyrazy względem kolejnych pochodnych funkcji Q_j dostajemy

$$
(3.9)\qquad v_1 = v_1 = \sum_{s=0}^{\infty} W_s^{1,1}(r)\,Q_1^{(2s+1)}(z)+W_s^{1,2}(r)\,Q_2^{(2s+1)}(z),
$$

gdzie funkcje

$$
(3.10)\qquad W_s^{1,j}(r) = \sum_{n=0}^{s}(-1)^n(n+1)\left[\frac{r^{2n+2}}{(2n+2)!!}\alpha_{s-n}^j+\frac{r^{2n}}{(2n)!!}\beta_{s-n}^j\right].
$$

są jak widać wielomianami zmiennej r. Po rozwinięciu funkcji Q_j w szereg Taylora, szereg (3.9) przekształca się do następującej postaci:

$$
(3.11)\qquad v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} W_n^{1,1}(r, z-z_0)\,Q_1^{(n)}(z_0)+W_n^{1,2}(r, z-z_0)\,Q_2^{(n)}(z_0),
$$

przy czym

$$
(3.12)\qquad W_n^{1,j}(r, z-z_0) = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} W_s^{1,j}(r)\frac{(z-z_0)^{n-2s-1}}{(n-2s-1)!}
$$

są wielomianami dwóch zmiennych r i z, gdzie $E\left(\dfrac{n-1}{2}\right)$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą nie przekraczającą wartości $(n-1)/2$. Każdy z trzech szeregów funkcyjnych (3.4), (3.9) oraz (3.11) dąży oczywiście do tej samej granicy spełniającej ściśle równanie biharmoniczne $(3.1)_1$ oraz warunki brzegowe $(3.1)_2$ i $(2.2)_2$.

4. Zakres stosowalności

Jeśli funkcje Q_j postawione na powierzchni walca kołowego spełniają nierówności (3.7), to szeregi (3.4), (3.9), (3.11) są zbieżne, a to oznacza, że są ścisłymi rozwiązaniami równania biharmonicznego $(3.1)_1$. Wyznaczenie dokładnego zakresu stosowalności szeregów (3.4), (3.9), (3.11) wymaga rozwiązania nierówności (3.7), co ze względu na skomplikowane formuły iteracyjne

(3.8) jest bardzo trudne. Z przeprowadzonego oszacowania wynika, że następująca nierówność

$$\lim_{s\to\infty}\left|\frac{Q_j^{(2s+2)}(z)}{Q_j^{2s}(z)}\right| < 1 \tag{4.1}$$

gwarantuje szeregom (3.4), (3.9), (3.11) zbieżność w obszarze nieskończonego walca kołowego o promieniu jednostkowym. Stąd wynika, że uzyskane w tej pracy rozwiązania określone wzorami (3.4), (3.9) i (3.11) na pewno nie tworzą zbioru pustego.

5. Dyskusja otrzymanych rozwiązań

Ścisłe rozwiązanie równania biharmonicznego $(3.1)_1$ spełniające warunki brzegowe $(3.1)_2$, (2.2) otrzymano w niniejszej pracy w postaci trzech nieskończonych szeregów funkcyjnych (3.4), (3.9) i (3.11). Skończone sumy cząstkowe szeregów (3.4), (3.9), (3.11) kolejno nie spełniają ani równania biharmonicznego, ani warunków brzegowych; spełniają warunki brzegowe, nie spełniają równania biharmonicznego; spełniają równania biharmoniczne nie spełniają warunków brzegowych. W szeregach (3.4), (3.9) oraz (3.11) występują współczynniki α_s^j, β_s^j określone formułą iteracyjną (3.8). Współczynniki te nie zależą od warunków brzegowych (2.2). Są więc dla typu zadań rozwiązywanych w tej pracy wielkościami charakterystycznymi. Wartości kilku pierwszych współczynników α_s^j i β_s^j są następujące:

$$\begin{gathered}
\alpha_0^1 = 8, \quad \alpha_1^1 = -\frac{2}{3}, \quad \alpha_2^1 = -\frac{13}{144}, \quad \beta_0^1 = -1, \quad \beta_1^1 = -\frac{1}{12}, \\
\beta_2^1 = -\frac{1}{288}; \\
\alpha_0^2 = 16, \quad \alpha_1^2 = -\frac{16}{3}, \quad \alpha_2^2 = -\frac{25}{72}, \quad \beta_0^2 = -4, \\
\beta_1^2 = -\frac{1}{6}, \quad \beta_2^2 = \frac{1}{288}.
\end{gathered} \tag{5.1}$$

