

## DRGANIA PŁYTY O ŚREDNIEJ GRUBOŚCI POD OBCIĄŻENIEM RUCHOMYM

WACŁAW SZCZEŚNIAK (WARSZAWA)

W pracy analizowano zagadnienie dynamiczne płyty o średniej grubości. Ruchome obciążenie przesuwa się ze stałą prędkością. Problem doprowadzono do dwu równań różniczkowych, które rozwiązywano metodą analityczną. Wyznaczono również trzy częstotliwości drgań swobodnych i trzy prędkości krytyczne obciążenia. Rozwiązanie zilustrowano dynamicznymi liniami wpływu dla ugięcia i momentu zginającego wykorzystując w tym celu odpowiedni program na minicomputer Oric-1.

### 1. WSTĘP

Drgania płyty o średniej grubości wymuszone przesuującym się obciążeniem stały się w ostatnich latach przedmiotem badań wielu autorów w różnych ośrodkach naukowych. Opierając się na założeniach teorii MINDLINA [1 i 2] JAHANSHAHI i MONZEL [3] podali rozwiązanie dla pasma płytowego podpartego przegubowo wzdłuż linii bocznych ADLER i REISMANN [4] i [5] stosując tą samą teorię — przy dowolnym obciążeniu prostopadłym do osi pasma i przesuującym się wzdłuż podłużnej osi pasma — rozwiązali problem przy użyciu nieskończonej całki Fouriera. Dodatkowo w pracy [5] uwzględniono wpływ dużej siły osiowej ściskającej. Ostatnio SHIRAKAWA [6], przyjmując równania wyjściowe teorii AMBARCUMIANA [8], podał rozwiązanie dla płyty prostokątnej przegubowo podpartej. W rozwiązaniu [6] stosuje się skończoną transformację Fouriera, otrzymując równanie różniczkowe szóstego rzędu na nieznaną funkcję ruchu. Inną drogę rozwiązania przyjmuje ten sam Autor w pracy [7]. Na płytę średniej grubości działa dodatkowo obciążenie ściskające w płaszczyźnie płyty. Układ równań teorii Ambarcumiana sprowadzono do dwu równań różniczkowych odpowiednio czwartego i drugiego rzędu. Rozwiązanie w postaci podwójnego szeregu Fouriera podane jest dla przypadku prędkości obciążenia mniejszych jak i równych prędkości krytycznej. Obie pozycje Shirakawy są ilustrowane licznymi dynamicznymi liniami wpływu przemieszczeń i sił wewnętrznych.

W niniejszej pracy podamy rozwiązanie dla prostokątnej płyty, jednorodnej i izotropowej stosując teorię [9] modyfikując ją jednak przez wykorzystanie pracy [8]. Obciążenie tylko pionowe w postaci siły skupionej (bez masy) przesuwa się ze stałą prędkością. Wielkość siły skupionej jest ustalona. Wprowadzając trzy nieznane funkcje  $w$ ,  $\chi_x$ ,  $\chi_y$ , w wyniku założenia  $u_z = w$ , otrzymano dynamiczny układ równań różniczkowych cząstkowych zbliżony do teorii Ambarcumiana. Funkcje  $\chi_x$ ,  $\chi_y$ , określają siły poprzeczne na powierzchni płyty. Naprężenia styczne możemy określić zakładając ich paraboliczny rozkład na grubości płyty

$$(1.1) \quad \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{Bmatrix}.$$

Odpowiednie jednostkowe odkształcenia postaciowe wyrazimy wzorami

$$(1.2) \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{G} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{Bmatrix}.$$

W pracy uwzględniamy wpływ naprężenia  $\sigma_z$ . Zakładamy, że obciążenie znajduje się na górnej powierzchni płyty. Naprężenia  $\sigma_z$  są takie same jak w klasycznej teorii płyt cienkich Kirchhoffa-Love'a:

$$(1.3) \quad \sigma_z = -\frac{q}{2} \left( 1 - 3\frac{z}{h} + 4\frac{z^3}{h^3} \right).$$

Wykorzystując trzecie równanie dynamicznej teorii sprężystości

$$(1.4) \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},$$

otrzymamy w wyniku podstawienia (1.1) i (1.4) i po scałkowaniu na obszarze grubości płyty

$$(1.5) \quad D \left( \frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \frac{\partial \chi_y}{\partial y} \right) + \rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = q(x, y, t).$$

Równania fizyczne liniowej teorii sprężystości zapiszemy w postaci mieszanej

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \varepsilon_z &= \sigma_z \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} - \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y), \\ \sigma_x &= \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z + \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \end{aligned}$$

$$\sigma_y = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z + \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x).$$

Założenie Ambarcumiana odnośnie do przemieszczeń  $u_z$  i  $w$  jest następujące:

$$(1.7) \quad u_z = w, \quad \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Kąty odkształcenia postaciowego wyznaczone z zależności geometrycznych są następujące:

$$(1.8) \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Po porównaniu (1.2) i (1.8) oraz wykorzystaniu (1.7) otrzymamy

$$(1.9) \quad \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} + \frac{1}{1-\nu} \left( \frac{z^3}{3} - \frac{zh^2}{4} \right) \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{Bmatrix}.$$

Równania (1.9) można napisać inaczej:

$$(1.10) \quad \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} + \psi_{(z)} \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{Bmatrix},$$

gdzie

$$\psi_{(z)} = \frac{1}{1-\nu} \left( \frac{z^3}{3} - \frac{zh^2}{4} \right).$$

Z równań (1.9) wynika, że przemieszczenia  $u_x$  i  $u_y$  są funkcjami  $x, y, z$  i zmieniają się nieliniowo wzdłuż grubości płyty. Wykorzystując (1.10) podstawowe składowe naprężeń wyrazimy wzorami

$$(1.11) \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ -z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{bmatrix} + \psi_{(z)} \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \chi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \chi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \chi_x}{\partial x} \end{bmatrix} \right\} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z,$$

$$(1.11) \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \psi_{(z)} \left( \frac{\partial \chi_x}{\partial y} + \frac{\partial \chi_y}{\partial x} \right) \right]$$

[cd.]

