

OPTYMALIZACJA DYSKRETNA REGULARNYCH KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH PRZY UWZGLĘDNIENIU WARUNKÓW UTRATY STATECZNOŚCI

MARIUSZ P Y R Z (WARSZAWA)

Przedmiotem pracy jest optymalizacja dyskretna regularnych konstrukcji prętowych przy uwzględnieniu warunków utraty stateczności. Jako kryterium optymalizacji przyjęto minimum ciężaru materiału prętów. Zmiennymi decyzyjnymi są pola przekrojów poprzecznych prętów dobierane z danego, skończonego katalogu. W warunkach ograniczających uwzględniono możliwość wystąpienia różnych postaci utraty stateczności. Zadanie optymalizacji rozwiązano przy wykorzystaniu metody przeglądu według rosnących wartości funkcji celu. Przedstawiono przykłady obliczeniowe dla różnych typów konstrukcji.

1. WSTĘP

Konstrukcje zbudowane z dużej liczby jednakowych lub podobnych prętów, charakteryzujące się regularnością kształtów i rozmieszczenia elementów, znajdują szerokie zastosowanie w różnych dziedzinach techniki. Często poddane są one działaniu obciążeń powodujących możliwość utraty stateczności. Poniższe rozważania dotyczą problemu optymalizacji prętowych, regularnych układów konstrukcyjnych przy uwzględnieniu warunków utraty stateczności. W większości prac dotyczących optymalizacji zakłada się ciągłość zmiennych decyzyjnych charakteryzujących elementy konstrukcji takich, jak pola przekrojów poprzecznych czy momenty bezwładności. W budownictwie regularnych konstrukcji prętowych zazwyczaj wykorzystuje się produkowane seryjnie typowe pręty i w praktyce mamy do czynienia z dyskretnym, ograniczonym zestawem dopuszczalnych przekrojów. Przedmiotem pracy jest podanie efektywnego algorytmu optymalnego składania projektowanego obiektu ze skatalogowanych elementów. Jako kryterium optymalizacji przyjęto minimum ciężaru materiału prętów konstrukcji. Zadanie optymalizacji sformułowano w zmiennych dyskretnych, którymi są pola powierzchni przekrojów poprzecznych prętów dobierane ze skończonego katalogu.

Problemom optymalizacji sprężystych konstrukcji prętowych przy uwzględnieniu warunków stateczności poświęcone są między innymi prace [13 i 20], w których obciążenie krytyczne wyznaczano posługując się metodą elementów

skończonych. Regularność konstrukcji pozwala na znaczne ograniczenie trudności obliczeniowych, związanych z występowaniem dużej liczby elementów. Analiza stateczności regularnych konstrukcji prętowych przy wykorzystaniu rachunku różnic skończonych przedstawiona została w pracach [1, 6, 9 i 21].

W wielu przypadkach optymalnego kształtowania elementów konstrukcyjnych na podstawową wartość własną (częstość drgań własnych lub siłę krytyczną) okazało się, że optymalnie zaprojektowany na pierwszą wartość własną element lub układ konstrukcyjny może posiadać taką samą, bądź nawet niższą wartość drugiej wartości własnej, związanej z wyższą formą drgań lub postacią wybożenia [4, 14 i 16]. Dlatego w dalszych rozważaniach nie ograniczono się do sprawdzenia wartości obciążenia krytycznego dla jednej, najbardziej prawdopodobnej dla danej konstrukcji postaci utraty stateczności, ale analizowano możliwość wybożenia dla kilku różnych form.

Rozpatrywany problem optymalizacji sprowadza się do nieliniowego, dyskretno-ciągłego zadania programowania matematycznego, które rozwiązano wykorzystując metodę przeglądu według rosnących wartości funkcji celu [3, 7 i 10]. Metoda ta wymaga co prawda liniowej funkcji celu, ale należy do klasy metod kombinatorycznych, umożliwiających znalezienie rozwiązania optymalnego przy dokonaniu częściowego, niepełnego przeglądu możliwych rozwiązań.

