

WPŁYW ZMIENNEGO PRZEKROJU NA DRGANIA GIĘTNE WYBRANYCH BELEK I WAŁÓW WSPORNIKOWYCH

JERZY J A R O S Z E W I C Z (BIAŁYSTOK) i LONGIN Z O R Y J (LWÓW)

Zbadano wpływ zmiennego przekroju belek i wałów wspornikowych oraz wpływ masy skupionej, zamocowanej na ich końcach na podstawową część drgań giętnych. Rozpatrzono belki w kształcie klina liniowego i parabolicznego oraz ostrosłupa o podstawie kwadratowej, a także wał w kształcie stożka. Opracowano analityczną i numeryczną metodę określenia współczynników szeregu charakterystycznego na podstawie wzorów ogólnych otrzymanych w pracy [3]. Zaproponowano wygodne dla inżynierskiej praktyki wzory do obliczenia górnych i dolnych estymatorów podstawowej częstości drgań wymienionych belek. Podano warunki stosowalności tych wzorów. Porównanie wyników teoretycznych i eksperymentalnych potwierdza wysoką dokładność obliczeń.

1. WSTĘP

Liczne elementy maszyn i konstrukcji nośnych takie, jak łopatki turbin i śmigłowców, wrzecion obrabiarek, wieże wiertnicze, wysięgniki dźwigów dają się sprowadzić do modelu belek lub wałów wspornikowych o typowych przekrojach poprzecznych, zmieniających się wzdłuż osi belki. Do badania drgań giętnych takich belek zwykle stosowano analityczne i numeryczne metody przybliżone, które nie pozwalają ocenić dokładności obliczonej częstości [1 i 2]. W pracy [3] wyznaczono dwustronne estymatory częstości podstawowej drgań giętnych jednorodnej belki wspornikowej o dowolnie zmiennym przekroju, z zamocowaną na jej końcu masą skupioną, metodą szeregów charakterystycznych. Wyprowadzono w niej wzory ogólne określające pierwsze współczynniki szeregu charakterystycznego, których podstawowymi elementami są całki oznaczone o krotności od 1 do 3. W niniejszej pracy wykorzystuje się wymienione wzory do badania wpływu parametrów przekrojów na niższe częstości często spotykanych w praktyce inżynierskiej jednorodnych belek w formie klina liniowego i parabolicznego, stożka oraz ostrosłupa o podstawie kwadratowej z zamocowaną na ich końcach masą skupioną. W pracy zaproponowano również wzory dla niższych częstości

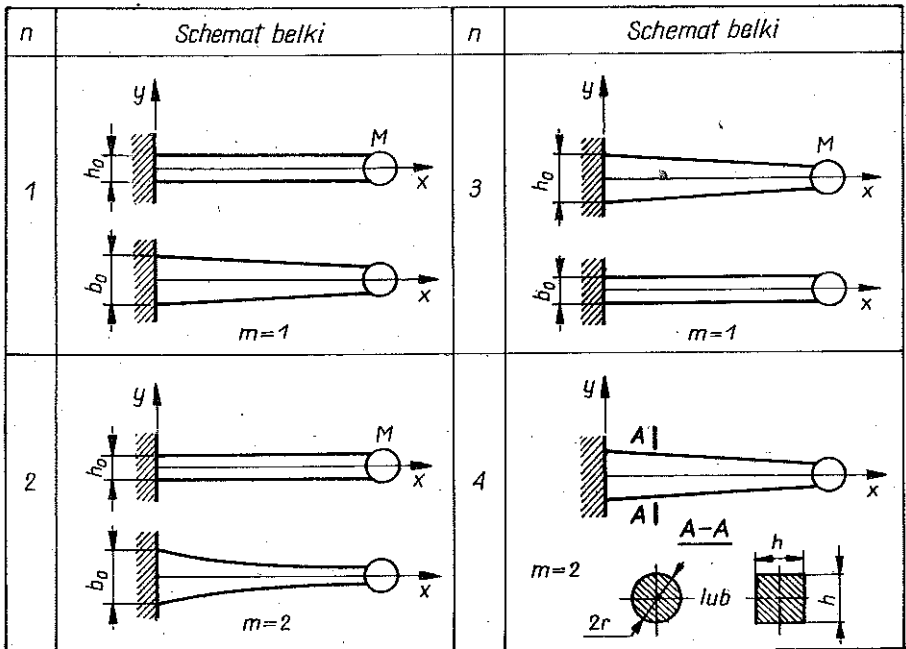
odpowiednich układów zastępczych, które zapewniają dokładność wystarczającą dla inżynierskich obliczeń. Wyniki obliczeń teoretycznych porównano z wynikami eksperymentu.