Siły wewnętrzne w płycie są określone następująco:

$$(1.12) \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = -D \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{bmatrix} - \frac{D}{1-\nu} \frac{h^2}{5} \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \chi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \chi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \chi_x}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} M_\sigma$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - D \frac{h^2}{10} \left( \frac{\partial \chi_x}{\partial y} + \frac{\partial \chi_y}{\partial x} \right),$$

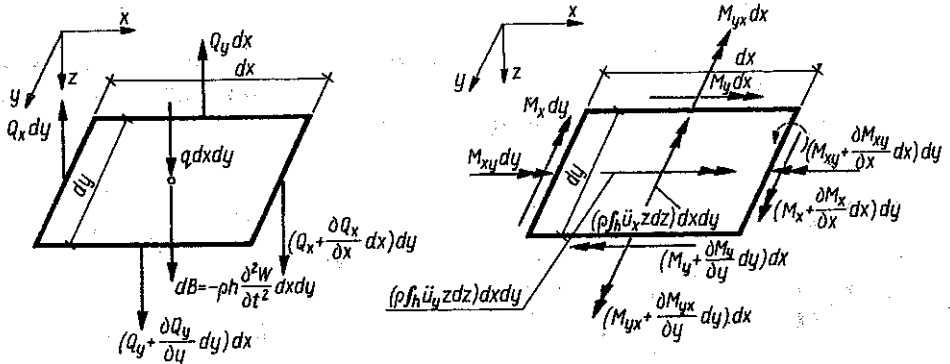
gdzie

$$(1.13) \quad M_\sigma = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z z dz = \frac{\nu}{1-\nu} \frac{h^2}{10} q, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

## 2. RÓWNANIA RÓWNOWAGI DYNAMICZNEJ PROBLEMU. DRGANIA SWOBODNE

Zgodnie z Rys. 1, trzy równania równowagi dynamicznej płyty mają postać

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q = 0,$$



Rys. 1. Równowaga dynamiczna elementu płyty

$$(2.1) \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x - \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \ddot{u}_x \, dz = 0,$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y - \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \ddot{u}_y \, dz = 0, \quad \{Q_x, Q_y\} = -D \{\chi_x, \chi_y\}.$$

Wykorzystując wzory (1.9) i (1.12), równania (2.1) po prostych przekształceniach redukujemy do dwóch równań różniczkowych

$$(2.2) \quad \nabla^4 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho h^3 (17-5\nu)}{60D(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 w) +$$

$$+ \frac{\rho^2 h^6}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = \frac{q}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)} \nabla^2 q + \frac{\rho h^5}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2},$$

$$\nabla^2 \psi - \frac{10}{h^2} \psi - \frac{\rho h^3}{6D(1-\nu)} \ddot{\psi} = 0 \quad (1)$$

lub

$$\frac{2}{5} D(1-\nu) \left( \nabla^2 \psi - \frac{10}{h^2} \psi \right) - \frac{\rho h^3}{15} \ddot{\psi} = 0,$$

gdzie

$$\psi = \frac{\partial \chi_x}{\partial y} - \frac{\partial \chi_y}{\partial x}.$$

Równania (2.2) dają się bez kłopotu zredukować do przypadku statycznego i są takie same, jak w pracy REISSNERA [10]. Funkcje  $\chi_x, \chi_y, \psi, w$  i  $q$  są ze sobą związane:

$$(2.3) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \nabla^2 \chi_x + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{q}{D} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\nabla^2 \chi_y + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q}{D} - \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right).$$

Przy założeniu, że  $q=0$ , równania (2.2) określają drgania swobodne. Zakładając, że ruch jest harmoniczny nietłumiony na funkcje  $w$  i  $\psi$  znajdziemy

(1) Współczynnik  $17-5\nu$  ulega zmianie na  $17-6\nu$  jeśli naprężenia  $\sigma_z$  wyznaczymy z równania (1.4).

następujące wzory:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} w(x, y, t) &= \sum_m \sum_n A_{m,n} \sin \alpha_m x \sin \alpha_n y \cos \omega_{m,n} t, \\ \psi(x, y, t) &= \sum_m \sum_n B_{m,n} \cos \alpha_m x \cos \alpha_n y \cos \omega_{m,n} t, \end{aligned}$$

gdzie

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{b}, \quad m, n = 1, 3, 5, \dots$$

Wprowadzając wielkości bezwymiarowe

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{h}{a}, \quad \gamma_{m,n}^2 &= h^2 (\alpha_m^2 + \alpha_n^2) = \pi^2 \beta^2 (m^2 + \lambda^2 n^2), \quad \gamma_{m,n}^2 = \\ &= \gamma_m^2 + \gamma_n^2, \quad \gamma_m^2 = \alpha_m^2 h^2, \quad \gamma_n^2 = \alpha_n^2 h^2 \end{aligned}$$

oraz

$$\omega_{m,n}^{kl} = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \frac{\pi^2 \beta}{a} (m^2 + \lambda^2 n^2) \frac{c_p}{\sqrt{12}} = \frac{\gamma_{m,n}^2 c_p}{h \sqrt{12}},$$

gdzie  $\omega_{m,n}^{kl}$  oznacza częstość kołową płyty prostokątnej według teorii klasycznej, a  $c_p$  i  $c_s$  oznaczają prędkości fali w płycie [1 i 2], znajdziemy

$$(2.5) \quad c_p^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}, \quad c_s^2 = \frac{G}{\rho}, \quad c_p = \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} c_s.$$

Po podstawieniu (2.4) do (2.2) otrzymamy trzy częstości drgań swobodnych płyty o średniej grubości:

$$(2.6) \quad \omega_{m,n}^{(1,3)} = \frac{c_p}{h \sqrt{12}} \left\{ \frac{1}{2} [P_{m,n} \mp (P_{m,n}^2 - Q_{m,n}^2)^{\frac{1}{2}}] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$(2.7) \quad \omega_{m,n}^{(2)} = \frac{c_p}{h \sqrt{12}} [6(1-\nu)(10 + \gamma_{m,n}^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

W równaniu (2.6)  $P_{m,n}$  i  $Q_{m,n}$  mają następujące znaczenie:

$$(2.8) \quad P_{m,n} = 60(1-\nu) + (17-5\nu)\gamma_{m,n}^2, \quad Q_{m,n} = 4\gamma_{m,n}^2 [15(1-\nu)]^{\frac{1}{2}}.$$

Wzór (2.6) jest związany z równaniem (2.2)<sub>1</sub>, a wzór (2.7) z równaniem (2.2)<sub>2</sub>. Warto zwrócić uwagę, że częstość  $\omega_{m,n}^{(2)}$  określa drgania, dla których  $w = 0$ . Między częstościami  $\omega^{(1)}$ ,  $\omega^{(2)}$ ,  $\omega^{(3)}$  zachodzi relacja [2 i 11]

$$\omega_{m,n}^{(1)} < \omega_{m,n}^{(2)} < \omega_{m,n}^{(3)}.$$

W pracy autora [9] analizowano przebiegi pierwszej i trzeciej częstotliwości jako funkcji różnych parametrów geometrycznych i materiałowych dla płyty kwadratowej.