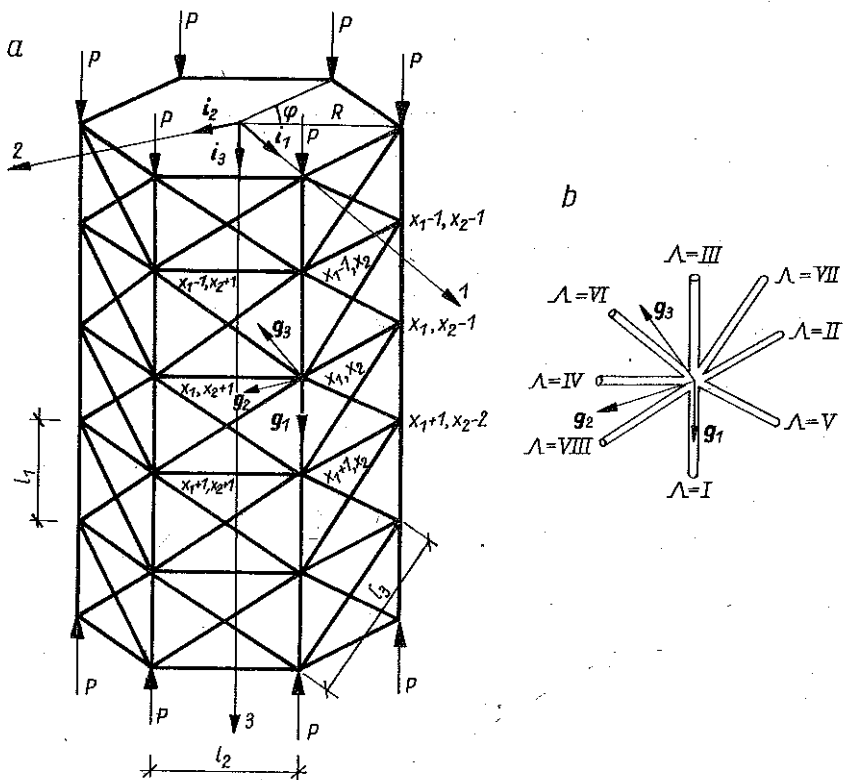
Należy zwrócić uwagę na odrębność sformułowanego problemu w porównaniu z dużą liczbą prac dotyczących optymalizacji ustrojów konstrukcyjnych przy uwzględnieniu warunków stateczności, w których maksymalizuje się wartość własną (siła krytyczna $P_{kr} \rightarrow \max$) przy spełnieniu ograniczeń geometrycznych na minimalne i maksymalne pola powierzchni przekrojów oraz warunku ograniczającym w postaci ustalonej objętości [16 i 20]. W rozważanym zadaniu funkcją celu jest ciężar materiału prętów ($W \rightarrow \min$) przy warunku stateczności $P_{kr} \geq P$, gdzie P oznacza dane obciążenie zewnętrzne (podobnie jak w [12 i 13]) oraz warunku dyskretności zmiennych decyzyjnych.

W przypadku analizy statycznej konstrukcji można wskazać wiele prac dotyczących optymalizacji przy wykorzystaniu dyskretnego katalogu zmiennych decyzyjnych [2, 3, 8, 17, 19 i 22], natomiast trudne staje się podanie literatury dotyczącej optymalizacji dyskretniej konstrukcji dla zagadnień stateczności.

2. STATECZNOŚĆ REGULARNYCH KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH

2.1. Geometria konstrukcji

Przyjęty w [1 i 9] matematyczny model ośrodka dyskretnego w postaci siatki punktów pozwala na opisanie punktów węzłowych konstrukcji liczbami całkowitymi przy jednoczesnej możliwości zmiany układu współrzędnych.