2. ROZPATRZONE PRZYPADKI

Sztywność i masę rozpatrzonych belek można opisać za pomocą następujących wzorów:

$$(2.1) \quad f(x) = EJ_0 \left(1 - \gamma \frac{x}{l}\right)^n, \quad g(x) = m_0 \left(1 - \gamma \frac{x}{l}\right)^m,$$

gdzie E oznacza moduł Younga, J_0 , m_0 odpowiednio moment bezwładności przekroju i masę jednostki długości belki u podstawy, γ parametr zbieżności ($0 \leq \gamma < 1$), l długość belki, n i m parametry przekroju belki, które mogą przyjmować dowolne wartości rzeczywiste (dla belki obrotowej $m = 2n$).



Rys. 1. Schematy belek i wałów

Masę skupioną M , zamocowaną na końcu belki, uwzględniono za pomocą stosunku $\mu = M/m_0 l$. Schematy rozpatrzonych belek i wałów zamieszczono na rys. 1.

3. WZORY I ALGORYTMY OBLICZEŃ

Wyznaczając całki występujące w ogólnych wzorach (3.2) i (3.3) pracy [3] otrzymano wzory na trzy pierwsze współczynniki szeregu charakterystycznego odpowiadające belkom przedstawionym na rys. 1. W pracy [3] przytoczono te wzory dla stożka ($n = 4$), niżej zaś dla klina liniowego ($n = 3, \mu = 0$):

$$(3.1) \quad A_0 = 1,$$

$$A_1 = \frac{1}{24\gamma^4} (1 + 12\Gamma^2 - 16\Gamma^3 + 3\Gamma^4 + 12\Gamma^2 \ln \Gamma),$$

$$(3.2) \quad A_2 = \frac{1}{72\gamma^8} \left\{ \frac{1}{60} + \Gamma^2 \left[\frac{7}{2} - \frac{32}{3}\Gamma + \frac{9}{4}\Gamma^2 + \frac{32}{5}\Gamma^3 - \frac{3}{2}\Gamma^4 + \left(\frac{3}{2} - 9\Gamma^2 + \frac{1}{2}\Gamma^4 \right) \ln \Gamma \right] \right\},$$

gdzie $\Gamma = 1 - \gamma$.

W celu praktycznego stosowania metody w przypadku belek o potęgowej zmianie przekroju opisanej wzorami (2.1) opracowano programy na komputer umożliwiające obliczenie estymatorów niższych częstotliwości drgań własnych.

Tablica 1

n	$\frac{\mu a \omega_0^2}{\gamma^3}$
0	3
1	$\frac{2\gamma^3}{3\gamma^2 - 2\gamma - 2(1-\gamma)^2 \ln(1-\gamma)}$
2	$\frac{\gamma^3}{2\gamma - \gamma^2 + 2(1-\gamma) \ln(1-\gamma)}$
3	$\frac{2\gamma^3}{\gamma^2 + 2\gamma + 2 \ln(1-\gamma)}$
4	$3(1-\gamma)$

W przypadkach gdy masa skupiona M znacznie przewyższa masę własną belki, to znaczy gdy $\mu \rightarrow \infty$, belkę można zastąpić układem o jednym stopniu swobody, którego częstość oblicza się wg wzoru (3.6) z pracy [3]. Wyznaczając całkę we wspomnianym wzorze otrzymano następujące wzory odpowiadające rozpatrywanym przypadkom (tablica 1). W tablicy 1 zasto-

sowano następujące oznaczenia: ω_0 oznacza parametr częstotliwości podstawowej, $a = m_0 l^4/EJ_0$. Wzory z tablicy 1 mogą być również wykorzystane dla układów zastępczych o jednym stopniu swobody, w których masa zastępcza jest sumą masy własnej belki i masy skupionej M , to znaczy stosunek μ będzie przyjmował skończone wartości. Wówczas przykładowy wzór dla stożka ($n = 4$) ma postać

$$(3.3) \quad \underline{a}\omega_0^2 = \frac{3(1-\gamma)}{\frac{1}{3}(3-3\gamma+\gamma^2)+\mu}$$

Z przeprowadzonej w p. 4 analizy wynika, że wzory zawarte w tablicy 1 dają „zgrubny estymator” częstotliwości podstawowej z góry, stąd też zastosowano oznaczenie $\mu\overline{a}\overline{\omega}_0^2$, wzór zaś (3.3) daje „bardzo zgrubne”⁽¹⁾ przybliżenie z dołu, co oznaczono jako $\underline{a}\omega_0^2$.