### 3. DRGANIA PŁYTY POD OBCIĄŻENIEM RUCHOMYM

Obciażenie siłą skupioną, przesuującą się równolegle do osi  $y$  ze stałą prędkością  $v$  możemy określić wykorzystując pseudofunkcje Diraca, następnie można je rozłożyć w szereg podwójny:

$$q(x, y, t) = P\delta(x-vt)\delta(y-y_0) = \sum_m \sum_n f_{m,n}(t) \sin \alpha_m x \sin \alpha_n y,$$

$$f_{m,n}(t) = \frac{4P}{ab} \sin \alpha_m vt \sin \alpha_n y_0, \quad (2)$$

$$(3.1) \quad \nabla^2 q(x, y, t) = -\frac{4P}{ab} \sum_m \sum_n (\alpha_m^2 + \alpha_n^2) \sin \alpha_m vt \sin \alpha_n y_0 \sin \alpha_m x \sin \alpha_n y$$

$$\frac{\partial^2 q(x, y, t)}{\partial t^2} = -\frac{4Pv^2}{ab} \sum_m \sum_n \alpha_m^2 \sin \alpha_m vt \sin \alpha_n y_0 \sin \alpha_m x \sin \alpha_n y.$$

Zakładając, że obciążenie stanowi układ sił rozłożony w sposób ciągły na małym odcinku lub powierzchni, albo że porusza się pod kątem w stosunku do osi  $y$ —nie sprawia żadnych kłopotów w formalnym zapisie (3.1). Podstawienie (3.1) do (2.2) oraz przyjęcie, że ugięcie

$$(3.2) \quad w(x, y, t) = \sum_m \sum_n T_{m,n}(t) \sin \alpha_m x \sin \alpha_n y$$

spełniające warunki brzegowe  $x=0$  i  $x=a$ ,  $M_x=0$ ,  $w=0$ ,  $\chi_y=0$ ,  $u_y=0$  oraz przy  $y=0$  i  $y=b$ ,  $M_y=0$ ,  $w=0$ ,  $\chi_x=0$ ,  $u_x=0$ , gdzie  $T_{m,n}(t)$  jest nieznaną funkcją czasu, doprowadza do równania różniczkowego, niejednorodnego, zwyczajnego czwartego rzędu na nieznaną funkcję  $T_{m,n}(t)$ :

$$(3.3) \quad \ddot{T}_{m,n}(t) + \frac{P_{m,n}}{12} \left(\frac{c_p}{h}\right)^2 \ddot{T}_{m,n} + \frac{5(1-\nu)}{12} \left(\frac{c_p \gamma_{m,n}}{h}\right)^4 T_{m,n}(t) = \\ = \frac{2P}{\rho h^3 ab} \{c_p^2 [10(1-\nu) + \gamma_{m,n}^2(2-\nu)] - 2\gamma_m^2 v^2\} \sin \alpha_m vt \sin \alpha_n y_0.$$

Zakładając interesujące nas rozwiązanie szczególne w postaci

$$(3.4) \quad T_{m,n}^s(t) = C_{1,m,n} \sin \alpha_m vt + C_{2,m,n} \cos \alpha_m vt,$$

(2) W przypadku obciążenia rozłożonego równomiernie na całym prostokącie  $2c \times 2d$  współczynnik rozwinięcia  $f_{m,n} = \frac{4P}{\pi^2 mncd} \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}$ ,  $P = 4qcd$ .

Ugięcie płyty nie ma osiowości w żadnym punkcie

obliczymy stałe  $C_{1,m,n}$  i  $C_{2,m,n}$  podstawiając (3.4) do (3.3) i porównując odpowiednie współczynniki:

$$(3.5) \quad C_{1,m,n} = \frac{24Ph}{qab} \frac{c_p^2 [10(1-\nu) + \gamma_{m,n}^2(2-\nu)] - 2\gamma_m^2 v^2}{12\gamma_m^4 v^4 - c_p^2 v^2 \gamma_m^2 P_{m,n} + 5(1-\nu)c_p^4 \gamma_{m,n}^4} \sin \alpha_n y_0,$$

$$C_{2,m,n} = 0.$$

Analiza (3.5) pod kątem maksymalnych przemieszczeń prowadzi do równania dwukwadratowego, z którego otrzymujemy dwie prędkości krytyczne obciążenia

$$(3.6) \quad v_{m,n}^{(1,3)} = v_{1,3} = \frac{c_p}{2\gamma_m} \left\{ \frac{1}{6} [P_{m,n} \mp (P_{m,n}^2 - Q_{m,n}^2)^{\frac{1}{2}}] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Trzecią pozorną lub obliczeniową prędkość krytyczną wyznaczamy z warunku  $w = 0$  lub  $T_{m,n}(t) = 0$ . Przyrównując do zera licznik wyrażenia (3.5) otrzymamy

$$(3.7) \quad \bar{v}_{m,n}^{(2)} = \bar{v}_2 = \frac{c_p}{\gamma_m} \left\{ \frac{1}{2} [10(1-\nu) + \gamma_{m,n}^2(2-\nu)] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Między częstościami drgań swobodnych  $\omega_{m,n}^{(1)}$  i  $\omega_{m,n}^3$  a prędkościami krytycznymi obciążenia  $v_{m,n}^{(1)}$  i  $v_{m,n}^{(3)}$  istnieją zależności

$$(3.7)_1 \quad \omega_{m,n}^{(i)} = \alpha_m v_{m,n}^{(i)}, \quad i = 1, 3.$$

Natomiast częstość drgań swobodnych  $\omega_{m,n}^{(2)}$  określona wzorem (2.7) różni się od  $\alpha_m \bar{v}_{m,n}^{(2)}$  określonej przez (3.7). Oznaczając przez  $\kappa$  stosunek

$$(3.7)_2 \quad \kappa = \frac{\omega_{m,n}^{(2)}}{\alpha_m \bar{v}_{m,n}^{(2)}} = \left[ \frac{(1-\nu)(10 + \gamma_{m,n}^2)}{10(1-\nu) + (2-\nu)\gamma_{m,n}^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

stwierdzić można, że  $\kappa \rightarrow 1$  gdy  $\gamma_{m,n}^2 \rightarrow 0$ .

