

O PEWNEJ METODZIE ANALIZY DYSKRETNYCH UKŁADÓW MECHANICZNYCH WYMUSZANYCH OKRESOWYMI SIŁAMI IMPULSOWYMI

JÓZEF NIZIOŁ I RAFAŁ PALEJ (KRAKÓW)

Przedstawiona została metoda służąca wyznaczaniu wektora stanu początkowego, zapewniającego okresowość ruchu układów impulsowych o skończonej liczbie stopni swobody. Idea tej metody polega na przejściu z rozwiązania fourierowskiego na rozwiązanie w formie zamkniętej, omijając w ten sposób rozwiązywanie układu równań otrzymanych z warunków zszycia. Wyprowadzone zostały wzory na wektor stanu początkowego dla układów nietłumionych i tłumionych oraz wzory określające sumy szeregów wyznaczających poszukiwane warunki początkowe. Wskazano również na możliwość wykorzystania tej metody w sposób przybliżony w przypadku, gdy nie znane są pierwiastki równania charakterystycznego. Jako przykład przeanalizowany został układ o dwóch stopniach swobody wymuszany jednostronnymi impulsami chwilowymi.

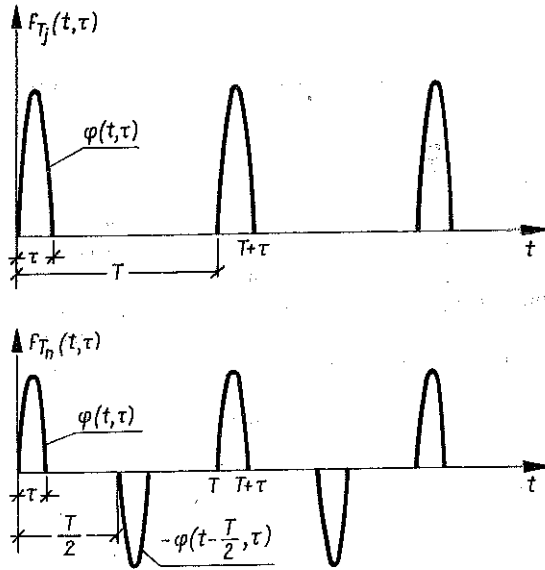
1. WSTĘP

Podczas analizy stanów ustalonych impulsowych układów mechanicznych o większej liczbie stopni swobody napotyka się z reguły na duże trudności natury rachunkowej, powodujące konieczność odwołania się do obliczeń numerycznych, co nie daje pełnego wglądu w analizowane zagadnienie. Istotne przy analizie tego typu układów jest wyznaczenie warunków początkowych zapewniających okresowość ruchu. Znajomość tych warunków w postaci analitycznych związków uzależniających je od własności układu i wymuszenia jest cenna, gdyż dostarcza informacji odnośnie możliwych rezonansów w układzie jak i amplitudalnych wartości przemieszczeń czy prędkości ciał. Poniżej przedstawiona zostanie koncepcja oraz odpowiednie wzory służące do wyznaczania poszukiwanych warunków początkowych zapewniających ruch okresowy dyskretnego układu liniowego o skończonej liczbie stopni swobody.

2. OKREŚLENIE SIŁ IMPULSOWYCH T -OKRESOWYCH

Do najczęściej występujących sił impulsowych można zaliczyć siły impulsowe jednostronne $f_{T_j}(t, \tau)$ oraz naprzemienne $f_{T_n}(t, \tau)$ przedstawione ogólnie na rys. 1.

Powtarzające się impulsy o skończonym czasie trwania scharakteryzowane będą w zupełności następującymi parametrami: czasem trwania impulsu τ okresem powtarzalności T , funkcją opisującą kształt siły impulsowej $\varphi(t, \tau)$ oraz popędem siły impulsowej $S = \int_0^{\tau} \varphi(t, \tau) dt$.



Rys. 1

Okresowe siły impulsowe o skończonym czasie trwania można przedstawić, wykorzystując funkcję Heaviside'a, w następujący sposób:

$$(2.1) \quad f_{T_j}(t, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(t-nT, \tau) [H(t-nT) - H(t-nT-\tau)],$$

$$(2.2) \quad f_{T_n}(t, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varphi(t-nT, \tau) [H(t-nT) - H(t-nT-\tau)] - \right. \\ \left. - \varphi\left(t-nT-\frac{T}{2}, \tau\right) \left[H\left(t-nT-\frac{T}{2}\right) - H\left(t-nT-\frac{T}{2}-\tau\right) \right] \right\}$$

Często poddaje się analizie układy wymuszone okresowymi impulsami chwilowymi, scharakteryzowanymi jedynie wartością popędu S oraz okresem powtarzalności T . Impulsy te dadzą się przedstawić przy użyciu δ -Diraca w postaci

$$(2.3) \quad f_{T_j}(t) = S \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT),$$

$$(2.4) \quad f_{T_n}(t) = S \sum_{n=0}^{\infty} \left[\delta(t-nT) - \delta\left(t-nT - \frac{T}{2}\right) \right].$$

3. METODY ANALITYCZNE ZNAJADOWANIA ROZWIĄZAŃ T -OKRESOWYCH

Rozważać będziemy układ o s stopniach swobody, którego równanie różniczkowe da się napisać następująco:

$$(3.1) \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}_T,$$

gdzie \mathbf{M} oznacza macierz bezwładności, \mathbf{D} macierz tłumienia wiskotycznego, \mathbf{K} macierz sztywności, \mathbf{x} wektor współrzędnych fizycznych oraz \mathbf{F}_T wektor wymuszeń zawierający okresowe siły impulsowe.

Interesować nas będzie stan ustalony układu opisany okresowym rozwiązaniem równania (3.1) o okresie T .