Z teorii drgań wiadomo, że najprostszy zgrubny estymator częstości podstawowej z dołu określa się wzorem Dunkerle'a [4]:

$$(3.4) \quad \underline{a}\omega_0^2 = (A_1)^{-1},$$

gdzie A_1 oznacza drugi współczynnik szeregu charakterystycznego. Na podstawie (3.4) wzory szczegółowe dla klina liniowego ($n = 3$) i stożka ($n = 4$) przy $\mu \neq 0$ będą miały następujące postacie:

$$(3.5) \quad \underline{a}\omega_0^2 = \left\{ \frac{1}{24\gamma^4} \left[1 + 12(1-\gamma)^2 - 16(1-\gamma)^3 + 3(1-\gamma)^4 + \right. \right. \\ \left. \left. + 12(1-\gamma)^2 \ln(1-\gamma) \right] - \mu \frac{\gamma^2 + 2\gamma + 2 \ln(1-\gamma)}{2\gamma^3} \right\}^{-1},$$

$$(3.6) \quad \underline{a}\omega_0^2 = \frac{60(1-\gamma)}{(5-4\gamma)(1-\gamma)+20\mu}$$

Dokładne estymatory częstości podstawowej z dołu $\underline{a}\omega_0$ i z góry $\overline{a}\overline{\omega}_0^2$ obliczono ze wzorów BERNSTEJNA [5]. Należy zauważyć, że mając trzy pierwsze współczynniki szeregu charakterystycznego można również obliczyć dwustronne estymatory drugiej częstości własnej i przybliżone wartości estymatorów trzeciej i czwartej częstości.

⁽¹⁾ Terminologia zastosowana w tej pracy może budzić zastrzeżenia, jednakże jest wygodna dla zróżnicowania stopnia przybliżenia. W dalszych częściach pracy cudzysłów pomijamy.

4. WYNIKI OBLICZEŃ I EKSPERYMENTU

W tabelicy 2 porównano wyniki obliczeń dokładnych estymatorów podstawowej częstotliwości dla klina (przypadek $n = 3$) przy $\mu = 0$ otrzymane za pomocą wzorów (3.1) i (3.2) (rubryki 3 i 4) oraz przy wykorzystaniu numerycznego obliczenia całek występujących we wzorach ogólnych (3.2) i (3.3) z pracy [3] (rubryki 5, 6). W rubryce 7 zapisano różnicę względną ε w % między średnimi wartościami estymatorów obliczonych podanymi sposobami.

Tabela 2

Lp	γ	Analityczny		Numeryczny		ε [%]	Eksperyment
		$\underline{a\omega_0^2}$	$\overline{a\omega_0^2}$	$\underline{a\omega_0^2}$	$\overline{a\omega_0^2}$		
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	12,3583	12,3640	12,3557	12,3613	0,02	—
2	0,2	13,0134	13,0223	13,0134	13,0223	0	14,02
3	0,4	13,9553	13,9705	13,9553	13,9705	0	—
4	0,6	15,4582	15,4892	15,4583	15,4892	0	14,43
5	0,8	18,3730	18,4594	18,3731	18,4596	0	—
6	1,0	28,0264	28,5156	29,9395	31,2905	7,66	32,03

W rubrykach 5, 6 tabelicy 3 zamieszczono wyniki numerycznych obliczeń dokładnych dolnych i górnych estymatorów $\underline{a\omega_0^2}$ i $\overline{a\omega_0^2}$ dla wszystkich rozpatrywanych przypadków ($n = 1, 2, 3, 4$) przy wybranych znaczeniach γ i μ . W rubryce 7 są wartości zgrubnych estymatorów z dołu $\underline{a\omega_0^2}$ obliczone na podstawie wzoru Dunkerle'a (3.4), w rubryce 8 zaś są wyniki zgrubnych estymatorów z góry $\overline{a\omega_0^2}$ otrzymane na podstawie wzorów z tabelicy 1. W rubrykach 9 i 10 zapisano odpowiednie różnice względne między wartościami zgrubnych estymatorów $\underline{a\omega_0^2}$ i $\overline{a\omega_0^2}$ i wartościami średnimi dokładnych estymatorów $\underline{a\omega_0^2}$ i $\overline{a\omega_0^2}$, które można, jak wynika z tabelicy 2, uważać za wartości ściśle. Tabela 4 zawiera warunki stosowalności wzorów (3.4), (3.5) i (3.6) oraz wzorów z tabelicy 1, oznaczone jako A i B, które zapewniają dokładność obliczeń do 5% z niedomiarem i nadmiarem w porównaniu z wynikami estymatorów dokładnych.