Rys. 1

Położenie węzła konstrukcji w przestrzeni określone jest wektorem x , którego składowe w kartezjańskim układzie współrzędnych i_j ($j = 1, 2, 3$) określone są jako funkcje dwóch argumentów całkowitych x_1 i x_2 . Dla prętowej powłoki prostopadłościowej o podstawie regularnego wielokąta (rys. 1a) wektor x można przedstawić następująco:

$$(2.1) \quad x = R \cos(x_2 \varphi) i_1 + R \sin(x_2 \varphi) i_2 + x_1 l_1 i_3,$$

gdzie R oznacza promień koła opisanego na podstawie prostopadłościanu oraz l_1 długość prętów wzdłuż tworzącej zaś $\varphi = 2\pi/L_2$. Konstrukcja zbudowana jest z L_1 segmentów ($x_1 = 0, 1, \dots, L_1$), a podstawa powłoki jest L_2 -kątem foremnym ($x_2 = 1, 2, \dots, L_2$), którego pręty mają długość l_2 .

Niżej podano definicje podstawowych operatorów różnicowych [9 i 11] używanych w dalszych wzorach. Operator przesunięcia E_n^p powoduje przesunięcie argumentu x_n funkcji o wielkość p (p oznacza liczbę całkowitą dodatnią lub ujemną) i jest ogólnie określony w następujący sposób

$$(2.2) \quad E_n^p f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = \\ = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + p, x_{n+1}, \dots, x_m).$$

Dla przypadku dwóch zmiennych x_1, x_2 mamy

$$(2.3) \quad E_1^{p_1} E_2^{-p_2} f(x_1, x_2) = f(x_1 + p_1, x_2 - p_2).$$

Operatory różnicy określone są za pomocą wzorów

$$(2.4) \quad \Delta_p = E_1^p - 1, \quad \bar{\Delta}_p = E_1^p - E_1^{-p},$$

operatory zaś sumy

$$(2.5) \quad \nabla_p = E_1^p + 1, \quad \bar{\nabla}_p = E_1^p + E_1^{-p},$$

Jeżeli $p = 1$, to symbol ten jest opuszczany.

Posłużono się ponadto następującymi operatorami:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \Delta_{12}^2 &= E_1 E_2 + E_1^{-1} E_2^{-1} - 2, & \bar{\Delta}_{12}^{*2} &= E_1 E_2^{-1} + E_1^{-1} E_2 - 2, \\ \bar{\Delta}_{12}^2 &= E_1 E_2 - E_1^{-1} E_2^{-1}, & \bar{\Delta}_{12}^{*2} &= E_1^{-1} E_2 + E_1 E_2^{-1}, \\ \nabla_{12}^2 &= E_1 E_2 + E_1^{-1} E_2^{-1} + 2, & \bar{\nabla}_{12}^{*2} &= E_1 E_2^{-1} + E_1^{-1} E_2 + 2. \end{aligned}$$

W ogólnym przypadku w węźle konstrukcji zbiega się A_0 prętów. Lokalny układ odniesienia związany z rozpatrywanym węzłem, złożony z trzech liniowo niezależnych wektorów bazy \mathbf{g}_k zdefiniowano następująco

$$(2.7) \quad \mathbf{g}_\alpha = \frac{A_{2\alpha} \mathbf{x}}{|A_{2\alpha} \mathbf{x}|}, \quad \alpha = 1, 2, \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{|\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2|}.$$

Typowy, powtarzalny węzeł prostopadłościenną powłoki prętowej ($A_0 = \text{VIII}$) pokazany został na rys. 1b.

Wektor przesunięcia dowolnego węzła konstrukcji pod wpływem obciążenia oznaczono przez \mathbf{u} , wektor nieskońcześnie małego kąta obrotu przez \mathbf{v} . W układzie odniesienia \mathbf{g}_i można je przedstawić następująco:

$$(2.8) \quad \mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{v} = v^i \mathbf{g}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

2.2. Równania równowagi węzła

Regularność konstrukcji umożliwia ograniczenie się do jednego, powtarzalnego węzła konstrukcji. Przyjęto następujące założenia: Zakres rozważań dotyczy konstrukcji idealnych, bez wstępnych niedokładności, zbudowanych z prostych prętów pryzmatycznych zbiegających się w węzłach w taki sposób, że ich osie obojętne przecinają się w jednym punkcie. Przemieszczenia poszczególnych punktów osi prętów są małe w stosunku do długości tych prętów. Pominięto wpływ sił poprzecznych na zginanie prętów. Przyjęto hipotezę

plaskich przekrojów i zasadę zeszywnienia. Nie uwzględnia się również zmian przekrojów poprzecznych. Obciążenie zewnętrzne siłami skupionymi przyłożone jest w sposób statyczny dokładnie w węzłach konstrukcji. Materiał prętów jest idealnie sprężysty, izotropowy i jednorodny o stałych sprężystości E , G i naprężeniu dopuszczalnym σ_R .