Przy określaniu drgań ustalonych istotna jest znajomość wektora stanu początkowego

$$(3.2) \quad \mathbf{U}_T(0) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_T(0) \\ \mathbf{x}_T(0) \end{bmatrix},$$

zapewniającego okresowość ruchu. Wektor ten można wyznaczyć z warunków zszycia, które będą uzależnione od sposobu wymuszenia. W przypadku wymuszenia impulsami jednostronnymi i naprzemiennymi warunkami te będą miały odpowiednio postać

$$(3.3) \quad \mathbf{U}(T) = \mathbf{U}(0),$$

$$(3.4) \quad \mathbf{U}\left(\frac{T}{2}\right) = -\mathbf{U}(0),$$

gdzie $\mathbf{U}(t)$ oznacza wektor rozwiązań będący całką ogólną równania (3.1) przy dowolnych warunkach początkowych.

W literaturze można spotkać różne metody otrzymywania rozwiązania równania (3.1), z których najbardziej rozpowszechnionymi są następujące metody: metoda przewidywania rozwiązań, metoda oparta na analizie harmoniczej, metody oparte na transformacjach całkowych, metoda impulso-

wej funkcji przejścia oraz metoda oparta na analizie modalnej. Przytoczone tutaj metody są metodami ścisłymi.

Metodę opartą na analizie modalnej można potraktować jako metodę pośrednią, sprowadzającą układ (3.1) do współrzędnych normalnych. W kolejnym kroku rozwiązania może być użyta jedna z pozostałych metod w celu określenia całki ogólnej, oddzielnie dla każdej ze współrzędnych normalnych.

Różnice pomiędzy poszczególnymi metodami polegają na innym narzędziu matematycznym, sposobie zapisu całki ogólnej równania (3.1) oraz konieczności bądź nie korzystania z warunków zszycia (3.3) lub (3.4).

Jedyną metodą, unikającą rozwiązywania układów równań wynikających z warunków zszycia, jest metoda analizy harmonicznej. Opiera się ona na rozwinięciu wymuszenia w szereg Fouriera otrzymując na drodze przewidywania całkę szczególną równania (3.1) opisującą drgania ustalone układu. Otrzymane rozwiązanie określone jest za pomocą nieskończonych szeregów, co powoduje, że jest mało przydatne ze względu na swój zapis.

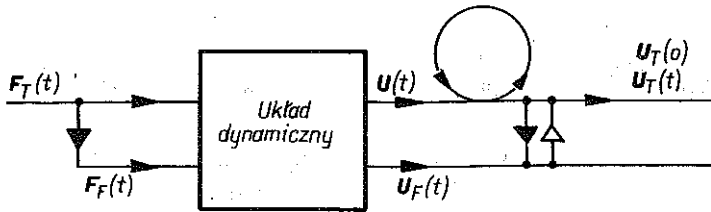
4. ZMODYFIKOWANA METODA ZSZYCIA

4.1. Rozważania ogólne

Koncepcja zmodyfikowanej metody zszycia oparta jest na równoczesnym wykorzystaniu dwóch metod, z których jedna jest metodą opartą na analizie harmonicznej, druga zaś — dowolną inną dającą rozwiązanie skończone. Podejście takie eliminuje zupełnie rozwiązanie układu $2s$ równań (warunków zszycia) oraz unika niedogodności, jaką jest fourierowska postać rozwiązania. Dostarcza bowiem gotowy wektor stanu początkowego do rozwiązania $U(t)$ dając w efekcie skończoną postać rozwiązania okresowego $U_T(t)$.

Idea metody zmodyfikowanej zilustrowana jest schematycznie na rys. 2. Tor górny ilustruje sposób otrzymywania okresowego rozwiązania skończonego $U_T(t)$ za pomocą jednej z wcześniej wspomnianych metod.

Operacja zszycia oznaczona pętlą wyznacza wektor $U_T(0)$, a tym samym okresowe rozwiązanie skończone wyjściowego układu równań, opisujące drgania ustalone układu. Tor dolny obrazuje sposób otrzymywania okresowego rozwiązania w postaci szeregu Fouriera. Elementami wektora $F_F(t)$ są szeregi Fouriera elementów wektora wymuszeń $F_T(t)$. Równoważność sygnałów wejściowych $F_T(t)$ i $F_F(t)$ powoduje, że równoważne są wyjścia $U_T(t)$ i $U_F(t)$. Inaczej mówiąc $U_F(t)$ jest szeregiem Fouriera rozwiązania skończonego $U_T(t)$, co zaznaczone zostało na schemacie strzałką pełną.



Rys. 2

Wobec powyższego, prawdziwy będzie zapis

$$(4.1) \quad U_T(t) = U_F(t).$$

Równość ta zachodzi oczywiście dla wszystkich wartości $t \geq 0$, a w szczególności dla $t_k = kT$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). W punktach tych $U_F(t_k)$ określa wektor stanu początkowego każdego cyklu, tzn.

$$(4.2) \quad U_F(t_k) = U_T(0).$$

W przeciwieństwie więc do klasycznych warunków zszywających rozwiązanie w dwóch różnych punktach czasowych, metoda zmodyfikowana określa wprost wektor stanu początkowego na podstawie przejścia z rozwiązania fourierowskiego na rozwiązanie w formie zamkniętej, co zaznaczono na schemacie strzałką pustą.

W celu efektywnego wykorzystania rozwiązania $U_F(t)$, będącego zbiorem szeregów Fouriera, należy określić ogólną jego postać oraz sposób znajdowania wartości sum nieskończonych szeregów występujących w $U_F(t_k)$.

Rozwijając wektor wymuszenia w szereg Fouriera otrzymamy

$$(4.3) \quad F_T(t) = c + \sum_{n=1}^{\infty} (a \cos nvt + b \sin nvt) = F_F(t),$$

gdzie $v = 2\pi/T$ oraz a, b, c oznaczają wektory, których elementami są współczynniki Fouriera stojące odpowiednio przy cosinusach, sinusach i wyrazach wolnych.