Warunki (A) z tabelicy 4 pokazują, że wzór Dunkerle'a (3.4) można stosować niezależnie od stosunku μ w przeciwieństwie do wzorów z tabelicy 1 (warunki B), których dokładność silnie zależy od μ . Obliczenia teoretyczne sprawdzono eksperymentalnie na stanowisku, którego schemat ideowy zamieszczono na rys. 2.

Układ wzbudzenia stanowią generator 1, wzmacniacz mocy 2, układ rezonansowy LC 3 oraz elektromagnes 5. Elektromagnes 5 za pośrednictwem zwory wzbudza drgania giętne próbki 6 sztywno zamocowanej na końcu wspornika 4. Na końcu próbki umieszczono masę skupioną 11. Przed-

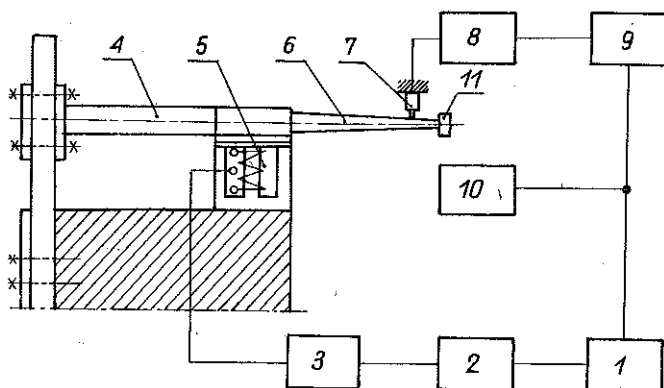
Tablica 3

Lp	n	γ	μ	$\overline{a\omega_0^2}$	$\overline{a\omega_0^2}$	$\overline{a\omega_0^2}$	$\overline{a\omega_0^2}$	ε_1 [%]	ε_2 [%]
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0,2	1,0	2,380952	2,380963	2,356	2,845	1,05	19,49
2		0,2	2,5	1,055409	1,055412	1,051	1,138	0,38	7,87
3		0,2	5,0	0,547645	0,547645	0,546	0,569	0,36	3,83
4		0,8	1,0	2,127660	2,127670	2,108	2,282	0,94	7,24
5		0,8	2,5	0,887075	0,887080	0,884	0,913	0,33	2,93
6		0,8	5,0	0,449903	0,449903	0,449	0,456	0,22	1,33
7	2	0,2	1,0	2,318034	2,318102	2,297	2,693	0,91	16,18
8		0,2	2,5	1,012146	1,012153	1,008	1,077	0,39	6,42
9		0,2	5,0	0,522030	0,522030	0,521	0,539	0,20	3,26
10		0,8	1,0	1,584158	1,584221	1,574	1,619	0,63	2,21
11		0,8	2,5	0,641168	0,641693	0,640	0,648	0,25	0,93
12		0,8	5,0	0,322290	0,322290	0,322	0,324	0,10	0,62
13	3	0,2	1,0	2,135611	2,135703	2,116	2,545	0,94	19,15
14		0,2	2,5	0,945895	0,945940	0,942	1,018	0,42	7,61
15		0,2	5,0	0,491135	0,491135	0,489	0,509	0,41	3,67
16		0,8	1,0	0,988777	0,988782	0,985	1,046	0,40	5,76
17		0,8	2,5	0,408981	0,408988	0,408	0,418	0,10	2,20
18		0,8	5,0	0,206834	0,206834	0,206	0,209	0,10	0,97
19	4	0,2	1,0	2,076488	2,076543	2,055	2,400	1,04	15,58
20		0,2	2,5	0,903857	0,903862	0,900	0,960	0,42	6,21
21		0,2	5,0	0,465556	0,465558	0,464	0,480	0,33	3,10
22		0,8	1,0	0,592943	0,592948	0,589	0,600	0,59	1,19
23		0,8	2,5	0,238865	0,238868	0,238	0,240	0,10	0,47
24		0,8	5,0	0,119716	0,119716	0,119	0,120	0,10	0,24

stawiony układ wspornik-próbka ma dwa stopnie swobody, dlatego przy rezonansie stosunek amplitud końca próbki i końca wspornika jest odwrotnie proporcjonalny do dekrementu tłumienia materiału próbki. Tym więc sposobem amplituda drgań końca próbki może być od 100 do 1000 razy