Równania równowagi pojedynczego, powtarzalnego węzła otrzymamy sumując w lokalnym układzie współrzędnych g_i wypadkowe siły i momenty działające na dany węzeł. Związki między siłami występującymi w przecię a przemieszczeniami na jego końcach wyrażają wzory metody odkształceń [5], uwzględniające również wpływ dużych sił osiowych.

Przy wyprowadzeniu równań równowagi pojedynczego węzła powłoki prętowej (rys. 1a) poczyniono następujące założenia: 1) sztywności i długości prętów wzdłuż tworzącej (prętów pasów) $A = I$ i III są jednakowe (oznaczono je indeksem $\lambda = 1$); 2) sztywności i długości prętów obwodowych (prętów wręg) $A = II$ i IV są jednakowe ($\lambda = 2$); 3) sztywności i długości prętów wykrzyżowań (krzyżulców) $A = V-VIII$ są jednakowe ($\lambda = 3$); 4) pręty są połączone sztywno w węzłach; 5) sztywność giętna prętów wykrzyżowań jest na tyle mała, że wystarczy uwzględnić wyłącznie ich sztywność osiową, 6) działaniu dużych sił osiowych P podlegają jedynie pręty pasów $A = I$ i III ; siły wewnętrzne pochodzące od P w prętach wręg i wykrzyżowań są małymi wyższego rzędu w porównaniu z P .

Po wykorzystaniu wzorów metody odkształceń i przyjęciu założenia, że na węzeł konstrukcji nie działa obciążenie zewnętrzne, otrzymujemy następujący układ sześciu równań różnicowych opisujących stateczność prostopadłościenną powłoki prętowej (rys. 1a), poddanej działaniu sił ściskających P :