Poszukując całki szczególnej równania (3.1) w postaci

$$(4.4) \quad x_F(t) = C + \sum_{n=1}^{\infty} (A \cos nvt + B \sin nvt),$$

otrzymamy następujący układ równań:

$$(4.5) \quad K \cdot C = c,$$

$$(4.6) \quad \begin{bmatrix} K - n^2 v^2 M, & nvD \\ -Dnv, & K - n^2 v^2 M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Równanie (4.5) nie jest sprzężone z następnym i stanowi s równań

algebraicznych na elementy wektora C . Równanie (4.6) stanowi układ $2s$ równań na elementy wektorów A i B . W przypadku braku tłumienia w układzie równanie to rozpada się na dwa układy określające oddzielnie elementy wektorów A i B .

Można wykazać [4], że wyznacznik główny układu (4.6) jest wielomianem parzystym stopnia $4s$, posiadającym $4s$ pierwiastków określonych wzorami następującymi:

$$(4.7) \quad n_{i,1,2} = \frac{1}{v} (\alpha_i j \mp \beta_i), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad j = \sqrt{-1},$$

$$n_{i,3,4} = \frac{1}{v} (-\alpha_i j \pm \beta_i),$$

gdzie α_i, β_i oznaczają części rzeczywiste i urojone pierwiastków równania charakterystycznego, odpowiadającego jednorodnemu równaniu (3.1).

Wyznacznik ten ma następującą postać:

$$(4.8) \quad \det \begin{bmatrix} \mathbf{K} - n^2 v^2 \mathbf{M}, & nv\mathbf{D} \\ -nv\mathbf{D}, & \mathbf{K} - n^2 v^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} = p_{2s} \prod_{i=1}^s \left[n^4 - 2 \frac{\beta_i^2 - \alpha_i^2}{v^2} n^2 + \frac{(\alpha_i^2 + \beta_i^2)^2}{v^4} \right] = p_{2s} \prod_{i=1}^s (n^2 - n_{i,1,3}^2) (n^2 - n_{i,2,4}^2) = \sum_{i=0}^{2s} p_i n^{2i}$$

Jeśli przyjąć, że funkcje okresowe tworzące wektor wymuszeń $F_T(t)$ spełniają warunki Dirichleta, to elementy wektora wyrazów wolnych w równaniu (4.6) będą co najwyżej rzędu $1/n$. Można również dowieść, że w przypadku tym dowolny element wektorów A i B da się przedstawić jako iloraz dwóch wielomianów odpowiednio stopnia $4s-3$ i $4s$.

Przyjmując oznaczenia

$$(4.9) \quad \mathbf{A} = \frac{1}{M(n^2)} \mathbf{L}(n),$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{M(n^2)} \mathbf{N}(n),$$

gdzie $M(n^2)$ oznacza wyznacznik główny układu (4.6) określony wzorem (4.8) oraz $\mathbf{L}(n)$, $\mathbf{N}(n)$ oznaczają wektory, których elementami są wielomiany co najwyżej stopnia $4s-3$, rozwiązanie (4.4) zapiszemy w następującej postaci:

$$(4.10) \quad \mathbf{x}_F(t) = \mathbf{C} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{L}(n) \cos nvt + \mathbf{N}(n) \sin nvt}{M(n^2)}$$

Różniczkując tę funkcję jednokrotnie względem czasu, otrzymamy

$$(4.11) \quad \dot{x}_F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nv [-L(n) \sin nvt + N(n) \cos nvt]}{M(n^2)}$$

Wstawiając (4.10) i (4.11) do (4.2), otrzymamy

$$(4.12) \quad U_T(0) = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nvN(n)}{M(n^2)} \\ C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{M(n^2)} \end{bmatrix}$$

Powyższy wzór stanowi ogólną postać wzoru służącego do wyznaczania wektora stanu początkowego za pomocą nieskończonych szeregów, otrzymanych z rozwiązania fourierowskiego dla przypadku wymuszenia siłami impulsowymi o skończonym czasie trwania. Analityczne określenie sum występujących we wzorze (4.12) może być uciążliwe i stanowić będzie odrębny problem dla rozpatrywanego typu wymuszenia. W pewnym szczególnym przypadku wymuszenia można podać ogólne wzory na sumy omawianych szeregów. Przypadkiem tym, mającym duże znaczenie w zastosowaniach, jest wymuszenie okresowe w postaci ciągu impulsów chwilowych (2.3) lub (2.4).

Funkcje okresowe opisujące ciąg impulsów chwilowych jednostronnych lub naprzemiennych nie spełniają warunków Dirichleta. Korzystając ze wzorów na współczynniki Fouriera, otrzymamy następujące rozwinięcia trygonometryczne okresowych sił impulsowych, zbieżne do nich w sensie dystrybucyjnym [3]:

$$(4.13) \quad f_{T_1}(t) = S \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT) = \frac{S}{T} (1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos nvt), \quad v = \frac{2\pi}{T},$$

$$(4.14) \quad f_{T_n}(t) = S \sum_{n=0}^{\infty} \left[\delta(t-nT) - \delta\left(t-nT - \frac{T}{2}\right) \right] = \\ = \frac{2S}{T} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n] \cos nvt.$$

Przydatność powyższych rozwinięć wynika z faktu, że odpowiedź układu (wektor rozwiązań $U_F(t)$) jest już zbieżna w zwykłym sensie do wektora rozwiązania skończonego $U_T(t)$.

W obu rozwinięciach (4.13) i (4.14) niezerowe współczynniki Fouriera nie zależą od wskaźnika n oraz oba ciągi dystrybucji opisane są tylko za pomocą cosinusów z czego wynika, że

$$(4.15) \quad \mathbf{b} = [0].$$

Powyższe własności pozwalają na analityczne określenie sum szeregów występujących w (4.12).