Dopuszczając istnienie właściwej rezonansowej prędkości krytycznej  $v_{m,n}^{(2)} = v_2$  spełniającej warunek

$$(3.7)_3 \quad \omega_{m,n}^{(2)} = \alpha_m v_{m,n}^{(2)}, \quad \omega_2 = \alpha_m v_2$$

możemy określić tę ostatnią:

$$(3.7)_4 \quad v_{m,n}^{(2)} = v_2 = \frac{c_p}{\gamma_m} \left[ \frac{1}{2} (1-\nu)(10 + \gamma_{m,n}^2) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{v}_2 > v_2.$$

Wykorzystując (3.6) i (3.7) amplitudę  $C_{1,m,n}$  możemy podać w postaci skracającej zapis (3.5):

$$(3.7)_5 \quad C_{1,m,n} = \frac{Ph^4 c_p^2 (\bar{v}_2^2 - v^2)}{3Dab\gamma_m^2 (v^2 - v_1^2)(v^2 - v_3^2)} \sin \alpha_n y_0.$$



Całkę ogólną równania (3.3) możemy napisać w postaci

$$(3.8) \quad T_{m,n}^0(t) = \bar{A}_{1,m,n} \cos \omega_{m,n}^{(1)} t + \bar{B}_{1,m,n} \sin \omega_{m,n}^{(1)} t + \bar{C}_{1,m,n} \cos \omega_{m,n}^{(3)} t + \\ + \bar{D}_{1,m,n} \sin \omega_{m,n}^{(3)} t,$$

gdzie  $\omega_{m,n}^{(1,3)}$  są pierwiastkami równania charakterystycznego wyznaczonego z (3.3) i oznaczają częstotliwości drgań swobodnych płyty. Rozwiązanie całkowite składa się z całki ogólnej i szczególnej:

$$(3.9) \quad T_{m,n}(t) = T_{m,n}^0(t) + T_{m,n}^s(t).$$

Po podstawieniu (3.8) i (3.4) do (3.9) oraz wykorzystaniu zerowych warunków początkowych

$$(3.10) \quad T_{m,n}(0) = 0, \quad \dot{T}_{m,n}(0) = 0, \\ \ddot{T}_{m,n}(0) = 0, \quad \dddot{T}_{m,n}(0) = 0.$$

stałe  $\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1$  i  $\bar{D}_1$  znajdziemy

$$(3.11) \quad \bar{A}_1 = 0, \quad \bar{C}_1 = 0, \\ \bar{B}_1 = \frac{v(v^2 - v_3^2)}{v_1(v_3^2 - v_1^2)} C_{1,m,n}, \quad \bar{D}_1 = \frac{v(v_1^2 - v^2)}{v_3(v_3^2 - v_1^2)} C_{1,m,n}.$$

We wzorach (3.11), dla uproszczenia zapisu jak również tam gdzie nie będzie to powodowało niejasności, opuszczamy indeksy  $m, n$ . Podstawienie ostatnich wyrażeń (3.11) do (3.9) prowadzi do rozwiązania

$$(3.12) \quad T_{m,n}(t) = C_{1,m,n} \left\{ \frac{v}{v_3^2 - v_1^2} \left[ \frac{v^2 - v_3^2}{v_1} \sin \alpha_m v_1 t - \frac{v^2 - v_1^2}{v_3} \sin \alpha_m v_3 t \right] + \right. \\ \left. + \sin \alpha_m vt \right\}.$$

Podstawienie (3.12) do (3.2) doprowadza do rozwiązania dla dynamicznego ugięcia:

$$(3.13) \quad w(x, y, t) = \frac{Ph^4}{3Dab} \sum_m \sum_n \frac{c_p^2 (\bar{v}_2^2 - v^2)}{\gamma_m^2 (v^2 - v_1^2) (v^2 - v_3^2)} \left[ \frac{v}{v_3^2 - v_1^2} \left( \frac{v^2 - v_3^2}{v_1} \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \sin \alpha_m v_1 t - \frac{v^2 - v_1^2}{v_3} \sin \alpha_m v_3 t \right) + \sin \alpha_m vt \right] \sin \alpha_n y_0 \sin \alpha_m x \sin \alpha_n y.$$

Dla identycznej płyty obciążonej statycznie i obliczanej według teorii

Kirchhoffa-Love'a, ugięcie pod siłą w środku płyty wynosi

$$(3.14) \quad w(x, y) = \frac{Ph^4}{4Dab} \sum_m \sum_n \frac{1}{\gamma_{m,n}^4} \sin \alpha_m x_0 \sin \alpha_n y_0 \sin \alpha_m x \sin \alpha_n y.$$

Rozwiązanie dynamiczne (3.13) traci sens przy  $v = v_i$ ,  $i = 1, 3$ . Po odpowiednim przejściu granicznym otrzymamy rozwiązanie dla tego interesującego, skrajnego przypadku:

$$(3.15) \quad w(x, y, t) = \frac{Ph^4}{6Dab} \sum_m \sum_n \frac{c_p^2 (\bar{v}_2^2 - v_i^2)}{\gamma_m^2 v_i [2v_i^2 - (v_1^2 + v_3^2)]} \left\{ \frac{1}{v_3^2 - v_1^2} \right. \\ \left. \left[ \frac{3v_i^2 - v_3^2}{v_1} \sin \alpha_m v_1 t - \frac{3v_i^2 - v_1^2}{v_3} \sin \alpha_m v_3 t \right] + \right. \\ \left. + \alpha_m v_i t \cos \alpha_m v_i t \right\} \sin \alpha_n y_0 \sin \alpha_m x \sin \alpha_n y, \quad i = 1, 3.$$

