

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE POWŁOK WALCOWYCH POD DZIAŁANIEM MOMENTU ZGINAJĄCEGO I SIŁY OSIOWEJ (*)

JACEK KRUŻELECKI (KRAKÓW)

W pracy przedstawiono problem optymalnego kształtowania powłoki cylindrycznej obciążonej momentem zginającym M_b i siłą osiową N . Jako kryterium optymalizacji przyjęto minimalne pole powierzchni przekroju poprzecznego powłoki przy danych obciążeniach zewnętrznych. W przypadku ogólnym kształtowania jako zmienne decyzyjne przyjęto kształt linii środkowej profilu oraz grubość ścianki powłoki. Warunki poboczne optymalizacji związane są z wytrzymałością i lokalną statecznością ścianki konstrukcji. Przy zastosowaniu koncepcji „powłoki równomiernej stateczności” poszukiwano dwóch typów profili równomiernej stateczności, mianowicie profilu równomiernej stateczności o zmiennej grubości ścianki oraz profilu równomiernej stateczności o stałej grubości ścianki. Zagadnienie pierwsze sformułowano jako problem klasycznego rachunku wariacyjnego, natomiast rozwiązanie zagadnienia drugiego wyrażone jest całkami eliptycznymi. Pokazano szereg rozwiązań optymalnych dla różnych kombinacji obciążeń.

1. UWAGI WSTĘPNE

Problemy optymalnego kształtowania powłok są w ostatnich latach przedmiotem intensywnych badań. Przegląd literatury dotyczący tych zagadnień podali KRUŻELECKI i ŻYCKOWSKI [6].

Szczególnie wiele uwagi poświęca się optymalizacji powłok żebrowanych i zbrojonych. Związane jest to zapewne z faktem, iż elementy wzmacniające w znacznym stopniu poprawiają stateczność konstrukcji cienkościennych i powłoki takie znajdują praktyczne zastosowanie. Z grupy tej wymienimy przykładowo prace KUNNO i YANGA [7] oraz KOŁODJAŻNEGO [3], najbliższej związane z obecną pracą, a poświęcone optymalizacji żebrowanych powłok walcowych poddanych działaniu momentu zginającego i siły osiowej. W pracach tych ograniczenia związane ze statecznością powłoki elementów wzmacniających odgrywały zasadnicze znaczenie przy kształtowaniu.

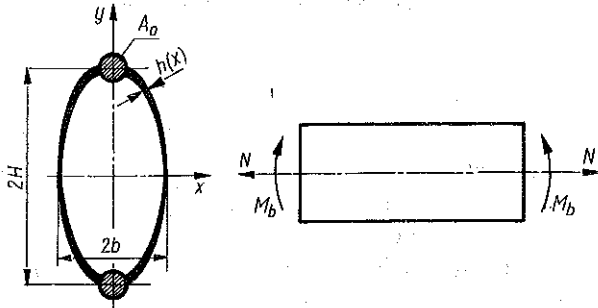
W pewnych przypadkach stosowanie elementów wzmacniających jest z różnych względów niewygodne. W obecnej pracy ograniczymy się do powłok, w których grubość ścianki opisana jest funkcjami gładkimi (grubość ścianki z wzmocnieniami może być opisana przez dystrybucje). Literatura

(*) Praca została wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12.

dotycząca kształtowania wariacyjnego powłok przy warunkach stateczności jest raczej uboga w stosunku do bogatej tematyki. Ogólne sformułowanie problemu optymalizacji wariacyjnej powłoki walcowej zginanej przy różnych warunkach stateczności zawiera praca ŻYCKOWSKIEGO [9] (metoda energetyczna), jednakże podane tam rozwiązania dotyczą jedynie powłoki o stałej grubości. ŻYCKOWSKI i KRUŻELECKI [10] stosując warunek lokalnej stateczności ścianki, określili optymalny kształt niekołowej walcowej powłoki zginanej, zmienną grubość ścianki i kształt powierzchni środkowej. Wprowadzili oni koncepcję „powłoki równomiernej stateczności”. Koncepcję tę rozszerzono na przypadek obciążeń złożonych w pracach KRUŻELECKIEGO [4] oraz KRUŻELECKIEGO i ŻYCKOWSKIEGO [5], poszukując w ogólnym przypadku, kształtu linii środkowej profilu i zmiennej grubości ścianki powłoki walcowej jednocześnie zginanej i skręcanej. Koncepcja ta zostanie wykorzystana również w obecnej pracy.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU OPTIMALIZACJI

Rozważmy niekołową sprężystą powłokę cylindryczną obciążoną na końcach momentem zginającym M_b i osiową siłą ściskającą N (rys. 1). Poszuki-



Rys. 1

wać będziemy optymalnego kształtu linii środkowej $y(x)$ i zmiennej grubości ścianki $h(x)$ powłoki, zapewniających minimum pola powierzchni przekroju przy danych wartościach obciążeń zewnętrznych M_b i N . Rozpatrzmy bisymetryczne przekroje zamknięte, ponieważ przekroje otwarte są mniej odporne na zwichrzenie, a profile o dwóch osiach symetrii są niezależne od zmiany zwrotu momentu zginającego.

Założymy dodatkowo, iż pewna część materiału skupiona jest w zewnętrznych włóknach tworząc żebro wzdłuż powłoki; oznaczmy ją przez A_0 . Sytuacja taka typowa jest dla przypadku czystego zginania [9 i 10], ale spodziewać się można, że w złożonym stanie obciążenia pole takie winno również się pojawiać i „pomagać” w przeniesieniu zginania.