Również wielomiany $W_s^{1,j}(r)$ oraz $W_n^{1,j}(r, z-z_0)$ występujące w szeregach (3.9) i (3.11) nie zależą od warunków brzegowych (2.2). Między nimi zachodzi prosty związek

$$W_s^{1,j}(r) = W_{2s+1}^{1,j}(r, 0). \tag{5.2}$$

Kilka pierwszych wielomianów $W_s^{1,j}(r)$ wyznaczonych na podstawie (3.8) i (3.10) zestawiono punkcie 7 pracy. Łatwo zauważyć, że warunki brzegowe (2.2) przyjęto, pierwszy z dokładnością do dowolnej stałej, drugi z dokładnością do dowolnej funkcji liniowej. Zadanie brzegowe sformułowane związkami (3.1), (2.2) nie ma więc jednoznacznego rozwiązania. Można pokazać, że funkcję $v_1(r, z)$ uzyskuje się z dokładnością do funkcji kwadratowej zależnej od współrzędnej r. Funkcje Q_j, reprezentujące prędkości brzegowe, zostały wprowadzone wyłącznie w celu uproszczenia zapisu uzyskanych wyników.

6. Porównanie otrzymanych wyników

Ogólne rozwiązanie równania biharmonicznego, powszechnie używane w literaturze [1, 5, 6], uzyskał Sampson w postaci następującej całki Fouriera:

$$v_1 = \int_0^\infty \{A(t)\cdot t\cdot I_0(rt)+B(t)[rtI_1(rt)+2I_0(rt)]\}\times \times[C(t)\sin(zt)+D(t)\cos(zt)], \tag{6.1}$$

gdzie $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ są odpowiednio nieznanymi funkcjami, zaś I_0, I_1 zmodyfikowanymi funkcjami Bessela pierwszego rodzaju. Wyniki uzyskane w niniejszej pracy mają postać nieskończonych szeregów funkcyjnych danych związkami (3.4), (3.9), (3.11). Istotna różnica między (6.1) i (3.4), (3.9), (3.11) tkwi głównie w sposobie wprowadzanie do (6.1) oraz (3.4), (3.9) i (3.11) warunków brzegowych. O ile w przypadku (6.1) należy na warunkach brzegowych dokonać transformacji Fouriera, o tyle w przypadkach (3.4), (3.9) oraz (3.11) wystarczy policzyć kolejne pochodne funkcji postawionych na powierzchni walca kołowego. W zależności więc od tego, jaka operacja dokonywana na warunkach brzegowych jest prostsza, wygodniej jest w praktycznych obliczeniach stosować bądź związek (6.1), bądź jeden ze związków (3.4), (3.9), (3.11).

7. Klasa ścisłych rozwiązań Stokesa

Ogólne, ścisłe rozwiązania zagadnienia brzegowego (2.1) wygodnie jest napisać, wychodząc ze związków (3.9), (3.1), w następującej postaci

$$v_i = \sum_{j=1}^{2}\sum_{s=0}^{\infty} W_s^{i,j}(r)\, Q^{(2s+j)}(z), \qquad i=0,1,2, \tag{7.1}$$