Jak wynika z rozwiązania (3.15) amplituda ruchu poszczególnych punktów płyty dąży do odpowiednio dużej wartości, rosnąć systematycznie podczas przejazdu siły przez płytę. Zjawisko ma charakter w tym przypadku rezonansowy. Do pełnego rozwiązania problemu płyty o średniej grubości pod obciążeniem ruchomym potrzebne jest również określenie funkcji  $\chi_x$  i  $\chi_y$ , w konsekwencji wyznaczyć możemy naprężenia dynamiczne i siły wewnętrzne, konieczne przy wymiarowaniu. Nieznane funkcje  $\chi_x$  i  $\chi_y$  można bezpośrednio uzależnić od dynamicznego ugięcia  $w$ , wykorzystując odpowiednio w tym celu równania równowagi dynamicznej (2.1). Po nietrudnych przekształceniach równania te możemy napisać w formie macierzowej:

$$(3.16) \quad \left[ \nabla^2 - \frac{10}{h^2} - \frac{\rho h^3}{6D(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{Bmatrix} = \\ = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \left[ -\frac{10}{h^2} \nabla^2 w + \frac{\rho h (11+\nu)}{6D(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{q}{D(1-\nu)} \right].$$

Przyjęcie rozwiązania układu (3.16) w postaci podwójnych szeregów sinusowo-kosinusowych (3.17) doprowadza do rozdziału zmiennych i w konsekwencji do dwóch zwyczajowych równań różniczkowych niejednorodnych na wyzna-

czenie nieznanymi funkcjami  $\Phi_{m,n}(t)$  i  $\Lambda_{m,n}(t)$ :

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \chi_x(x, y, t) &= \sum_m \sum_n \Phi_{m,n}(t) \cos \alpha_m x \sin \alpha_n y, \\ \chi_y(x, y, t) &= \sum_m \sum_n \Lambda_{m,n}(t) \sin \alpha_m x \cos \alpha_n y. \end{aligned}$$

Nieznane funkcje czasu  $\Phi_{m,n}(t)$  i  $\Lambda_{m,n}(t)$  spełniają równania

$$(3.18) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_2^2 \right) \begin{Bmatrix} \Phi_{m,n} \\ \Lambda_{m,n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_m \\ \alpha_n \end{Bmatrix} \frac{(1-\nu) c_p^2}{2} \left[ \frac{10\gamma_{m,n}^2}{h^4} T_{m,n} + \right. \\ \left. + \frac{2}{c_p^2 h^2} \frac{11+\nu}{1-\nu} \ddot{T}_{m,n} - \frac{f_{m,n}}{D(1-\nu)} \right].$$

Rozwiązanie równań (3.18) nie sprawia zasadniczych kłopotów. Przy założeniu zerowych warunków początkowych dla funkcji  $\Phi_{m,n}$  i  $\Lambda_{m,n}$  otrzymamy

$$(3.19) \quad \begin{Bmatrix} \Phi_{m,n} \\ \Lambda_{m,n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_m \\ \alpha_n \end{Bmatrix} \left( -\frac{E_1 v_1 + E_2 v_2 + E_3 v}{v_2} \sin \alpha_m v_2 t + E_1 \sin \alpha_m v_1 t + \right. \\ \left. + E_2 \sin \alpha_m v_3 t + E_3 \sin \alpha_m v t \right),$$

gdzie stałe  $E_1$ ,  $E_2$  i  $E_3$  są określone wzorami

$$(3.20) \quad \begin{aligned} E_1 &= \frac{C_{1,m,n}}{\alpha_m (v_2^2 - v_1^2)} \left\{ \frac{c_p^2 (1-\nu) v (v^2 - v_3^2)}{v_3^2 - v_1^2} \left[ \frac{5\gamma_{m,n}^2}{\alpha_m v_1 h^4} - \frac{\alpha_m v_1 (11+\nu)}{c_p^2 h^2 (1-\nu)} \right] \right\}, \\ E_2 &= -\frac{C_{1,m,n}}{\alpha_m (v_2^2 - v_3^2)} \left\{ \frac{c_p^2 (1-\nu) v (v^2 - v_1^2)}{v_3^2 - v_1^2} \left[ \frac{5\gamma_{m,n}^2}{\alpha_m v_3 h^4} - \frac{\alpha_m v_3 (11+\nu)}{c_p^2 h^2 (1-\nu)} \right] \right\}, \\ E_3 &= -\frac{6\bar{f}_{m,n}}{\rho h^3 \alpha_m^2 (v_2^2 - v^2)} + C_{1,m,n} (1-\nu) c_p^2 \left[ \frac{5\gamma_{m,n}^2}{h^4} - \frac{\alpha_m^2 v^2 (11+\nu)}{c_p^2 (1-\nu) h^2} \right]. \end{aligned}$$

Znając rozwiązanie dla  $\chi_x$  i  $\chi_y$  a także dla ugięcia  $w$ , możemy określić siły wewnętrzne i naprężenia w dowolnym punkcie płyty i w dowolnej chwili czasu. We wzorach (3.20)

$$\bar{f}_{m,n} = \frac{4P}{ab} \sin \alpha_n y_0.$$

Wymiarem funkcji  $\chi_x$  i  $\chi_y$  jest  $[1/m^2]$ . Dynamiczne momenty zginające  $M_x$  i  $M_y$ , określone przez (1.12) możemy napisać wykorzystując (3.13) i (3.19):

$$(3.21) \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \frac{Ph^2}{3ab} \sum_m \sum_n \frac{c_p^2 (\bar{v}_2^2 - v^2)}{\gamma_m^2 (v^2 - v_1^2) (v^2 - v_3^2)} \begin{pmatrix} \gamma_m^2 + \nu \gamma_n^2 \\ \gamma_n^2 + \nu \gamma_m^2 \end{pmatrix} (S_1 \sin \alpha_m v_1 t + \\ + S_2 \sin \alpha_m v_3 t + S_3 \sin \alpha_m v t + S_4 \sin \alpha_m v_2 t) \sin \alpha_n y_0 \sin \alpha_m x \sin \alpha_n y.$$