Poszukujemy zatem minimalnej wartości funkcjonału, pola powierzchni przekroju:

$$(2.1) \quad A = \oint h(x) ds + 2A_0 = \min$$

przy izoperymetrycznych warunkach stałości obciążeń, mianowicie momentu zginającego

$$(2.2) \quad M_b = \oint \sigma_M(x) h(x) y(x) ds + 2A_0 H \sigma_{M_{\max}} = \text{const}$$

i siły normalnej

$$(2.3) \quad N = \oint \sigma_N h(x) ds + 2A_0 \sigma_N = \text{const},$$

gdzie $ds = (1+y'^2)^{1/2} dx = (1+x'^2)^{1/2} dy$ jest elementem długości łuku, a indeksy M i N oznaczają, iż naprężenia wywołane są odpowiednio momentem zginającym i siłą osiową.

Przyjmijmy, że rozkład naprężeń pochodzących od zginania jest liniowy (hipoteza Bernoulliego)

$$(2.4) \quad \sigma_M = \sigma_{M_{\max}} \frac{y}{H},$$

natomiast naprężenie σ_N pochodzące od siły osiowej ma wartość stałą.

Zasadnicze znaczenie dla kształtowania mają ograniczenia nałożone na konstrukcję. Spośród różnych możliwych warunków weźmiemy pod uwagę tylko dwa, zapewniające bezpieczną pracę konstrukcji. Będzie to warunek wytrzymałości, który spełnimy w punkcie niebezpiecznym $y = H$, mianowicie

$$(2.5) \quad \sigma_{M_{\max}} + \sigma_N = \sigma_0,$$

gdzie σ_0 jest naprężeniem dopuszczalnym. Drugim jest warunek lokalnej stateczności ścianki powłoki.

Utrata stateczności powłoki ma często charakter lokalny, w niewielkim stopniu zależny od warunków brzegowych. Szczególnie uwidacznia się to w przypadku niejednorodnego stanu naprężenia, gdzie stwierdzono lokalność wyboczenia ścianki powłoki (KABANOV [2], WOLMIR [8]). Praktycznie oznacza to możliwość zastosowania wzorów wyprowadzonych dla jednorodnego stanu naprężenia do stanów niejednorodnych, mianowicie w odniesieniu do naprężeń maksymalnych.

Powłoka walcowa niekołowa może być traktowana jako powłoka o niejednorodności promienia krzywizny. Również i w tym przypadku pewne argumenty przemawiają za lokalnym opisem stateczności. W pracy Hutchinsona [1] badano naprężenia krytyczne przy osiowym ściskaniu powłoki walcowej o przekroju eliptycznym. Stwierdzono tam, iż naprężenie krytyczne określać można tak jak dla przekroju kołowego o promieniu równym maksymalnemu promieniowi krzywizny elipsy dla powłok długich.

Dodatkowo postawimy hipotezę, że zmienna grubość ścianki może być w przybliżeniu również potraktowana lokalnie.

Wykorzystując hipotezę lokalności do celów optymalnego kształtowania podamy za pracę KRUŻELECKIEGO i ŻYCKOWSKIEGO [5] definicję powłoki równomiernej stateczności. Jeżeli lokalny warunek stateczności będzie spełniony nie tylko w punkcie niebezpiecznym, ale w każdym innym punkcie powłoki, to konstrukcję taką nazywać będziemy „powłoką równomiernej stateczności”. Konstrukcja taka określona jest na brzegu dopuszczalnego obszaru w przestrzeni naprężeń.

Warunek stateczności w sformułowaniu lokalnym wyrażony w naprężeniach dla powłoki walcowej zginanej i ściskanej osiowo możemy napisać w formie

$$(2.6) \quad \frac{j\sigma_M}{\sigma_{M_c}} + \frac{j\sigma_N}{\sigma_{N_c}} = 1,$$

gdzie j oznacza stopień bezpieczeństwa; indeks c oznacza odpowiednie naprężenie krytyczne. Przyjmując za WOLMIREM [8] i HUTCHINSONEM [1] wzory na naprężenie krytyczne

$$(2.7) \quad \sigma_{M_c} = \sigma_{N_c} = \sigma_c = \beta E \frac{h}{\rho}, \quad \beta = [3(1-\nu^2)]^{-1/2},$$

będziemy zastępować w (2.7) stałą grubość zmienną grubością ścianki $h = h(x)$ oraz zamiast stałego promienia podstawimy zmienny promień krzywizny $\rho = \rho(x)$ linii środkowej profilu.

W obecnej pracy założymy, iż warunek stateczności lokalnej (2.6) spełniony będzie nie tylko w punkcie niebezpiecznym, ale w każdym innym punkcie powłoki: powłoka równomiernej stateczności.

Wykorzystując warunek wytrzymałości (2.5) wprowadzimy bezwymiarowy parametr

$$(2.8) \quad k = \frac{\sigma_{M_{\max}}}{\sigma_{M_{\max}} + \sigma_N} = \frac{\sigma_{M_{\max}}}{\sigma_0},$$

który pośrednio informuje nas o wielkości momentu zginającego ($0 \leq k \leq 1$); $k = 0$, gdy $M_b = 0$ oraz $k = 1$, gdy $N = 0$. Wygodnie też będzie zastosować bezwymiarowe zmienne $\xi = x/H$ i $\eta = y/H$.