Należy zwrócić uwagę na fakt, że podczas wymuszenia impulsami chwilowymi wartości elementów wektora $\dot{x}_T(0)$ tworzącego wektor stanu początkowego $U_T(0)$ są, w przypadku współrzędnych, w których przyłożone są siły impulsowe, średnimi arytmetycznymi granic lewo i prawostronnych. Wynika to stąd, że pod wpływem siły impulsowej przyłożonej do i -tej masy skupionej, prędkość tejże masy zmienia się skokowo o wartość S_i/m_i , co powoduje pojawienie się punktu nieciągłości pierwszego rodzaju w jej przebiegu czasowym. A zatem dla i -tej współrzędnej, gdzie działa siła impulsowa o popędzie S_i , mamy

$$(4.16) \quad x_{i_T}(0) = \frac{1}{2} [\dot{x}_{i_T}(0^-) + \dot{x}_{i_T}(0^+)].$$

Efekt działania tej siły przedstawimy za pomocą wzoru

$$(4.17) \quad x_{i_T}(0^+) = x_{i_T}(0^-) + \frac{S_i}{m_i}.$$

Ponieważ omawiana metoda określa bezpośrednio $\dot{x}_{i_T}(0)$ (wartość średnią prędkości), stąd na podstawie (4.16) i (4.17) można wyznaczyć:

$$(4.18) \quad \dot{x}_{i_T}(0^-) = \dot{x}_{i_T}(0) - \frac{S_i}{2m_i}.$$

Wprowadzając wektor skoków prędkości V , którego elementy określone będą związkami

$$(4.19) \quad V_i = \frac{S_i}{m_i},$$

możemy napisać

$$(4.20) \quad \dot{x}_T(0^-) = \dot{x}_T(0) - \frac{1}{2} V.$$

Wzór ten określa prędkości tuż przed zadziałaniem sił impulsowych.

Wektor stanu początkowego (4.12) rozumiany teraz jako wektor określający stan układu tuż przed impulsem sił chwilowych ($t = 0^-$), będzie miał postać

$$(4.21) \quad U_T(0^-) = \left[\begin{array}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nvN(n)}{M(n^2)} - \frac{1}{2} V \\ C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{M(n^2)} \end{array} \right]$$

Wektor opisujący stan układu tuż po wystąpieniu sił chwilowych łatwo

wyznaczyć za pomocą wektorów $U_T(0^-)$ i V :

$$(4.22) \quad U_T(0^+) = U_T(0^-) + \begin{bmatrix} V \\ [0] \end{bmatrix} = U_T(0) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} V \\ [0] \end{bmatrix}.$$

Po ustaleniu budowy wzoru określającego wektor stanu początkowego przy wymuszeniu impulsami chwilowymi przejdziemy do wyprowadzenia wzorów na sumy szeregów występujących w (4.21).

4.2. Wyznaczanie wektora stanu początkowego dla układów nietłumionych

Przyjmując $D = [0]$ i uwzględniając (4.15), równanie (4.6) rozdzielimy na dwa niezależne równania:

$$(4.23) \quad [K - n^2 v^2 M] A = a,$$

$$(4.24) \quad [K - n^2 v^2 M] B = [0].$$

Wyznacznik główny obu układów wyrażać się będzie [4] wzorem

$$(4.25) \quad \det [K - n^2 v^2 M] = p_s \prod_{i=1}^s \left(n^2 - \frac{\omega_i^2}{v^2} \right) = \sum_{i=0}^s p_i n^{2i},$$

gdzie ω_i oznacza częstotści własne układu.

Ze wzoru (4.25) wynika, że dla układów nietłumionych wyznacznik główny układów (4.23) i (4.24) jest wielomianem parzystym stopnia $2s$ ze względu na n .

W przypadku, gdy $nv \neq \omega_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$) jednorodny układ (4.24) prowadzi do rozwiązania trywialnego na elementy wektora B , podczas gdy układ (4.23) będzie miał niezerowe rozwiązania na elementy wektora A .

Przypadek $nv = \omega_i$ odpowiada zjawisku rezonansu, kiedy to n -ta harmoniczna pokrywa się z i -tą częstotścią własną układu. Rozważania dotychczasowe nie dotyczą tego przypadku, ponieważ przewidywana postać rozwiązania (4.4) byłaby wtedy nieodpowiednia. Rozwiązanie w rezonansie można znaleźć stosunkowo łatwo przy zastosowaniu metody modalnej, lecz wiadomo, iż nie będzie ono już funkcją okresową, a zatem nie będziemy się tym przypadkiem zajmować.

Ze względu na stałość elementów wektora a można pokazać, że dowolny element wektora A wyrażać się będzie za pomocą funkcji wymiernej, będącej ilorazem wielomianów parzystych przy czym stopień licznika będzie niższy od stopnia mianownika co najmniej o dwa. Tak więc w przypadku wymuszenia impulsami jednostronnymi dowolny element wektora A wyrażać

się będzie wzorem

$$(4.26) \quad A_k = \frac{\sum_{j=0}^{s-1} q_j^{(k)} n^{2j}}{\sum_{j=0}^s p_j n^{2j}}$$

W przypadku zaś wymuszenia impulsami naprzemiennymi

$$(4.27) \quad A_k = \frac{[1 - (-1)^k] \sum_{j=0}^{s-1} q_j^{(k)} n^{2j}}{\sum_{j=0}^s p_j n^{2j}}$$

Zerowanie się wektora \mathbf{B} powoduje zerowanie się wektora wartości średnich prędkości początkowych $\dot{\mathbf{x}}_T(0)$ wobec czego wektor stanu początkowego ma postać

$$(4.28) \quad \mathbf{U}_T(0^-) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \mathbf{V} \\ \mathbf{C} + \sum \frac{\mathbf{L}(n^2)}{M(n^2)} \end{bmatrix}$$

Zajmiemy się obecnie określeniem sumy szeregu odpowiadającego wymuszaniu impulsami jednostronnymi o ogólnej postaci

$$(4.29) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n^2)}{M(n^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{s-1} q_j n^{2j}}{\sum_{j=0}^s p_j n^{2j}} = \frac{1}{p_s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{s-1} q_j n^{2j}}{\prod_{k=1}^s (n^2 - \tilde{\omega}_k^2)}$$

gdzie bezwymiarowe częstotliwości własne układu $\tilde{\omega}_k = \omega_k/v$, $k = 1, 2, \dots, s$.