W rozwiązaniu (3.21) bezwymiarowe współczynniki  $S_1, S_2, S_3$  i  $S_4$  są określone w sposób następujący:

$$(3.22) \quad \begin{aligned} S_1 &= \frac{v}{v_1(v_3^2 - v_1^2)} \left\{ v^2 - v_3^2 + \frac{v_3^2 - v^2}{v_1^2 - v_2^2} \left[ v_0^2 - v_1^2 \frac{11+v}{5(1-v)} \right] \right\}, \quad v_0^2 = \frac{c_p^2 \gamma_{mn}^2}{\gamma_m^2} \\ S_2 &= -\frac{v}{v_3(v_3^2 - v_1^2)} \left\{ v^2 - v_1^2 + \frac{v_1^2 - v^2}{v_3^2 - v_2^2} \left[ v_0^2 - v_3^2 \frac{11+v}{5(1-v)} \right] \right\}, \\ S_3 &= 1 - \frac{1}{5(1-v)} \left\{ \frac{6(v^2 - v_1^2)(v^2 - v_3^2)}{\bar{v}_2^2 - v^2} \left( \frac{1}{v_2^2 - v^2} - \frac{v\gamma_{m,n}^2}{v_0^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{v_2^2 - v^2} [5v_0^2(1-v) - v^2(11+v)] \right\}, \\ S_4 &= \frac{v(v_1^2 - v^2)}{5(1-v)v_2(v_2^2 - v^2)} \left\{ [5v_0^2(1-v) - v^2(11+v)] \frac{1}{v_2^2 - v_1^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{6(v_3^2 - v_2^2)}{\gamma_m^2(\bar{v}_2^2 - v^2)} \right\}, \quad v_2 \neq \bar{v}_2. \end{aligned}$$

Momenty zginające  $M_x$  i  $M_y$  dla przypadku statycznego płyty obciążonej centralnie siłą skupioną obliczane według klasycznej teorii są postaci

$$(3.23) \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \frac{4Ph^2}{ab} \sum_m \sum_n \frac{1}{\gamma_{m,n}^4} \left( \frac{\gamma_m^2 + v\gamma_n^2}{\gamma_n^2 + v\gamma_m^2} \right) \sin \alpha_m x_0 \sin \alpha_n y_0 \sin \alpha_m x \sin \alpha_n y$$

Rozwiązanie (3.22) wymaga przeanalizowania czterech przypadków granicznych  $v = v_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  oraz  $v = \bar{v}_2$ , które nie mają większego znaczenia technicznego ze względu na bardzo duże wartości prędkości krytycznych, nierealnych dla współczesnych pojazdów komunikacyjnych.

Na zakończenie tego rozdziału należy przytoczyć jeszcze rozwiązanie dla przypadku  $v = 0$ , jako pewne przejście graniczne w wyrażeniu na dynamiczne ugięcie (3.13). W tym szczególnym przypadku należy jednak założyć, że pomimo nieskończonej małej prędkości obciążenie dociera do punktu o współrzędnych  $x_0 = vt$ ,  $y = y_0$ . Obliczone w ten sposób przemieszczenie jest różne od ugięcia (3.14) ważnego dla płyty cienkiej wyznaczonego w ramach teorii klasycznej

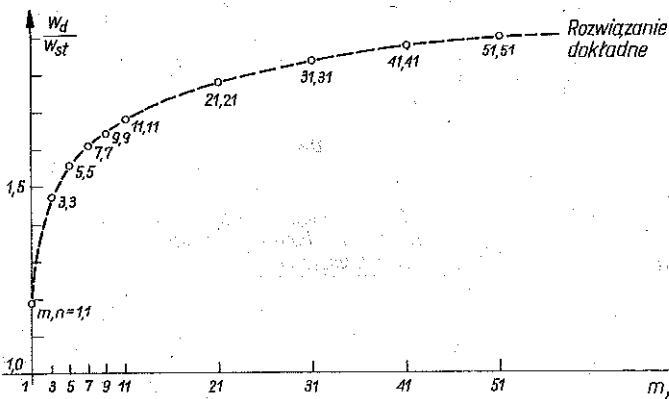
$$(3.24) \quad w(x, y) = \frac{Ph^4}{3Dab} \sum_m \sum_n \frac{\bar{v}_2^2 c_p^2}{\gamma_m^2 v_1^2 v_3^2} \sin \alpha_m x_0 \sin \alpha_n y_0 \sin \alpha_m x \sin \alpha_n y.$$

W przypadku zagadnienia statycznego płyty o średniej grubości obciążonej siłą skupioną (np. płyta kołowa) ugięcie wyraża się funkcją zawierającą w miejscu przyłożenia siły osobliwość zerowego rzędu.

## 4. ANALIZA NUMERYCZNA ROZWAŻANEGO PROBLEMU

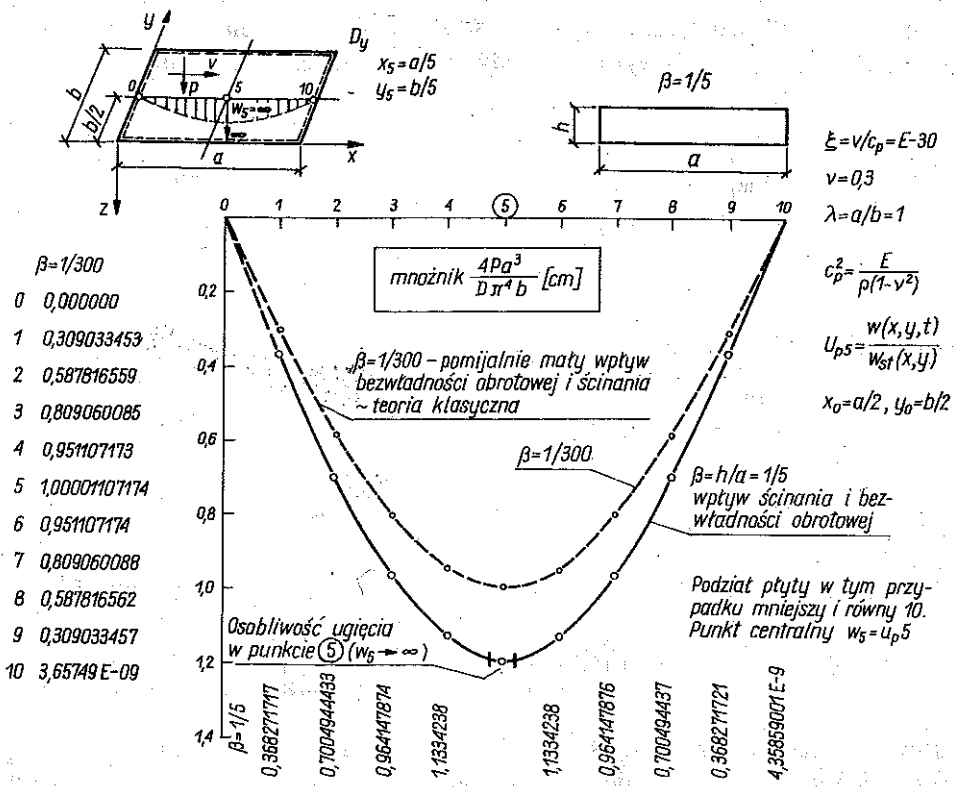
Przedstawione wyniki rozwiązania poprzedniego rozdziału zostały zaprogramowane na mikrokomputer Oric-1. Szczególnie dokładnie sprawdzono stosunek ugięcia dynamicznego płyty (3.13) i ugięcia statycznego według klasycznej teorii (3.14).