Tablica 4

	μ	γ	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4
			1	2	3	4
A	0		od 0 do 0,7	od 0 do 0,6	od 0 do 0,5	od 0 do 0,4
	0,4		od 0 do 0,8	od 0 do 0,8	od 0 do 0,9	od 0 do 0,8
	1,0		od 0 do 1,0	od 0 do 1,0	od 0 do 0,99	od 0 do 0,99
B	1,0		—	od 0,9 do 1,0	—	od 0,5 do 0,99
	1,667		—	od 0,6 do 1,0	—	od 0,4 do 0,99
	2,5		od 0,7 do 1,0	od 0,4 do 1,0	od 0,8 do 0,99	od 0,1 do 0,99
	5,0		od 0 do 1,0	od 0 do 1,0	od 0 do 0,99	od 0 do 0,99



Rys. 2. Schemat ideowy stanowiska badawczego

większa od amplitudy drgań końca wspornika, co znacznie ułatwia rejestrację drgań.

Do pomiaru częstotliwości drgań własnych próbki wykorzystano metodę drgań rezonansowych, którą zrealizowano za pomocą czujnika 7, miernika drgań 8, oscyloskopu 9 i licznika impulsów 10. W momencie zrównania częstotliwości drgań wymuszonych przez układ wzbudzenia z częstotliwością drgań własnych próbki na ekranie oscyloskopu 9 powstaje elipsa. Przy przechodzeniu przez rezonans obserwuje się przewracanie elipsy. Układ rezonansu elektrycznego LC 3 konieczny jest ze względu na niewystarczającą moc wzmacniacza 2.

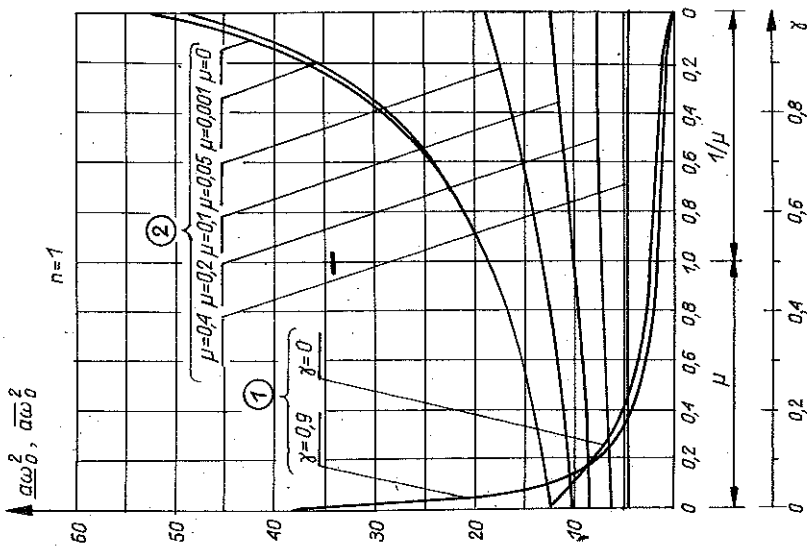
Wyniki przeprowadzonego eksperymentu przytoczono w rubryce 8 tabelicy 2. Różnica między wartościami obliczonymi teoretycznie i wyznaczoną eksperymentalnymi nie przekracza 8%.