Rozkładając iloraz wielomianów (4.29) na ułamki proste skorzystamy ze wzoru na współczynniki rozkładu [2] w postaci

$$(4.30) \quad d_i = \frac{L(\tilde{\omega}_i^2)}{M'(\tilde{\omega}_i^2)},$$

gdzie

$$(4.31) \quad M'(\tilde{\omega}_i^2) = \left. \frac{dM}{dn^2} \right|_{n^2 = \tilde{\omega}_i^2} = p_s \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^s (\tilde{\omega}_i^2 - \tilde{\omega}_k^2).$$

Tak więc

$$(4.32) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n^2)}{M(n^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^s \frac{d_i}{n^2 - \tilde{\omega}_i^2} =$$

$$= \frac{1}{p_s} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^s \frac{\sum_{j=0}^{s-1} q_j \tilde{\omega}_i^{2j}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^s (\tilde{\omega}_i^2 - \tilde{\omega}_k^2)} \cdot \frac{1}{n^2 - \tilde{\omega}_i^2}.$$

Zmieniając kolejność sumowania oraz korzystając z rozwinięcia funkcji $\text{ctg } \pi x$ na ułamki proste [1 i 5] w postaci

$$(4.33) \quad \text{ctg } \pi x = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \right),$$

otrzymamy

$$(4.34) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n^2)}{M(n^2)} = -\frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^s \frac{L(\tilde{\omega}_i^2)}{M'(\tilde{\omega}_i^2)} \frac{\text{ctg } \pi \tilde{\omega}_i}{\tilde{\omega}_i} +$$

$$+ \frac{1}{2p_s} \sum_{i=1}^s \frac{\sum_{j=0}^{s-1} q_j \tilde{\omega}_i^{2j}}{\tilde{\omega}_i^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^s (\tilde{\omega}_i^2 - \tilde{\omega}_k^2)}.$$

Wydzielając w drugim składniku część odpowiadającą zerowej wartości wskaźnika j , dostaniemy

$$(4.35) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n^2)}{M(n^2)} = -\frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^s \frac{L(\tilde{\omega}_i^2)}{M'(\tilde{\omega}_i^2)} \frac{\text{ctg } \pi \tilde{\omega}_i}{\tilde{\omega}_i} + \frac{q_0}{2p_s} \sum_{i=1}^s \frac{1}{\tilde{\omega}_i^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^s (\tilde{\omega}_i^2 - \tilde{\omega}_k^2)}$$

$$+ \frac{1}{2p_s} \sum_{i=1}^s \frac{\sum_{j=1}^{s-1} q_j \tilde{\omega}_i^{2j-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^s (\tilde{\omega}_i^2 - \tilde{\omega}_k^2)}.$$

Dwa ostatnie wyrazy we wzorze (4.35) mają pewne własności pozwalające znacznie uprościć budowę tego wzoru. Można bowiem wykazać [4], że

$$(4.36) \quad \sum_{i=1}^s \frac{1}{\tilde{\omega}_i^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^s (\tilde{\omega}_i^2 - \tilde{\omega}_k^2)} = (-1)^{s+1} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^s \tilde{\omega}_i^2}, \quad s = 2, 3, \dots$$

Ponadto zmieniając kolejność sumowania w trzecim wyrażeniu, otrzymamy związek

$$(4.37) \quad \frac{1}{2p_s} \sum_{i=1}^s \frac{\sum_{j=1}^{s-1} q_j \tilde{\omega}_i^{2j-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^s (\tilde{\omega}_i^2 - \tilde{\omega}_k^2)} = \frac{1}{2p_s} \sum_{j=1}^{s-1} q_j \sum_{i=1}^s \frac{\tilde{\omega}_i^{2j-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^s (\tilde{\omega}_i^2 - \tilde{\omega}_k^2)},$$

który, jak się okazuje, zeruje się dla każdego $s \geq 2$ przy dowolnych współczynnikach q_j .

Wykorzystując własności (4.36) i (4.37), wzór (4.35) napiszemy ostatecznie w postaci

$$(4.38) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n^2)}{M(n^2)} = -\frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^s \frac{L(\tilde{\omega}_i^2)}{M'(\tilde{\omega}_i^2)} \frac{\operatorname{ctg} \pi \tilde{\omega}_i}{\tilde{\omega}_i} + \frac{q_0 (-1)^{s+1}}{2p_s \prod_{i=1}^s \tilde{\omega}_i^2},$$

gdzie

$$L(\tilde{\omega}_i^2) = \sum_{j=0}^{s-1} q_j \tilde{\omega}_i^{2j}, \quad \tilde{\omega}_i = \frac{\omega_i}{\nu},$$

$$M'(\tilde{\omega}_i^2) = p_s \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^s (\tilde{\omega}_i^2 - \tilde{\omega}_k^2),$$

Obecnie wyznaczamy sumę szeregu

$$(4.39) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n] \frac{L(n^2)}{M(n^2)} = \sum_{i=1}^s \frac{[1 - (-1)^n] \sum_{j=0}^{s-1} q_j n^{2j}}{\sum_{j=0}^s p_j n^{2j}},$$

odpowiadającego przypadkowi wymuszenia układu nietłumionego impulsami naprzemiennymi (4.14).

Postępując podobnie jak w przypadku impulsów jednostronnych rozbijemy (4.39) na dwie sumy oraz rozłożymy oba składniki na ułamki proste:

$$(4.40) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n] L(n^2)}{M(n^2)} = \sum_{i=1}^s d_i \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \tilde{\omega}_i^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - \tilde{\omega}_i^2} \right],$$

Korzystając z rozwinięcia (4.33) oraz z rozwinięcia funkcji $\operatorname{cosec} \pi x$ na ułamki proste [5]

$$(4.41) \quad \frac{1}{\sin \pi x} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2x}{n^2 - x^2} \right),$$

dostaniemy

$$(4.42) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n] \frac{L(n^2)}{M(n^2)} = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^s \frac{L(\tilde{\omega}_i^2)}{M(\tilde{\omega}_i^2)} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi \tilde{\omega}_i}{2}}{\tilde{\omega}_i}$$

Oznaczenia zawarte w tym wzorze są identyczne z wprowadzonymi poprzednio we wzorze (4.38).