Podstawiając (2.4) i (2.8) do warunku stateczności (2.6), otrzymujemy równanie określające zmienną grubość ścianki równomiernej stateczności:

$$(2.9) \quad h = \psi H (1 - k + k\eta) \frac{(1 + \eta'^2)^{3/2}}{-\eta''},$$

gdzie $\psi = j\sigma_0/\beta E$; w (2.9) wykorzystano już znaną zależność na promień krzywizny $\rho = (1 + \eta'^2)^{3/2}/|\eta''| = (1 + \xi'^2)^{3/2}/|\xi''|$. Grubość ścianki w istotny sposób zależy tu od kształtu linii środkowej profilu, który w ogólnym

przypadku poszukiwany będzie z warunku minimum pola powierzchni przekroju poprzecznego.

Przy założonym warunku podwójnej symetrii przekroju funkcjonal nasz napiszemy w postaci

$$(2.10) \quad A = 4\psi H^2 \int_0^{\alpha} (1-k+k\eta) \frac{(1+\eta'^2)^2}{-\eta''} d\xi + 2A_0 = \min$$

a izoperymetryczne warunki stałości obciążeń w formie

$$(2.11) \quad M_b = 4\psi\sigma_0 k H^3 \int_0^{\alpha} (1-k+k\eta) \eta^2 \frac{(1+\eta'^2)^2}{-\eta''} d\xi + 2A_0 k H \sigma_0 = \text{const},$$

$$(2.12) \quad N = 4\psi\sigma_0 (1-k) H^2 \int_0^{\alpha} (1-k+k\eta) \frac{(1+\eta'^2)^2}{-\eta''} d\xi + 2A_0 \sigma_0 (1-k) = \text{const},$$

gdzie $\alpha = b/H$. Równanie (2.11) posłuży nam do określenia pola skupionego, mianowicie

$$(2.13) \quad 2A_0 = \frac{M_b}{k\sigma_0 H} - 4\psi H^2 \int_0^{\alpha} (1-k+k\eta) \eta^2 \frac{(1+\eta'^2)^2}{-\eta''} d\xi,$$

a po podstawieniu (2.13) do (2.10) i (2.12) otrzymujemy

$$(2.14) \quad A = 4\psi H^2 \int_0^{\alpha} (1-k+k\eta) (1-\eta^2) \frac{(1+\eta'^2)^2}{-\eta''} d\xi + \frac{M_b}{k\sigma_0 H},$$

$$(2.15) \quad N = 4\psi\sigma_0 (1-k) H^2 \int_0^{\alpha} (1-k+k\eta) (1-\eta^2) \frac{(1+\eta'^2)^2}{-\eta''} d\xi + \frac{M_b (1-k)}{kH}.$$

Przy danych wartościach obciążeń zewnętrznych M_b i N równanie (2.15) służyć może do wyznaczenia nieznannej wartości parametru k . Wysokość profilu obliczymy z warunku minimum pola powierzchni przy stałych obciążeniach:

$$(2.16) \quad \partial A / \partial H = 0 \quad \text{dla} \quad N = \text{const} \quad \text{i} \quad M_b = \text{const};$$

stąd otrzymujemy

$$(2.17) \quad H = \frac{M_b^{1/3}}{2\psi^{1/3} J^{1/3} \sigma_0^{1/3} k^{1/3}},$$

gdzie

$$(2.18) \quad J = \int_0^{\alpha} (1-k+k\eta)(1-\eta^2) \frac{(1+\eta'^2)^2}{-\eta''} d\xi.$$

Równanie (2.15) po wykorzystaniu (2.17) napisać możemy w formie

$$(2.19) \quad \frac{N}{\psi^{1/3} \sigma_0^{1/3} M_b^{2/3}} = 3J^{1/3} \frac{1-k}{k^{2/3}}.$$

Wprowadzimy obecnie wielkość

$$(2.20) \quad M = \sqrt{\psi M_b^2 + N^3/\sigma_0}$$

nazwaną tutaj momentem zastępczym i wiążącą obciążenia zewnętrzne; dla stałych wartości momentu zginającego i siły osiowej, M jest również stałe. Obliczenia wygodnie będzie przeprowadzić dla wielkości bezwymiarowych. Wykorzystując (2.20) otrzymujemy

$$(2.21) \quad a = A (\sigma_0/M)^{2/3} = 3 \left(1 + \frac{N^3}{\psi \sigma_0 M_b^2}\right)^{-1/3} \frac{J^{1/3}}{k^{2/3}},$$

$$(2.22) \quad 2a_0 = 2A_0 (\sigma_0/M)^{2/3} = 2 \left(1 + \frac{N^3}{\psi \sigma_0 M_b^2}\right)^{-1/3} \left(1 - \frac{J_1}{2J}\right) \frac{J^{1/3}}{k^{2/3}},$$

$$(2.23) \quad \chi = H (\sigma_0/M)^{1/3} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{N^3}{\psi \sigma_0 M_b^2}\right)^{-1/6} \psi^{-1/2} J^{-1/3} k^{-1/3},$$

gdzie

$$(2.24) \quad J_1 = \int_0^{\alpha} (1-k+k\eta) \eta^2 \frac{(1+\eta'^2)^2}{-\eta''} d\xi.$$

Dalsza procedura optymalizacji przeprowadzona będzie w dwóch wariantach.