$$\begin{aligned}
 & [c_1 A_1^2 + 12\tilde{k}_2 A_2^2 + c_3 S_1^2 (A_{12}^2 + A_{12}^{*2})] u^1 + \\
 & + c_3 \cos \frac{\varphi}{2} S_1 S_2 (A_{12}^2 - A_{12}^{*2}) u^2 - c_3 \sin \frac{\varphi}{2} S_1 S_2 (A_{12} - A_{12}^*) u^3 + \\
 & + 6\tilde{k}_2 l_2 \sin \frac{\varphi}{2} A_2^2 v^2 + 6\tilde{k}_2 l_2 \cos \frac{\varphi}{2} A_2 v^3 = 0, \\
 & c_3 S_1 S_2 \cos \frac{\varphi}{2} (A_{12}^2 - A_{12}^{*2}) u^1 + \left[\tilde{k}_1 \bar{D}_4 A_1^2 - 12\tilde{k}_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \bar{V}_2^2 + \right. \\
 & \left. + c_2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} A_2^2 + c_3 S_2^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} (A_{12}^2 + A_{12}^{*2}) \right] u^2 - \\
 & - [(12\tilde{k}_2 + c_2) A_2 + c_3 S_2^2 (A_{12} + A_{12}^*)] \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} u^3 + \\
 & + 6\tilde{k}_2 l_2 \sin \frac{\varphi}{2} \bar{V}_2^2 v^1 - l_1 \tilde{k}_1 \bar{D}_3 A_1 v^3 = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.9) \quad & c_3 S_1 S_2 \sin \frac{\varphi}{2} (\bar{A}_{12} - \bar{A}_{12}^*) u^1 + [12(\bar{k}_2 + c_2) \bar{A}_2 + \\
& + c_3 S_2^2 (\bar{A}_{12} + \bar{A}_{12}^*)] \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} u^2 + \left[12\bar{k}_2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \bar{A}_2^2 + \bar{k}_1 D_4 \bar{A}_1^2 - \right. \\
& \left. - c_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \bar{V}_2^2 - c_3 S_2^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} (\bar{V}_{12}^2 + \bar{V}_{12}^{*2}) \right] u^3 - \\
& - 6\bar{k}_2 l_2 \cos \frac{\varphi}{2} \bar{A}_2 v^1 + \bar{k}_1 l_1 D_3 \bar{A}_1 v^2 = 0, \\
& - 6\bar{k}_2 l_2 \sin \frac{\varphi}{2} \bar{V}_2^2 u^2 - 6\bar{k}_2 l_2 \cos \frac{\varphi}{2} \bar{A}_2 u^3 + \\
& + [2\bar{k}_2 l_2^2 (\bar{A}_2^2 + 6) - k_1 \bar{A}_1^2] v^1 = 0, \\
& - 6\bar{k}_2 l_2 \sin \frac{\varphi}{2} \bar{A}_2^2 u^1 + \bar{k}_1 l_1 D_3 \bar{A}_1 u^3 + \left[-2\bar{k}_2 l_2^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} (\bar{A}_2^2 - 2) + \right. \\
& \left. + \bar{k}_1 l_1^2 (2D_1 + D_2 \bar{V}_1) - k_2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \bar{A}_2^2 \right] v^2 + \\
& + [-2\bar{k}_2 l_2^2 \bar{A}_2 + k_2 \bar{A}_2] \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} v^3 = 0, \\
& 6\bar{k}_2 l_2 \cos \frac{\varphi}{2} \bar{A}_2 u^1 - \bar{k}_1 l_1 \bar{D}_3 \bar{A}_1 u^2 + [2\bar{k}_2 l_2^2 \bar{A}_2 - k_2 \bar{A}_2] \times \\
& \times \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} v^2 + \left[\bar{k}_1 l_1^2 (2\bar{D}_1 + \bar{D}_2 \bar{V}_1) + \right. \\
& \left. + 2\bar{k}_2 l_2^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} (\bar{A}_2^2 + 6) + k_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \bar{V}_2^2 \right] v^3 = 0,
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
(2.10) \quad & k_\lambda = \frac{GJ_\lambda}{l_\lambda}, \quad \bar{k}_\lambda = \frac{E\bar{I}_\lambda}{l_\lambda^3}, \quad \check{k}_\lambda = \frac{E\check{I}_\lambda}{l_\lambda^3}, \\
& c_\lambda = \frac{EA_\lambda}{l_\lambda}, \quad S_1 = \frac{l_1}{(l_1^2 + l_2^2)^{1/2}}, \quad S_2 = \frac{l_1}{(l_1^2 + l_2^2)^{1/2}},
\end{aligned}$$

przy czym E i G — oznaczają odpowiednio moduły Younga i Kirchhoffa, l_λ — długość pręta ($\lambda = 1, 2, 3$), $\bar{I}_\lambda, \check{I}_\lambda$ — momenty bezwładności przekroju poprzecznego pręta oraz J_λ geometryczną sztywność skręcania pręta. Współczynniki wyrażające wpływ dużych sił osiowych P na siły wewnętrzne w pręcie dane są za pomocą wzorów

$$(2.11) \quad D_1 = \frac{\alpha (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{2 (1 - \cos \alpha) - \alpha \sin \alpha}, \quad D_2 = \frac{\alpha (\alpha - \sin \alpha)}{2 (1 - \cos \alpha) - \alpha \sin \alpha},$$

$$D_3 = \frac{\alpha^2 (1 - \cos \alpha)}{2 (1 - \cos \alpha) - \alpha \sin \alpha}, \quad D_4 = \frac{\alpha^3 \sin \alpha}{2 (1 - \cos \alpha) - \alpha \sin \alpha},$$

$$\alpha = \left(\frac{P l_\lambda^2}{E \tilde{I}_\lambda} \right)^{\frac{1}{2}},$$

współczynniki \bar{D}_k ($k = 1, 2, 3, 4$) zbudowane są podobnie jak (2.11) z tym zastrzeżeniem, że zamiast współczynnika α występuje