Z obu wzorów określających sumy nieskończonych szeregów typu wymiernego łatwo odczytać warunki pojawienia się rezonansu w układzie wynikające z własności funkcji $\operatorname{ctg} \pi \tilde{\omega}_i$ i $\operatorname{tg}(\pi \tilde{\omega}_i/2)$. Tak więc w przypadku wymuszenia impulsami jednostronnymi rezonans pojawia się, gdy

$$(4.43) \quad T = kT_i, \quad k = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

gdzie i -ty okres drgań własnych $T_i = 2\pi/\omega_i$ oraz gdzie T oznacza okres wymuszenia; natomiast w przypadku wymuszenia impulsami naprzemiennymi

$$(4.44) \quad T = (2k+1)T_i, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

4.3. Wyznaczenie wektora stanu początkowego dla układów tłumionych

Analizując układ równań (4.6) przy uwzględnieniu stałych elementów wektora \mathbf{a} i zerowych wektora \mathbf{b} , można wykazać, że elementy wektorów \mathbf{A} i \mathbf{B} wyrażać się będą, w przypadku wymuszenia impulsami jednostronnymi, wzorami

$$(4.45) \quad A_k = \frac{1}{W_g} \sum_{j=0}^{2s-1} q_j^{(k)} n^{2j} = \frac{L_k(n^2)}{M(n^2)},$$

$$B_k = \frac{1}{W_g} \sum_{j=1,3,5}^{4s-3} q_j^{(k)} n^j = \frac{N_k(n)}{M(n^2)},$$

gdzie $M(n^2) = W_g$ oznacza wyznacznik główny układu (4.6) określony wzorem (4.8).

W przypadku wymuszenia impulsami naprzemiennymi elementy wektorów \mathbf{A} i \mathbf{B} określone będą następująco:

$$(4.46) \quad A_k = \frac{[1 - (-1)^n]}{W_g} \sum_{j=0}^{2s-1} q_j^{(k)} n^{2j} = \frac{[1 - (-1)^n] L_k(n^2)}{M(n^2)},$$

$$B_k = \frac{[1 - (-1)^n]}{W_g} \sum_{j=1,3,5}^{4s-3} q_j^{(k)} n^j = \frac{[1 - (-1)^n] N_k(n)}{M(n^2)}.$$

Jak widać z powyższych zapisów, L_k są wielomianami parzystymi, N_k zaś nieparzystymi.

We wzorze (4.21) określającym wektor stanu początkowego występuje suma, pod którą znajduje się iloczyn $nvN(n)$. Ze względu na nieparzystość $N(n)$ jest oczywiste, że iloczyn ten określa wektor zawierający wielomiany parzyste stopnia $4s-2$ ze względu na n . Ostatecznie więc, w celu efektywnego wyznaczenia wektora stanu początkowego, należy określić dla impulsów jednostronnych sumę szeregu:

$$(4.47) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n^2)}{M(n^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{2s-1} q_j n^{2j}}{\sum_{j=0}^{2s} p_j n^{2j}},$$

dla impulsów zaś naprzemiennych

$$(4.48) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n] L(n^2)}{M(n^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n] \sum_{j=0}^{2s-1} q_j n^{2j}}{\sum_{j=0}^{2s} p_j n^{2j}}.$$

Zajmiemy się obecnie wyznaczeniem sumy szeregu (4.47) odpowiadającego wymuszeniu impulsami jednostronnymi.

Korzystając ze wzoru (4.8) rozłożymy iloraz wielomianów występujących w (4.47) na sumę ułamków, których mianowniki są wielomianami parzystymi czwartego stopnia ze względu na n o współczynnikach rzeczywistych:

$$(4.49) \quad \frac{\sum_{j=0}^{2s-1} q_j n^{2j}}{\sum_{j=0}^{2s} p_j n^{2j}} = \frac{1}{p_{2s}} \sum_{i=1}^s \frac{v_i n^2 + w_i}{(n^2 - n_{i,3}^2)(n^2 - n_{i,4}^2)},$$

gdzie v_i i w_i oznaczają współczynniki rozkładu. Zmieniając kolejność sumowania w (4.47), dostaniemy

$$(4.50) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{2s-1} q_j n^{2j}}{\sum_{j=0}^{2s} p_j n^{2j}} = \frac{1}{p_{2s}} \sum_{i=1}^s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_i n^2 + w_i}{(n^2 - n_{i,3}^2)(n^2 - n_{i,4}^2)}.$$

Pozostaje więc do określenia suma szeregu typu

$$(4.51) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_i n^2 + w_i}{(n^2 - n_{i,3}^2)(n^2 - n_{i,4}^2)}.$$

Szereg ten rozbijemy na sumę ułamków prostych

$$(4.52) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_i n^2 + w_i}{(n^2 - n_{i_{1,3}}^2)(n^2 - n_{i_{2,4}}^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{E_i}{n^2 - n_{i_{1,3}}^2} + \frac{F_i}{n^2 - n_{i_{2,4}}^2} \right),$$

skąd dostaniemy

$$(4.53) \quad E_i = \frac{w_i + v_i n_{i_{1,3}}^2}{n_{i_{1,3}}^2 - n_{i_{2,4}}^2}, \quad F_i = -\frac{w_i + v_i n_{i_{2,4}}^2}{n_{i_{1,3}}^2 - n_{i_{2,4}}^2}.$$