3. OPTIMALIZACJA WARIACYJNA

Poszukując minimum pola powierzchni przekroju powłoki określonego równaniem (2.21) wystarczy teraz wyznaczyć minimum funkcjonału (2.18) bez dodatkowych ograniczeń. Zastosujemy klasyczny rachunek wariacyjny. Wygodnie będzie w tym przypadku zmienić zmienną niezależną ($\xi \rightarrow \eta$) w funkcjonałe (2.18), otrzymując

$$(3.1) \quad J = \int_0^1 (1-k+k\eta)(1-\eta^2) \frac{(1+\xi'^2)^2}{-\xi''} d\eta.$$

Funkcjonał (3.1) nie zawiera zmiennej zależnej ξ i równanie Eulera-Lagrange'a oryginalnie rzędu czwartego, wobec $F_{\xi} = 0$, może być formalnie jednokrotnie scałkowane

$$(3.2) \quad F_{\xi'} - \frac{d}{d\eta} F_{\xi''} = C,$$

gdzie C jest stałą całkowania. Podstawiając za F funkcję podcałkową całki (3.1) otrzymujemy

$$(3.3) \quad \xi''' = \frac{ck\xi'^3}{2(1-k+k\eta)(1+\xi'^2)^2(1-\eta^2)} + \frac{4\xi' \xi''^2}{1+\xi'^2} + \frac{\xi'' [k(1-3\eta^2) - 2(1-k)\eta]}{2(1-k+k\eta)(1-\eta^2)}.$$

W otoczeniu punktu $\xi = 0, \eta = 1$ wygodnie jest powrócić do zmiennej niezależnej ξ ; wykorzystując znane wzory na pochodne funkcji odwrotnej, równanie (3.3) przepiszemy w formie

$$(3.4) \quad \eta''' = \frac{ck\eta'^3}{2(1-k+k\eta)(1+\eta'^2)^2\eta'(1-\eta^2)} - \frac{\eta'^2(1-3\eta'^2)}{\eta'(1+\eta'^2)} + \frac{\eta''\eta' [k(1-3\eta^2) - 2(1-k)\eta]}{2(1-k+k\eta)(1-\eta^2)}.$$

Stała C może być wyznaczona z warunku transversalności

$$(3.5) \quad \left(F_{\xi'} - \frac{d}{d\eta} F_{\xi''} \right) \Big|_{\eta=0} = 0,$$

stąd $C = 0$ i odpowiedni wyraz w równaniach (3.3) i (3.4) winien być pominięty. W szczególnym przypadku czystego zginania ($k = 1$) równania (3.3) i (3.4) redukują się do równań otrzymanych w pracy [10]. W przypadku czystego ściskania ($k = 0$) równanie (3.4) przybiera postać

$$(3.6) \quad \eta''' = -\frac{\eta'^2(1-3\eta'^2)}{\eta'(1+\eta'^2)} - \frac{\eta''\eta'\eta}{1-\eta^2},$$

którego rozwiązaniem jest profil kołowy $\eta = \sqrt{1-\xi^2}$.

Warunki brzegowe dla tego problemu przyjęto w ten sposób by zapewnić ciągłość pierwszych pochodnych na osiach symetrii (nie dopuszcza się naroży na osiach symetrii):

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \eta &= 1, & \eta' &= 0, \\ \eta &= 0, & \xi' &= 0. \end{aligned}$$

Równania (3.3) i (3.4) całkowano numerycznie rozpoczynając od punktu $\xi = 0, \eta = 1$. Wygodnie jest w tym przypadku rozpocząć całkowanie rów-

nania (3.4), ale i to równanie wykazuje osobliwości w punkcie początkowym. By zbadać tę osobliwość rozwinęto funkcję $\eta = \eta(\xi)$ w szereg potęgowy w otoczeniu punktu $\xi = 0$. Okazuje się, że prosty szereg potęgowy

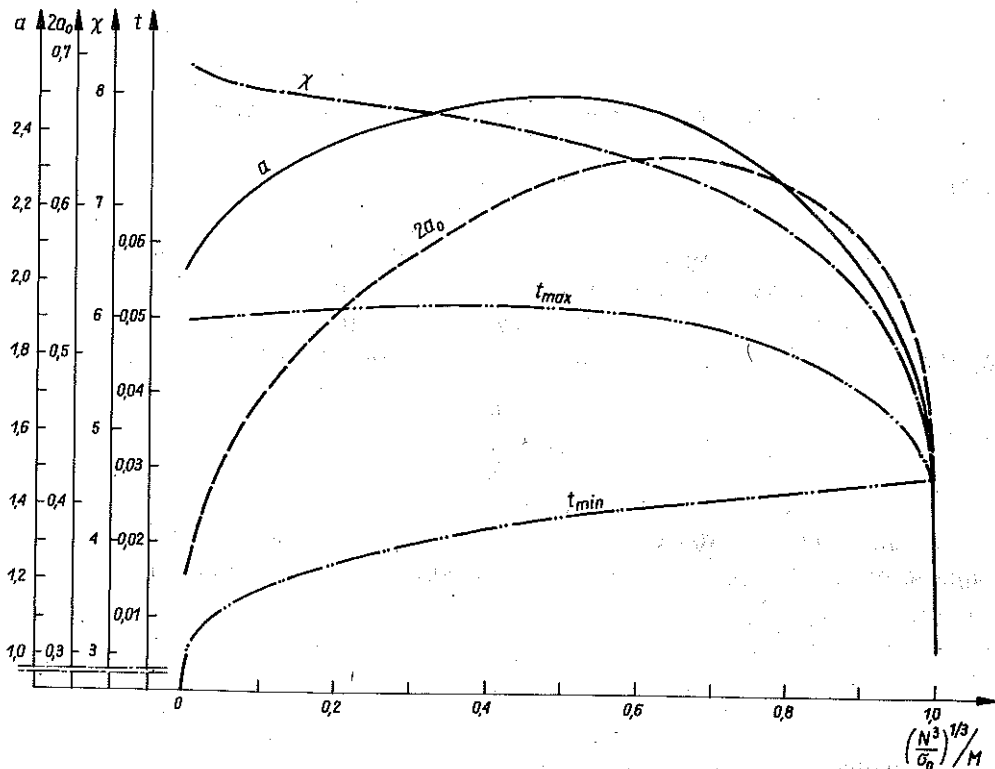
$$(3.8) \quad \eta = \sum_{i=0,2,4,\dots} \alpha_i \xi^i$$