Płytę podzielono na 20 jednakowych części  $I = 1, 2, \dots, 20$ . Ponieważ  $vt = a$ , przeto  $t = Ia/20v$ ,  $I/20 = vt/a$ . Parametr  $I$  spełnia tutaj zastępczą „funkcję czasu”. Analizowano zbieżność stosunku ugięć dla  $m, n = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 21, 31, 31, 41, 51$  wyrazów podwójnego szeregu. Jak wynika z Rys. 2

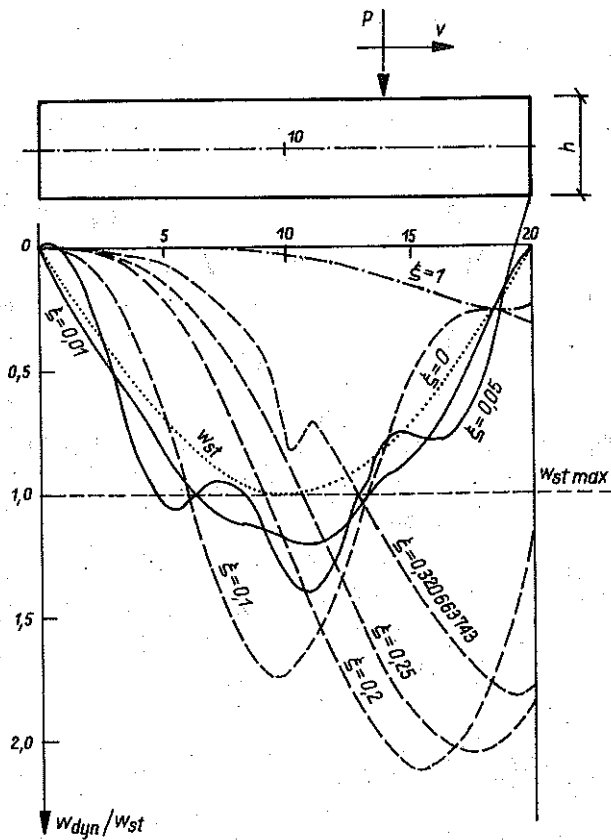


Rys. 2. Badanie zbieżności rozwiązania dynamicznego dla ugięcia płyty w jej środku  $\xi = 0.01$ ,  $\beta = 1/5$ ,  $v = 0.3$ ,  $m, n = 1, 1; 3, 3; 5, 5; 7, 7; 9, 9; 11, 11; 21, 21; 31, 31; 41, 41; 51, 51$

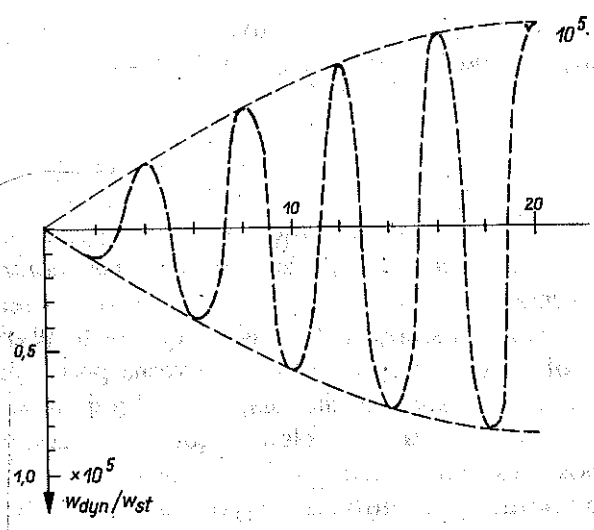
dobrą zbieżność uzyskuje się biorąc  $m, n > 31$ . W cytowanej pracy [6] stwierdzono, że rozwiązanie jest zbieżne i ograniczono je do kilku wyrazów szeregu. Znacznie gorszą zbieżność ma rozwiązanie dla stosunku momentów zginających. W tym przypadku należy wykonywać sumowanie podwójnych szeregów dla  $m, n > 51$ . Na Rys. 3 podano dynamiczne linie wpływu przemieszczenia pionowego środka płyty w dwu przypadkach  $\beta = 1/300$  i  $\beta = 1/5$  oraz  $\xi = v/c_p = E-30$ . Z rysunku wynika różnica w stosowaniu teorii klasycznej i teorii płyt o średniej grubości. Zasadnicze wyniki obliczeń numerycznych przedstawiono na Rys. 4. Przeanalizowano tutaj przy różnych wartościach  $\xi = v/c_p$  i  $\beta = 1/5$  dynamiczne linie wpływu ugięcia środka płyty. Z przeprowadzonej analizy wynika znaczny wpływ prędkości poruszającego się obciążenia w przypadku, gdy ta ostatnia zbliża się do pierwszej prędkości krytycznej  $v_1$ . Rysunek 5 pokazuje przypadek rezonansu, przejazd siły przez płytę odbywa się z pierwszą prędkością krytyczną.