5. ANALIZA WPLYWU PARAMETRÓW ZMIENNEGO PRZEKROJU I MASY SKUPIONEJ NA CZĘSTOŚĆ PODSTAWOWĄ

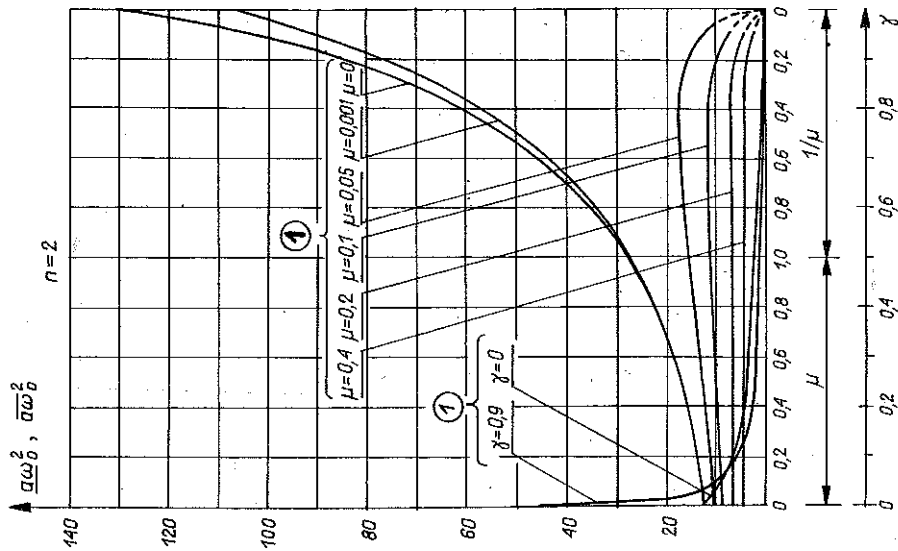
W analizie uwzględniono następujące parametry zmiennego przekroju: n , m , γ , szczegółowo opisane w p. 2, a także parametr μ określający wielkość względną masy skupionej M . Na zamieszczonych niżej wykresach przypadki oznaczone 1, 2, 3, 4 odpowiadają wartościom $n = 1, 2, 3, 4$.

Na rysunkach 3, 4, 5 przedstawiono wykresy zależności częstotliwości podstawowej od stosunku μ przy ustalonych wartościach γ (krzywe 1) oraz zależności częstotliwości podstawowej od parametru zbieżności γ przy wybranych wartościach μ (krzywe 2) dla przypadków 1, 2, 3. Wykresy odpowiadające przypadkowi 4 zamieszczono na rys. 2 w pracy [3].

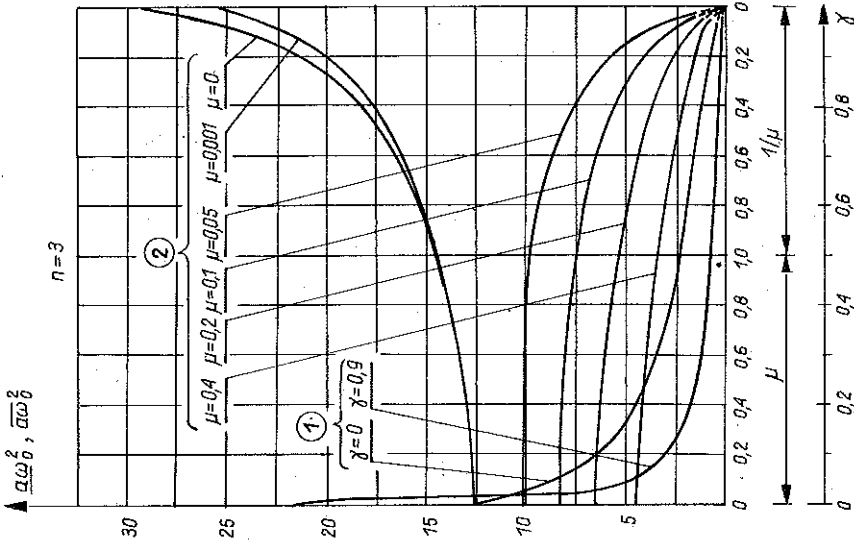
Z wykresów na tych rysunkach wynika, że częstotliwość podstawowa rośnie wraz ze wzrostem parametru zbieżności γ przy $\mu = 0$ i μ bliskich zeru we



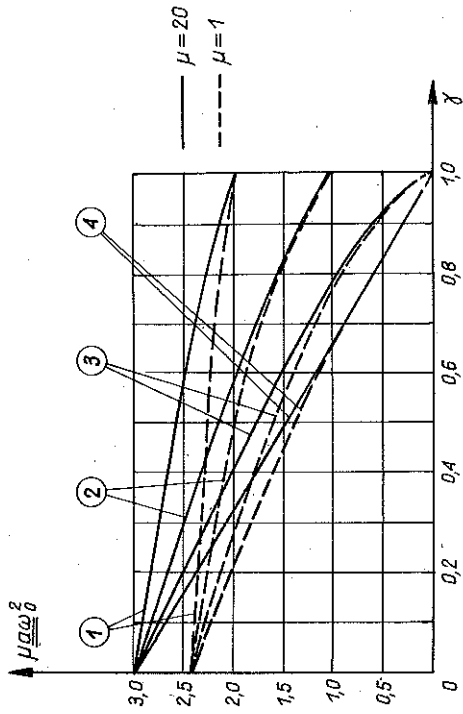
Rys. 3. Wykresy zależności estymatorów $\underline{\omega_0^2}$, $\overline{\omega_\delta^2}$ od γ i μ dla klina z liniowo zmienną szerokością