opisuje tę osobliwość, gdzie $\alpha_0 = 1$. Podstawiając (3.8) do (3.4) wyrażamy następne współczynniki szeregu przez α_2 , który pozostaje dowolny:

$$(3.9) \quad \alpha_4 = \frac{[1 + 2k(8\alpha_2 + 1) - k^2] \alpha_2^2}{22(1-k) + 14k}$$

Wyrażenie $-2\alpha_2$ ma tu prostą interpretację fizyczną. Jest to krzywizna linii środkowej w punkcie $\eta = 1, \xi = 0$.

Procedura całkowania była następująca. Dla $0 \leq \xi \leq 0,01$ rozwiązanie określone było szeregiem (3.8). Następnie równanie (3.4) całkowano numerycznie przy użyciu metody Rungego-Kutty. W punkcie ξ_1, η_1 , (gdzie $\eta' \approx -1$) zmieniono zmienną niezależną i wykorzystywano równanie (3.3). W ten sposób łatwiej jest spełnić drugi z warunków brzegowych (3.7). Całkowanie takie dla ustalonego k , a więc dla ustalonej wartości stosunku



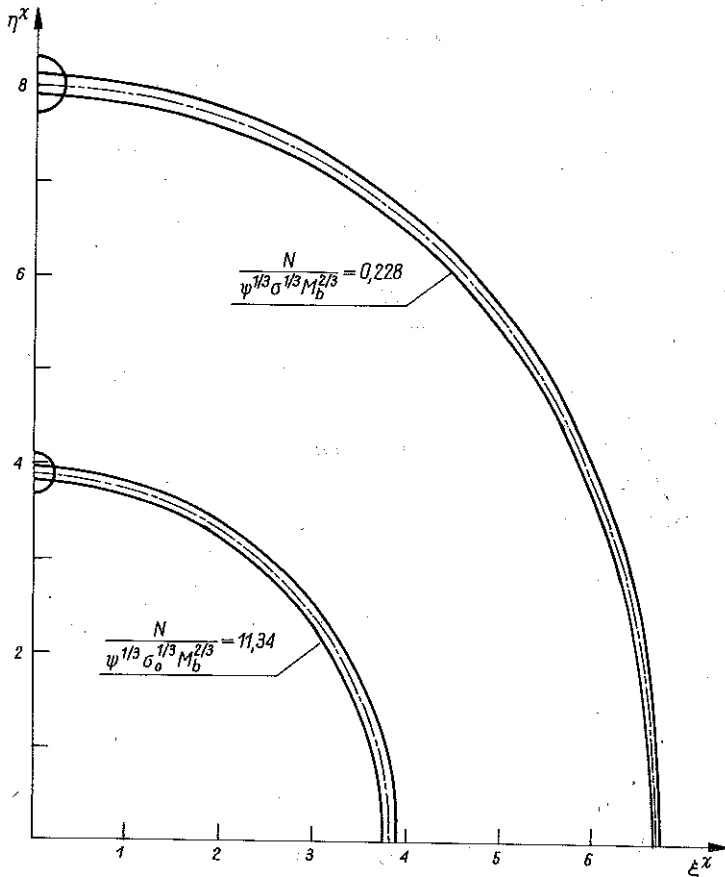
Rys. 2

obciążeń, przeprowadzono dla zmiennych wartości α_2 , tak by spełnić warunek brzegowy (3.7). Stosunek obciążeń doliczono z równania (2.19) dla dobranego α_2 i ustalonego k . Bezwymiarową zmienną grubość ścianki równomiernej stateczności doliczono na każdym kroku całkowania z równania

$$(3.10) \quad t = h(\sigma_0/M)^{1/3} = \frac{1}{2} \psi^{1/2} J^{-1/3} k^{-1/3} \left(1 + \frac{N^3}{\psi \sigma_0 M_b^2}\right)^{-1/3} (1-k+k\eta) \frac{(1+\eta'^2)^{3/2}}{-\eta''}$$

lub

$$(3.11) \quad t = h(\sigma_0/M)^{1/3} = \frac{1}{2} \psi^{1/2} J^{-1/3} k^{-1/3} \left(1 + \frac{N^3}{\psi \sigma_0 M_b^2}\right)^{-1/3} (1-k+k\eta) \frac{(1+\xi'^2)^{3/2}}{-\xi''}$$



Rys. 3

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla całego zakresu obciążeń, od czystego zginania do czystego ściskania. Wielkości geometryczne charakteryzujące optymalny przekrój równomiernej stateczności pokazano na rys. 2.