Między wielomianami $W_s^{i,j}(r)$ zachodzą następujące związki

$$\begin{aligned} W_s^{2,j}(r) &= -\frac{1}{r}\int_0^r rW_s^{1,j}(r)\,dr, && s\geq 0,\\ W_s^{0,j}(r) &= \alpha_s^j - W_{s-1}^{1,j}(r)+\int_0^r W_{s-2}^{2,j}(r)\,dr, && s\geq 0,\\ W_s^{i,j} &= 0, && s<0, \end{aligned} \tag{7.2}$$

gdzie funkcja wyjściowa $W_s^{1,j}(r)$ dana jest związkami (3.10), (3.8). Wielomiany $W_s^{i,j}(r)$ policzone przykładowo dla trzech pierwszych wartości indeksu s równają się

$$
\begin{aligned}
&W_0^{0,1}(r) = 8, && W_0^{0,2}(r) = 16,\\
&W_1^{0,1}(r) = -2r^2+\frac{1}{3}, && W_1^{0,2}(r) = -4r^2-\frac{4}{3},\\
&W_2^{0,1}(r) = \frac{r^4}{8}-\frac{r^2}{12}-\frac{1}{144}, && W_2^{0,2}(r) = \frac{r^4}{4}+\frac{r^2}{3}-\frac{13}{72};
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&W_0^{1,1}(r) = 2r^2-1, && W_0^{1,2}(r) = 4r^2-4,\\
&W_1^{1,1}(r) = -r^4+\frac{r^2}{3}-\frac{1}{12}, && W_1^{1,2}(r) = -\frac{r^4}{2}+\frac{2r^2}{3}-\frac{1}{6},\\
&W_2^{1,1}(r) = \frac{r^6}{96}-\frac{5r^4}{192}+\frac{11r^2}{576}-\frac{1}{288}, && W_2^{1,2}(r) = \frac{r^6}{48}-\frac{r^4}{48}-\frac{r^2}{288}+\frac{1}{288};
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&W_0^{2,1}(r) = -\frac{1}{2}r^3+\frac{1}{2}r, && W_0^{2,2}(r) = r^3+2r,\\
&W_1^{2,1}(r) = \frac{r^5}{24}-\frac{r^3}{12}+\frac{r}{24}, && W_1^{2,2}(r) = \frac{r^5}{12}-\frac{r^3}{6}+\frac{r}{12},\\
&W_2^{2,1}(r) = -\frac{r^7}{768}+\frac{5r^5}{1152}-\frac{11r^3}{2304}+\frac{r}{576}, &&\\
& && W_2^{2,2}(r) = -\frac{r^7}{384}+\frac{r^5}{288}+\frac{r^3}{1152}-\frac{r}{576}.
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

Otrzymana klasa funkcji określona związkami (7.1) oraz nierównościami (3.7) ściśle spełnia w obszarze nieskończonego walca kołowego osiowo-symetryczne równanie Stokesa (2.1), a także warunki brzegowe (2.2). Ścisłe rozwiązanie zagadnienia brzegowego (2.1) można także podać bez żadnych trudności wychodząc z szeregów (3.4), (3.1) oraz (3.11), (3.1).

8. Uwagi końcowe

Klasa ścisłych, osiowo-symetrycznych rozwiązań równań Stokesa dana wzorami (7.1) ma kilka istotnych zalet. Po pierwsze można ją wyrazić za pomocą zamkniętego algorytmu obliczeniowego wygodnego do prowadzenia obliczeń numerycznych. Po drugie korzystanie z warunków brzegowych jest proste, polega bowiem na obliczaniu kolejnych pochodnych funkcji postawionej na powierzchni nieskończonego walca kołowego. Istotną wadą otrzymanych wyników (7.1) są trudności w uzyskaniu informacji o dokładnym zakresie stosowalności rozwiązań (7.1).

Literatura cytowana w tekście

1. W. L. Haberman, R. M. Sayre, *Motion of rigid and fluid spheres in stationary and moving liquids inside cylindrical tubes*, David W. Taylor Model Basin Report No 1143, U.S. Navy Dept., 1958.
2. J. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamic*, Prentice Hall Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
3. H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, 1932.
4. W. E. Langlois, *Slow viscous flow*, Macmillan Comp. New York, 1964.
5. R. A. Sampson, *On Stokes current function*, Phil. Trans. Roy. Soc, A182, 449, 1891.
6. A. Szaniawski, A. Zachara, *Przepływ laminarny w kanale o zmiennym przekroju z ruchomymi i porowatymi ściankami*, Mech. Teor. Stos., **16**, 3, 1978.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji 2 kwietnia 1984 r.