Rys. 4. Wykresy zależności estymatorów $\underline{\omega_0^2}$, $\overline{\omega_\delta^2}$ od γ i μ dla klina z parabolicznie zmienną szerokością



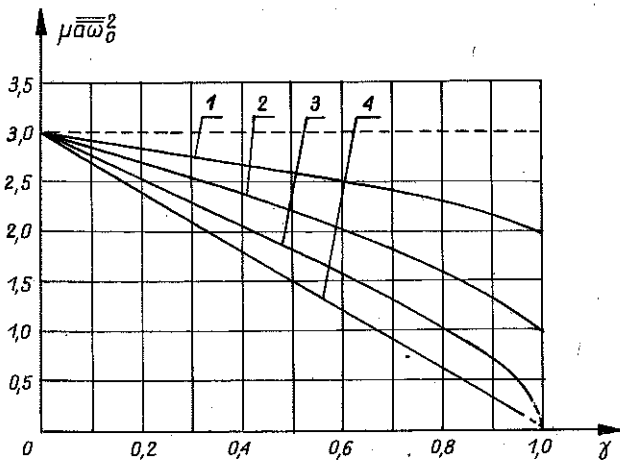
Rys. 5. Wykresy zależności estymatorów $\underline{a\omega_0^2}$, $\underline{\sigma\omega_0^2}$ od γ i μ dla klina z liniowo-zmienną wysokością



Rys. 6. Wykresy zależności zgrubnych estymatorów z dołu $\underline{\mu\omega_0^2}$ od γ

wszystkich czterech przypadkach. Najbardziej intensywny wzrost częstości zachodzi w przypadku 2, najmniej zaś intensywny w przypadku 3. Poczynając od $\mu = 0,05$, ze wzrostem γ częstość maleje i zmierza do zera w przypadkach 2, 3, 4 oraz słabo rośnie w przypadku 1. Oczywiście jest, że przy μ nieco większym od 0,05 częstość maleje i w tym przypadku.

Ze wzrostem μ od 0 do ∞ częstość podstawowa we wszystkich czterech przypadkach maleje do zera. Spadek ten jest bardziej intensywny im większa jest wartość γ . We wszystkich przedstawionych przypadkach krzywe dolnych estymatorów $\underline{a\omega}_0^2$ pokrywają się z krzywymi estymatorów górnych $\overline{a\omega}_0^2$, co wynika również z tablicy 3.



Rys. 7. Wykresy zależności zgrubnych estymatorów z góry $\mu\overline{a\omega}_0^2$ od γ

Wykresy na rys. 6 i 7 ilustrują zależności zgrubnych estymatorów z dołu (w postaci iloczynu $\underline{\mu a\omega}_0^2$) obliczonych na podstawie wzorów (3.4), (3.5) i (3.6) oraz z góry (w postaci iloczynu $\overline{\mu a\omega}_0^2$) obliczonych ze wzorów z tablicy 1 od parametru zbieżności γ dla przypadków 1, 2, 3, 4.

Z wykresów na rys. 6 i 7 widać, że estymatory częstości podstawowej (mnożone przez μ) przy $\gamma \rightarrow 1$ zmierzają do 0 dla przypadków 3 i 4 oraz dążą do wartości 2 i 1 dla przypadków 1, 2. Przy dostatecznie dużych wartościach μ ($\mu \geq 20$) krzywe $\underline{\mu a\omega}_0^2$ (linie ciągłe) z rys. 6 są identyczne z odpowiednimi krzywymi $\overline{\mu a\omega}_0^2$ z rys. 7, jak być powinno.

6. WNIOSKI KOŃCOWE

1. Przedstawione w pracy (analityczna i numeryczna) metody określenia współczynników szeregu charakterystycznego, na podstawie wzorów ogólnych otrzymanych w pracy [3], dają wysoką dokładność we wszystkich rozpatrzo-

nych przypadkach (tablice 2 i 3). Należy oczekiwać, że równie wysoka dokładność obliczeń zostanie osiągnięta w przypadku belek o dowolnie zmiennym przekroju i masą skupioną na końcu. Jedynie przypadki, w których funkcja sztywności na swobodnym końcu zmierza do zera wymagają obliczenia granicznych wartości współczynników szeregu.