Stosując rozwinięcie (4.33) poprawne również dla argumentu zespolonego [5], otrzymamy

$$(4.54) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{E_i}{n^2 - n_{i_{1,3}}^2} + \frac{F_i}{n^2 - n_{i_{2,4}}^2} \right) = \frac{\pi}{2(n_{i_{2,4}}^2 - n_{i_{1,3}}^2)} \times \\ \times \left[\frac{v_i n_{i_{1,3}}^2 + w_i}{n_{i_{1,3}}} \operatorname{ctg} \pi n_{i_{1,3}} - \frac{v_i n_{i_{2,4}}^2 + w_i}{n_{i_{2,4}}} \operatorname{ctg} \pi n_{i_{2,4}} + \right. \\ \left. + \frac{v_i n_{i_{2,4}}^2 + w_i}{\pi n_{i_{2,4}}^2} - \frac{v_i n_{i_{1,3}}^2 + w_i}{\pi n_{i_{1,3}}^2} \right].$$

Analizując wzory na pierwiastki n_{i_k} ($k = 1, 2, 3, 4$) określone wzorem (4.7), łatwo zauważyć, że $n_{i_1} = -n_{i_3}$ oraz $n_{i_2} = -n_{i_4}$.

Z budowy wzoru (4.54) wynika, że jest to funkcja parzysta ze względu na n_{i_k} , co powoduje, że istnieje dowolność w wyborze pierwiastków z par $n_{i_{1,3}}$ i $n_{i_{2,4}}$.

Wykorzystując związki (4.7) oraz tożsamość trygonometryczną w dziedzinie zmiennej zespolonej

$$(4.55) \quad \operatorname{ctg}(x \pm jy) = \frac{\sin 2x \mp j \operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}, \quad j = \sqrt{-1},$$

sumę szeregu (4.47) określić możemy przez następujący wzór:

$$(4.56) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{2s-1} q_j n^{2j}}{\sum_{j=0}^{2s} p_j n^{2j}} = \frac{1}{p_{2s}} \sum_{i=1}^s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_i n^2 + w_i}{(n^2 - n_{i_{1,3}}^2)(n^2 - n_{i_{2,4}}^2)} = \\ = \frac{1}{p_{2s}} \sum_{i=1}^s \left[-\frac{w_i}{2\gamma_i^2} + \frac{\pi}{2\gamma_i} \frac{\frac{w_i - v_i \gamma_i}{2 \frac{\beta_i}{v}} \sin \frac{2\pi\beta_i}{v} + \frac{w_i + v_i \gamma_j}{2 \frac{\alpha_i}{v}} \operatorname{sh} \frac{2\pi\alpha_i}{v}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi\alpha_i}{v} - \cos \frac{2\pi\beta_i}{v}} \right],$$

gdzie

$$\gamma_i = \frac{\alpha_i^2 + \beta_i^2}{v^2}$$

Postępując podobnie dla przypadku wymuszenia impulsami naprzemiennymi oraz wykorzystując dodatkowo rozkład (4.41), poprawny także dla argumentu zespolonego, otrzymamy następujące wyrażenie na sumę szeregu (4.48):

$$(4.57) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n] \sum_{j=0}^{2s-1} q_j n^{2j}}{\sum_{j=0}^{2s} p_j n^{2j}} = \frac{1}{p_{2s}} \sum_{i=1}^s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(v_i n^2 + w_i) [1 - (-1)^n]}{(n^2 - n_{i,3}^2)(n^2 - n_{i,4}^2)} =$$

$$= \frac{1}{p_{2s}} \sum_{i=1}^s \frac{\pi}{\gamma_i} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi \alpha_i}{v} - \cos \frac{\pi \beta_i}{v}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi \alpha_i}{v} - \cos \frac{2\pi \beta_i}{v}} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{w_i + v_i \gamma_i}{2 \frac{\beta_i}{v}} \sin \frac{\pi \beta_i}{v} + \\ & + \frac{w_i + v_i \gamma_i}{2 \frac{\alpha_i}{v}} \operatorname{sh} \frac{\pi \alpha_i}{v} \end{aligned} \right\}$$

5. PRZYKŁAD

W celu zilustrowania metody przeanalizowane zostanie zagadnienie drgań ustalonych układu nietłumionego o dwóch stopniach swobody, wymuszonego ciągiem impulsów jednostronnych. Schemat układu przedstawiony jest na rys. 3, gdzie zaznaczono jego parametry oraz osie współrzędnych.

Równanie (3.1) ma teraz postać

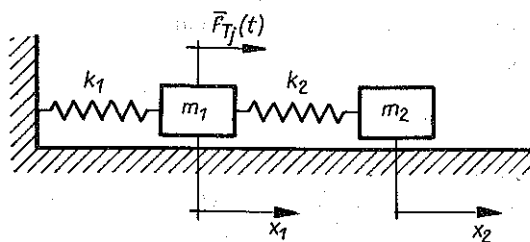
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}_T,$$

gdzie

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_T = \begin{bmatrix} f_{Tj}(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uwzględniając rozkład (4.13), mamy

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{2S}{T} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} S \\ T \\ 0 \end{bmatrix}$$



Rys. 3

Z równania (4.5) otrzymujemy

$$C = \begin{bmatrix} S \\ k_1 T \\ S \\ k_1 T \end{bmatrix}$$

Równanie (4.23) dostarcza nam następujących związków

$$\begin{aligned} \det [\mathbf{K} - n^2 \mathbf{v}^2 \mathbf{M}] &= n^4 v^4 m_1 m_2 - n^2 v^2 [m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)] + k_1 k_2 = \\ &= M(n^2) = \sum_{j=0}^2 p_j n^{2j}, \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{M(n^2)} L(n^2) = \frac{1}{M(n^2)} \begin{bmatrix} k_2 - n^2 v^2 m_2 \\ k_2 \end{bmatrix} \frac{2S}{T}$$

Wektor stanu początkowego określony jest wzorem (4.28), przy czym

$$V = \begin{bmatrix} S \\ m_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bezwymiarowe częstotliwości własne układu są następujące:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{1,2} &= \frac{1}{v} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \mp \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} - \frac{k_2}{m_2} \right)^2 + 4 \frac{k_2^2}{m_1 m_2}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\omega_{1,2}}{v} \end{aligned}$$