Rysunek 3 przedstawia kształt profilu równomiernej stateczności dla dwóch wybranych stosunków obciążeń. $N/(\psi^{1/3} \sigma_0^{1/3} M_b^{2/3}) = 0,228$ i $11,34$. Pole skupione a_0 schematycznie zaznaczono tam półkolem, natomiast grubość ścianki zwiększono czterokrotnie w celu wyraźniejszego pokazania kształtu przekroju.

4. PROFIL RÓWNOMIERNEJ STATECZNOŚCI O STAŁEJ GRUBOŚCI ŚCIANKI

Równomierną stateczność profilu o stałej grubości ścianki zapewnić można przez odpowiednie ukształtowanie linii środkowej. W tym przypadku funkcja $\eta(\xi)$ nie jest już dowolna; określona jest przez warunek $h = \text{const}$. Wykorzystując (2.5) warunek ten napiszemy

$$(4.1) \quad H\psi(1-k+k\eta) \frac{(1+\eta'^2)^{3/2}}{-\eta''} = \text{const} = h_0$$

lub

$$(4.2) \quad t_0 = (1-k+k\eta) \frac{(1+\eta'^2)^{3/2}}{-\eta''}$$

Równanie (4.2) po jednokrotnym scałkowaniu przyjmuje postać

$$(4.3) \quad \eta' = \frac{d\eta}{d\xi} = - \frac{\sqrt{t_0^2 - \left[(1-k)\eta + \frac{1}{2}k\eta^2 + D \right]^2}}{(1-k)\eta + \frac{1}{2}k\eta^2 + D},$$

gdzie D jest stałą całkowania. Spełniając warunki brzegowe (3.7) wyznaczmy stałą D oraz t_0 :

$$(4.4) \quad D = 0, \quad t_0 = \frac{2-k}{2}.$$

Równanie (4.3) po podstawieniu (4.4) napiszemy

$$(4.5) \quad \frac{d\xi}{d\eta} = - \frac{(1-k)\eta + \frac{1}{2}k\eta^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}k\right)^2 - \left[(1-k)\eta + \frac{1}{2}k\eta^2\right]^2}}$$

Okazuje się, iż postać rozwiązania (4.5) zależy od wartości k . Wykorzystując warunek $\eta = 1, \xi = 0$ rozwiązanie to możemy napisać dla $k \leq 1 - \sqrt{2}/2$

$$(4.6) \quad E(\alpha, r) - (1-k)^2 F(\alpha, r) = k\xi,$$

gdzie

$$(4.7) \quad \alpha = \arcsin \sqrt{\frac{(1-k)(1-\eta) + \frac{1}{2}k(1-\eta^2)}{2\left(1 - \frac{1}{2}k\right)}},$$

$$(4.8) \quad r = 2 \sqrt{k\left(1 - \frac{1}{2}k\right)}$$

oraz dla $k \geq 1 - \sqrt{2}/2$

$$(4.9) \quad \sqrt{1 - \frac{1}{2}k} \left[2E\left(\beta, \frac{1}{r}\right) - F\left(\beta, \frac{1}{r}\right) \right] = k\xi,$$

gdzie

$$\beta = \arcsin \sqrt{2k \left[(1-k)(1-\eta) + \frac{1}{2}k(1-\eta^2) \right]}.$$

F i E są tutaj całkami eliptycznymi odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju.

By efektywnie określić wielkości geometryczne charakteryzujące przekrój, należy jeszcze wyznaczyć J i J_1 określone wzorami (2.18) i (2.24). Wykorzystując równania (4.2) i (4.5) otrzymujemy

dla $k \leq 1 - \sqrt{2}/2$

$$(4.11) \quad J = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}k\right)^2}{k^2} [2(2k-1)F(\gamma, r) + (1-k)\pi - 2E(\gamma, r)],$$

$$(4.12) \quad J_1 = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}k\right)^2}{k^2} [2(1-k)^2 F(\gamma, r) - (1-k)\pi + 2E(\gamma, r)],$$

gdzie

$$\gamma = \arcsin \sqrt{1/2};$$

dla $k \geq 1 - \sqrt{2}/2$

$$(4.13) \quad J = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}k\right)^2}{k^2} \left\{ -\frac{2-4k+k^2}{\sqrt{k\left(1 - \frac{1}{2}k\right)}} F\left(\delta, \frac{1}{r}\right) + (1-k)\pi - \right.$$

(4.13)
[cd.]