2. W rozpatrzonych przypadkach belek i wałów nawet względnie mała masa skupiona umieszczona na ich końcach znacznie obniża częstość podstawową, współczynnik zaś zbieżności γ powoduje wzrost częstości dla belek bez masy lub z bardzo małą masą ($\mu \leq 0,01$), co wynika z rys. 3, 4 i 5. Współczynniki przekroju n i m okazują znaczny wpływ na częstość podstawową tylko przy $\mu = 0$ i bliskich zeru.

3. Zgrubne estymatory z góry, obliczone na podstawie bardzo prostych wzorów z tablicy 1 oraz z dołu, obliczone na podstawie wzorów (3.5) i (3.6) wyprowadzonych ze wzoru Dunkerle'a (3.4) dają dobrą dokładność obliczeń (do 5%) dla wielu praktycznych przypadków, które spełniają warunki z tablicy 4. Wzory z tablicy 1 dają dobre przybliżenie przy $\mu \geq 5$, wzory zaś (3.5) i (3.6) dają bliskie przybliżenie do wartości dokładnej przy dowolnych wartościach μ . Wzór (3.3) może być stosowany, gdy $\gamma > 0,2$ i $\mu > 5$.

4. Obliczone w pracy estymatory częstości podstawowej zgadzają się z odpowiednimi wartościami ścisłymi i przybliżonymi, które zostały podane w pracach [1 i 2] dla klina i stożka liniowego przy $\gamma = 1$ i $\mu = 0$. Wyniki przeprowadzonego eksperymentu potwierdzają wysoką dokładność zastosowanej metody i wyprowadzonych w pracy wzorów obliczeniowych. Zaproponowane w pracy proste wzory obliczeniowe mogą być stosowane w praktyce inżynierskiej.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. E. FETLIS, *Torsional vibration modes of tapered bars*. J. Appl. Mech., **19**, 220, 1962.
2. M. H. COBBLE, *Finite transform solution of the general conical cantilever beams problem*, Proc. 4th Techn. Meet Soc. Eng. Sci, Raleigh, New York, 453-461, 1966, Recent Adv. Eng., **3**, 1968.
3. J. JAROSZEWICZ, L. ZORYJ, *Drgania giętne belki wspornikowej o zmiennym przekroju*, Rozpr. Inżyn., **33**, 4, 537-547, 1985.
4. Л. М. Зорий, *Об универсальных характеристических уравнениях в задачах колебаний и устойчивости упругих систем*, Механика Твёрдого Тела, **6**, стр. 155-162, 1982.
5. С. А. БЕРНШТЕЙН, К. К. КЕРОПЯН, *Определение частот колебаний стержневых систем методом спектральной функции*, Госстройиздат., 281 стр., Москва 1960.

РЕЗЮМЕ

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ НА ИЗГИБНЫЕ
КОЛЕБАНИЯ БАЛОК И КОНСОЛЬНЫХ ВАЛОВ

Исследовано влияние параметров переменного сечения балок и консольных валов, а также влияние сосредоточенной массы, закрепленной на их концах, на основную частоту изгибных колебаний. Рассмотрены балки в форме линейного клина и параболического клина, а также конуса и пирамиды с квадратной основой. Разработаны численный и аналитический методы определения коэффициентов характеристического ряда на основе общих формул, полученных в работе [3]. Предложены, выгодные для инженерской практики, формулы для вычисления верхних и нижних оценок основной частоты колебаний перечисленных балок. Приведены условия применимости этих формул. Сравнение теоретических и экспериментальных результатов подтверждает высокую точность вычислений.

SUMMARY

EFFECTS OF VARIABLE CROSS-SECTIONS OF CERTAIN CANTILEVER
BEAMS AND SHAFTS IN THE ANALYSIS OF FLEXURAL VIBRATIONS

Fundamental vibration frequencies of cantilever beams and shafts are determined; the beams have variable cross-sections and are loaded by concentrated masses attached to their ends. The beams considered have the form of linear or parabolic wedges and a pyramid with a square base; the shaft has the form of a cone. Analytical and numerical method of determining the coefficients of characteristic series is based on the general formulae derived in [3]. Upper and lower estimates of the fundamental vibration frequencies are found from simple, engineering-type formulae, their applicability ranges being determined. High accuracy of the method proposed is confirmed by experimental data.

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA
INSTYTUT MECHANIKI

LWOWSKI POLITECHNICZNY INSTYTUT
WYDZIAŁ BUDOWY MASZYN

Praca została złożona w Redakcji w dniu 9 października 1986 r.