Wykorzystując otrzymane związki, znajdziemy za pomocą (4.38) sumy szeregów występujących w (4.28):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_1(n^2)}{M(n^2)} = \frac{2S}{T} \left\{ \frac{\pi}{2v} \cdot \frac{1}{m_1 m_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \left[(k_2 - \omega_1^2 m_2) \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi\omega_1}{v}}{\omega_1} - (k_2 - \omega_2^2 m_2) \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi\omega_2}{v}}{\omega_2} \right] - \frac{k_2}{2m_1 m_2 \omega_1^2 \omega_2^2} \right\},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_2(n^2)}{M(n^2)} = \frac{2S}{T} \left\{ \frac{\pi}{2v} \frac{k_2}{m_1 m_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \left(\frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi\omega_1}{v}}{\omega_1} - \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi\omega_2}{v}}{\omega_2} \right) - \frac{k_2}{2m_1 m_2 \omega_1^2 \omega_2^2} \right\}.$$

Uwzględniając dodatkowo związek $\omega_1^2 \omega_2^2 = k_1 k_2 / m_1 m_2$, otrzymamy następującą postać wektora stanu początkowego:

$$\mathbf{U}_r(0^-) = \begin{bmatrix} \frac{S}{2m_1} \\ 0 \\ \frac{S}{2m_1 m_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \left[(k_2 - \omega_1^2 m_2) \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi\omega_1}{v}}{\omega_1} - (k_2 - \omega_2^2 m_2) \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi\omega_2}{v}}{\omega_2} \right] \\ \frac{Sk_2}{2m_1 m_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \left[\frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi\omega_1}{v}}{\omega_1} - \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi\omega_2}{v}}{\omega_2} \right] \end{bmatrix}.$$

Wektor ten uwzględnia warunki początkowe zapewniające okresowość ruchu. Pod działaniem siły impulsowej wzrosnie tylko pochodna \dot{x}_{1T} o S/m_1 , tworząc z pozostałymi elementami wektor $\mathbf{U}_T(0^+)$. Drgania ustalone będą określone całką ogólną równania jednorodnego z warunkami początkowymi określonymi wektorem $\mathbf{U}_T(0^+)$.

Należy na koniec zaznaczyć, że wektor stanu początkowego wyznaczony został w zasadzie bez znajomości rozwiązania równania ruchu lecz na podstawie własności układu i wymuszenia.

6. WNIOSKI KOŃCOWE

Posługiwanie się metodą zmodyfikowaną przy wyznaczaniu wektora stanu początkowego zapewniającego okresowość ruchu jest efektywne i szybkie. Idea tej metody opiera się zasadniczo na zagadnieniu znajdowania sum nieskończonych szeregów określających elementy tego wektora. Wyprowadzenie ogólnych wzorów powoduje, że metoda ta jest skutecznym narzędziem analizy drgań układów impulsowych, szczególnie zaś w przypadku większej liczby stopni swobody.

Zaletą tej metody jest również możliwość wyznaczania wektora stanu początkowego w sposób przybliżony w przypadku, gdy nie znamy wartości pierwiastków równania charakterystycznego. Potrzebna jest wtedy znajomość budowy szeregów, których sumy można oszacować na drodze numerycznej. W obliczeniach numerycznych ogranicza się szeregi do skończonej liczby wyrazów, zwracając uwagę by objęty był obszar wyznaczony przez bezwymiarowe częstości własne układu. Struktura szeregów, charakteryzująca się tym, że stopień licznika jest co najmniej o dwa mniejszy od stopnia mianownika co powoduje, że szereg ten jest zbieżny, a suma szeregu skończonego dobrze przybliża wartość ścisłą.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Я. С. ГРАДШТЕЙН, Я. М. РЫЖИК, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений*, Наука, Москва 1971.
2. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT Warszawa 1981.
3. J. OSIOWSKI, *Elementy teorii dystrybucji*, w: *Elementy nowoczesnej matematyki dla inżynierów*, red. H. STEINHAUS, PWN Warszawa-Wrocław 1971.
4. R. PALEJ, *Drgania nieliniowe układów mechanicznych poddanych działaniu okresowych sił impulsowych*, Praca Doktorska, Kraków 1983.
5. W. J. SMIRNOW, *Matematyka wyższa*, T. 2, 3, PWN Warszawa 1966.

РЕЗЮМЕ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ АНАЛИЗА ДИСКРЕТНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПОДВЕРГНУТЫХ ДЕЙСТВИЮ КРАТКОВРЕМЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ

В работе представлен метод служащий определению вектора начального состояния системы, обеспечивающего периодическое движение импульсных систем с конечным числом степеней свободы. Этот метод заключается в переходе из решения Фурье в решение в замкнутой форме, избегая трудностей связанных с решением системы уравнений, полученных из условий сшития решений. В работе определены выражения описывающие вектор начального состояния системы для незатухающих и затухающих систем, а также формулы изображающие суммы рядов определяющих искомые начальные

условия. Указана тоже возможность использования этого метода в качестве приближенного метода в случае, когда неизвестны корни характеристического уравнения. Метод иллюстрируется системой с двумя степенями свободы, подвергнутой воздействию мгновенных импульсов.

SUMMARY

ON A METHOD OF ANALYSIS OF DISCRETE MECHANICAL SYSTEMS SUBJECTED TO PERIODIC PULSE LOADS

The method is used to determine the initial state vector which secures the periodicity of motion of pulse systems of a finite number of degrees of freedom. The method consists in passing from a Fourier solution to a closed-form solution what makes it possible to avoid the necessity of satisfying the continuity conditions. Formulae are derived for the initial state vector of damped and undamped systems and for the sums of infinite series determining the initial conditions. The method may also be applied to approximate analysis when the roots of the characteristic equations are unknown. As an example a system with two degrees of freedom excited by unilateral instantaneous pulses is presented.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 czerwca 1984 r.