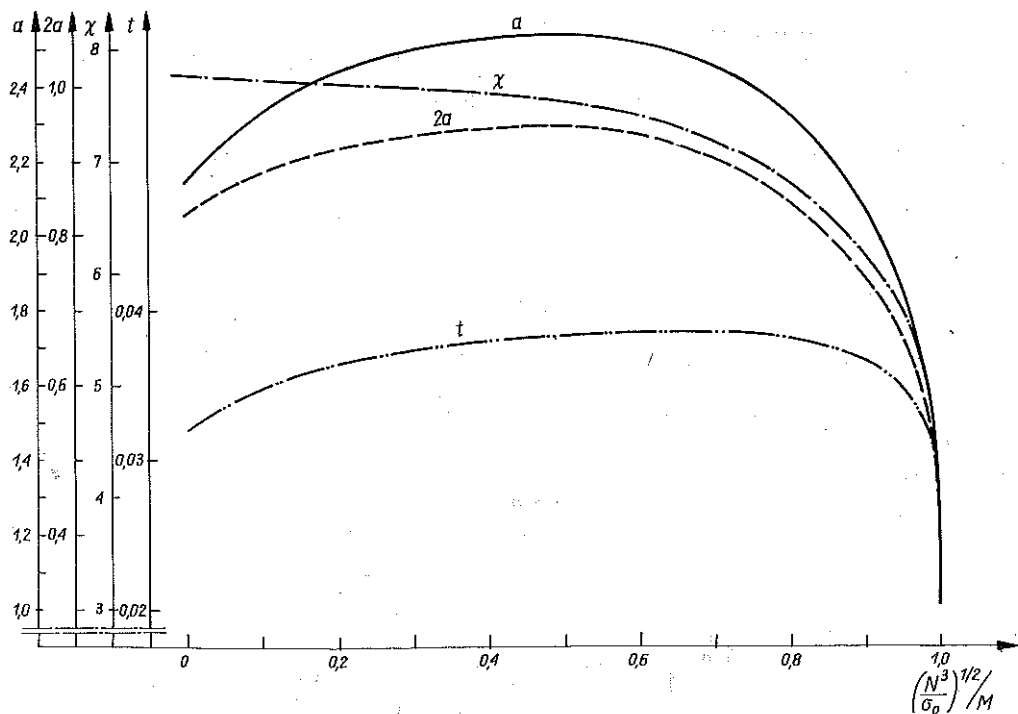
$$-2 \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}k}{k}} \left[2E\left(\delta, \frac{1}{r}\right) - F\left(\delta, \frac{1}{r}\right) \right] \Bigg\},$$

$$(4.14) \quad J_1 = \frac{\left(1-\frac{1}{2}k\right)^2}{k^2} \left\{ \frac{2(1-k)^2}{\sqrt{k\left(1-\frac{1}{2}k\right)}} F\left(\delta, \frac{1}{r}\right) - (1-k)\pi + \right. \\ \left. + 2 \sqrt{k\left(1-\frac{1}{2}k\right)} \left[2E\left(\delta, \frac{1}{r}\right) - F\left(\delta, \frac{1}{r}\right) \right] \right\},$$

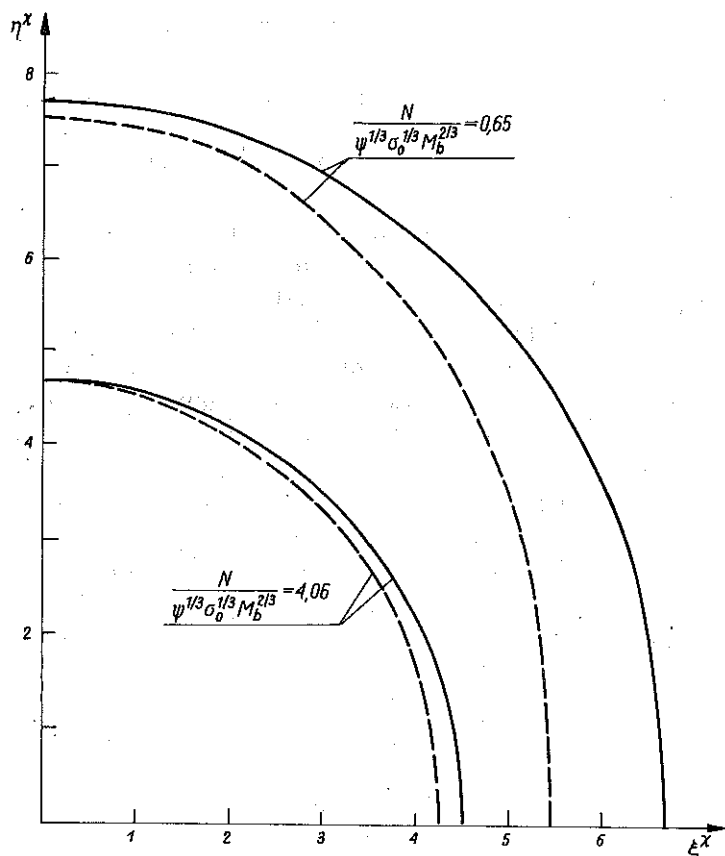
gdzie

$$\delta = \arcsin \sqrt{2k\left(1-\frac{1}{2}k\right)}.$$

Wielkości geometryczne dla tego typu profilu opisane są wzorami (2.21)–(2.23) z podstawieniem za J i J_1 odpowiednio wielkości (4.11–4.14); natomiast



Rys. 4



Rys. 5

bezwymiarowa grubość ścianki wyrażona jest następująca:

$$(4.15) \quad t = h_0 (\sigma_0/M)^{1/3} = \frac{1}{2} \psi^{1/2} J^{-1/3} k^{-1/3} (2-k) \left(1 + \frac{N^3}{\psi \sigma_0 M_b^2} \right)^{-1/6}$$

Rysunek 4 przedstawia wielkości geometryczne charakteryzujące przekrój w funkcji obciążeń zewnętrznych. Linią ciągłą zaznaczono całkowite pole przekroju a , linią przerywaną—pole skupione $2a_0$, linią przerywaną z kropką—wysokość χ oraz linią przerywaną z dwoma kropkami—grubość ścianki t .