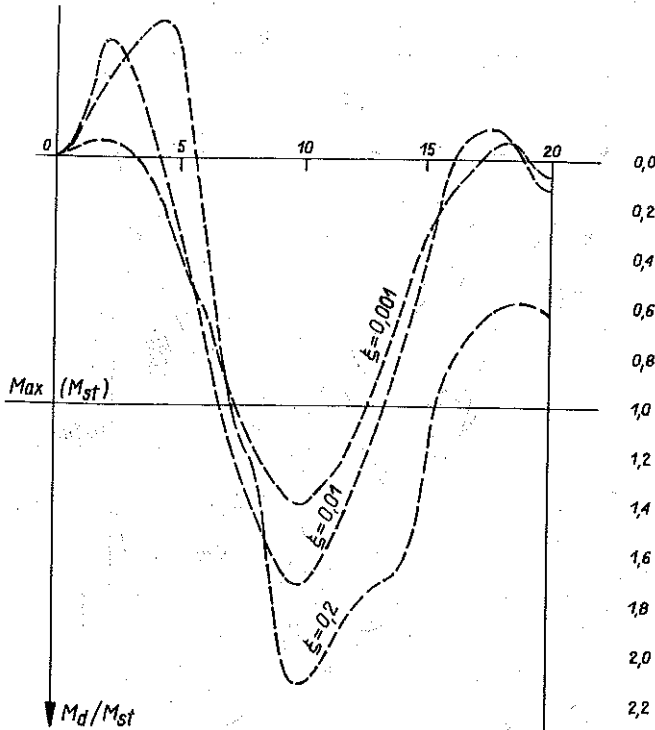
Rys. 3. Linia wpływu ugięcia środka płyty dla przypadku statycznego  $\beta = 1/300$  i  $\beta = 1/5$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\xi = E-30$



Rys. 4. Dynamiczna linia wpływu dla przemieszczenia pionowego (ugięcia) środka płyty  
 $\xi = v/c_p$ ,  $v = 0,3$ ,  $\beta = 1/5$ ,  $\lambda = 1$



Rys. 5. Dynamiczna linia wpływu dla przemieszczenia pionowego (ugięcia) środka płyty. Przypadek rezonansu  $\xi = \xi_{kr}$ ,  $v = 0,5$ ,  $\beta = 1/5$ ,  $\lambda = 1$ , mnożnik  $E \cdot 10^5$



Rys. 6. Dynamiczna linia wpływu dla momentu zginającego  $M_x$  w środkowym punkcie płyty  
 $\nu = 0,3$ ,  $\beta = 1/5$ ,  $\lambda = 1$

Wreszcie na Rys. 6 podano dynamiczne linie wpływu dla momentu zginającego  $M_x$  w środku płyty dla  $\xi = 0, 1$ ,  $\xi = 0, 01$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\nu = 0, 3$ .

## 5. WNIOSKI I UOGÓLNIENIA

W pracy podano rozwiązanie analityczne dla zagadnienia dynamicznego płyty o średniej grubości. Rozwiązanie polegało na wyznaczeniu trzech nieznanymi funkcji  $w$ ,  $\chi_x$ ,  $\chi_y$ . Wyniki rozwiązania podane są pod postacią podwójnych szeregów trygonometrycznych. Wyznaczono trzy częstości drgań swobodnych i trzy prędkości krytyczne poruszającego się obciążenia. Wyznaczono prędkość obciążenia, dla której  $w = 0$ . Przeprowadzona analiza wykazuje poważny wpływ prędkości przesuwanego się obciążenia na przemieszczenia, naprężenia i siły wewnętrzne w płycie. W przypadku przejazdu siły z prędkością krytyczną przemieszczenia płyty narastają systematycznie, a zjawisko ma charakter rezonansowy.



## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. R. D. MINDLIN, *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates*, J. Appl. Mech., **18**, 1, March 1951.
2. R. D. MINDLIN, A. SCHACKNOW and H. DERESIEWICZ, *Flexural vibrations of rectangular plates*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., Sept. 1956.
3. A. JAHANSHAH and F. J. MONZEL, *Effects of rotatory inertia and transverse shear on the response of elastic plates to moving forces*, Ing.-Arch., **34**, 1965.
4. A. A. ADLER, H. REISMANN, *Moving loads on an elastic plate strip*, J. Appl. Mech., **41**, 1974.
5. A. A. ADLER, H. REISMANN, *Moving loads on a pre-stressed, clastic plate strip*, Z. Angew. Math. Mech., **55**, 1975.
6. K. SHIRAKAWA, *Response of rectangular thick plates to moving loads*, Ing.-Arch., **50**, 1981.
7. K. SHIRAKAWA, *Initially stressed thick plates subjected to a moving load*, SM Archives, **8**, 1983.
8. С. А. Амбарцуман, Теория анизотропных пластин изд-во „наука” Москва 1967
9. W. SZCZEŚNIAK, *Drgania swobodne płyty o średniej grubości*, Arch. Inż. Ładow., **22**, 1, 1976.
10. E. REISSNER, *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*, J. Appl. Mech., **2**, 2, 1945.
11. G. JEMIELITA, *Drgania własne izotropowego prostopadłościanu i grubej płyty*, Arch. Inż. Ładow., **23**, 4, 1977.

## РЕЗЮМЕ

## КОЛЕБАНИЯ ПЛИТЫ СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ ПОД ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКОЙ

В работе анализируется динамическая задача плиты средней толщины. Подвижная нагрузка передвигается с постоянной скоростью. Проблема приведена к двум дифференциальным уравнениям, которые решены аналитическим методом. Определены тоже три частоты свободных колебаний и три критические скорости нагрузки. Решение иллюстрировано динамическими линиями влияния для прогиба и изгибающего момента, используя для этой цели соответствующую программу для миникомпьютера Орик-1.

## SUMMARY

## VIBRATION OF PLATES OF MODERATE THICKNESS UNDER MOVING LOADS

Dynamic problem of a plate of moderate thickness is analyzed in the paper. The loads move at a constant velocity. The problem is reduced to a set of two differential equations and solved by analytic methods. Three free vibration frequencies and three critical load velocities are determined. The solution is illustrated by dynamical influence lines for the deflection and bending moment prepared by means of a suitable Oric-1.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 maja 1984 r.