Na rysunku 5 porównano kształty linii środkowych profili o stałej grubości ścianki z profilami o zmiennej grubości ścianki dla tych samych obciążeń. Dla stosunków obciążeń bliższych czystemu zginaniu, profil równomiernej stateczności o zmiennej grubości ścianki (konstrukcja optymalna) ma gabaryty większe (linia ciągła) niż odpowiadający mu profil o stałej grubości (linia przerywana). W miarę zbliżania się obciążenia do czystego ściskania różnice między obu typami profili maleją, tak że w przypadku granicznym otrzymujemy profil kołowy o stałej grubości ścianki.

5. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozważano problem optymalnego kształtowania sprężystej powłoki cylindrycznej przy obciążeniu złożonym powodującym niejednorodny stan naprężenia w jej przekroju. Wykorzystano tutaj koncepcję powłoki równomiernej stateczności przedstawiając dwa warianty kształtowania. Pierwszy z nich, opierający się na klasycznym rachunku wariacyjnym, prowadził do poszukiwania obu funkcji kształtu, natomiast drugi wariant, dający zawsze mniej optymalne rozwiązania, polegał na poszukiwaniu kształtu linii środkowej dla danej funkcji opisującej grubość ścianki (w obecnej pracy $h = \text{const}$). Istnieje jeszcze trzeci sposób prowadzący do optymalizacji parametrycznej, mianowicie poszukiwanie rozkładu grubości ścianki dla danego kształtu profilu. Wariant ten, nie analizowany tutaj, prowadzi zawsze do wyników gorszych od dwóch poprzednich.

Warto również dodać, że w przypadku szczególnym czystego ściskania jako rozwiązanie otrzymujemy stałą wartość stosunku grubości ścianki do promienia krzywizny profilu kołowego, $t/\chi = \psi$; natomiast rozdział pola powierzchni przekroju na część określającą a_0 i część tworzącą ściankę pozostaje dowolny.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. W. HUTCHINSON, *Buckling and initial postbuckling of oval cylindrical shells under axial compression*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **35E**, 1, 66—72, 1968.
2. В. В. КАБАНОВ, *Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при неоднородном сжатии*, Изв. АН СССР; Механ., 1, 181—183, 1963.
3. А. П. КОЛОДЯЖНЫЙ, *Выбор рациональных параметров стрингерной оболочки, нагруженной изгибающим моментом и осевой силой*, Реш. некот. Физ.-тех. Днепропетровск, 44—48, 1972.
4. J. KRUŻELECKI, *Optimization of shells under combined loading via the concept of uniform stability*, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, 1980, ed. E. J. HAUG and J. SEA, Sijthoff and Noordhoff, Alphen, 929—950, 1981.
5. J. KRUŻELECKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Optimal design of an elastic cylindrical shell under overall bending with torsion*, SM Archives **9** (1984), 269—306.
6. J. KRUŻELECKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Optimal structural design of shells a survey*, SM Archives **10** (1985), 2.
7. K. KUNOO, T. Y. YANG, *Minimum weight design of orthogonally stiffened waffle cylindrical shell with buckling constraints*, J. Spacecraft and Rockets, **13**, 3, 137—143, 1976.
8. А. О. ВОЛЬМИР, *Устойчивость деформируемых систем*, Наука, Москва 1967.
9. M. ŻYCZKOWSKI, *Optimale Formen des dünnwandigen geschlossenen Querschnittes eines Balkens bei Stabilitätsbedingungen*, Z. angew. Math. Mech., **48**, 7, 455—462, 1968.
10. M. ŻYCZKOWSKI, J. KRUŻELECKI, *Optimal design of shells with respect to their stability*, IUTAM Symposium on Optimization in Structural Design, Warsaw 1973, ed. A. SAWCZUK and Z. MRÓZ, Springer, Berlin—Heidelberg—New York 229—247, 1975.

РЕЗЮМЕ

ОПТИМАЛЬНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА И ОСЕВОЙ СИЛЫ

В работе представлена проблема оптимального формирования цилиндрической оболочки, нагруженной изгибающим моментом M_b и осевой силой N . Как критерий оптимизации принято минимальное поле поверхности поперечного сечения оболочки при данных внешних нагрузках. В общем случае формирования, как решающие переменные, приняты форма срединной линии профиля и толщина стенки оболочки. Дополнительные условия оптимизации связаны с прочностью и локальной устойчивостью стенки конструкции. При применении концепции „оболочки равномерной устойчивости” искались два типа профилей равномерной устойчивости, именно профиль равномерной устойчивости с переменной толщиной и профиль равномерной устойчивости с постоянной толщиной стенки. Первая проблема сформулирована как задача классического вариационного исчисления, решение же второй проблемы выражается эллиптическими интегралами. Показан ряд оптимальных решений для разных комбинаций нагрузок.

SUMMARY

OPTIMAL DESIGN OF A CYLINDRICAL SHELL UNDER BENDING AND AXIAL FORCE

The problem of optimal design of a cylindrical shell loaded by bending moment M_b and axial force N is presented. As a criterion of optimality we assume the minimum value of the cross-sectional area for given values of external loading. In the general case the shape of the central line of the profile and thickness of the wall of a shell are used as design variables. The constraints are connected with the strength and with local stability of the wall of a shell. The concept of a "shell of uniform stability" is applied and two different types of profiles of uniform stability are looked for, namely the uniform stability profile with variable thickness and a constant thickness profile of uniform stability. The first problem is formulated as a classical problem of calculus of variations, whereas the solution of the second one is expressed in terms of elliptic integrals. Various optimal solution with respect to load combinations are presented.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 czerwca 1984 r.