$$(2.12) \quad \bar{\alpha} = \left(\frac{P l_\lambda^2}{E \tilde{I}_\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Przy pominięciu w (2.9) operatorów oznaczonych gwiazdką otrzymuje się równania powłoki prętowej z pojedynczym wykrzyżowaniem (tzn. przy pominięciu prętów $A = VII$ i $VIII$ na rys. 1b). Przyjęcie $c_3 = 0$ prowadzi do układu równań dla powłoki prętowej bez wykrzyżowań (pominięcie prętów $A = V-VIII$). Przyjmując natomiast $c_3 = 0$ i $\varphi/2 = 0$ otrzymamy jako szczególny przypadek układ równań opisujących stateczność ortogonalnej płyty prętowej, ściskanej w jednym kierunku. Równania stateczności dla płyty prętowej poddanej ściskaniu w dwóch kierunkach można otrzymać odpowiednio modyfikując (2.9).

2.3. Wyznaczanie obciążenia krytycznego

Rozwiązanie problemu stateczności regularnych konstrukcji prętowych polega na znalezieniu spełniających warunki brzegowe funkcji, opisujących wywołany działającym obciążeniem stan przemieszczenia punktów konstrukcji. Wstawienie tych funkcji do różnicowych równań równowagi pojedynczego, powtarzalnego węzła (2.9) prowadzi po przekształceniach do układu jednorodnych równań algebraicznych:

$$(2.13) \quad \mathbf{w} [U^1 U^2 U^3 V^1 V^2 V^3]^T = 0,$$

gdzie U^i , V^i ($i = 1, 2, 3$) oznaczają niewiadome współczynniki opisujące postać utraty stateczności oraz \mathbf{w} macierz współczynników przy niewiadomych.

Rozwiązanie układu równań (2.13) będzie miało sens, gdy wyznacznik charakterystyczny ze współczynników przy niewiadomych będzie równy zero:

$$(2.14) \quad \det [\mathbf{w}] = 0.$$

W wyznaczniku tym jedyną niewiadomą jest wielkość siły osiowej P zawarta we wzorach (2.11). Rozwiązanie równania (2.14) da zatem siłę P powodującą utratę stateczności konstrukcji przy założonej uprzednio postaci utraty sta-

teczności. W zagadnieniach stateczności regularnych konstrukcji prętowych podobnie jak w stateczności klasycznych płyt i powłok [18] przyjmuje się często postać wybożenia w formie funkcji trygonometrycznych.

3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU OPTIMALIZACJI

Badany problem polega na określeniu optymalnego doboru elementów regularnych konstrukcji prętowych o danej geometrii i wartości obciążenia tak, aby przyłożone obciążenie zewnętrzne było mniejsze od obciążenia krytycznego, powodującego utratę stateczności konstrukcji. Funkcją celu w zadaniu optymalizacji jest ciężar materiału prętów W . Przekroje prętów dobierane są z danego, skończonego katalogu. Obciążenie krytyczne wyznaczone jest dla różnych, najbardziej prawdopodobnych postaci wybożenia. Konstrukcja podzielona została na k stref odpowiadających prętom o jednakowych przekrojach, długościach i sztywnościach.

Zagadnienie optymalizacji sformułowano następująco:
funkcja celu (ciężar materiału prętów)

$$(3.1) \quad W(A_1, A_2, \dots, A_k) = \sum_{i=1}^k l_i N_i A_i \gamma_i \rightarrow \min,$$

ograniczenia:

warunek wytrzymałości

$$(3.2) \quad \sigma_i(A_i) \leq \sigma_R,$$

warunek stateczności

$$(3.3) \quad R_{kr}(A_1, A_2, \dots, A_k) \geq P,$$

oraz warunek dyskretności zmiennych (skończony katalog q prętów)

$$(3.4) \quad A_i \in \{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_q\},$$

gdzie indeks i oznacza numer strefy ($i = 1, 2, \dots, k$), A_i pole powierzchni przekroju pręta, l_i długość pręta, γ_i ciężar właściwy materiału pręta, σ_i naprężenie w pręcie, N_i liczbę prętów w i -tej strefie, σ_R graniczną wytrzymałość pręta, P wartość obciążenia zewnętrznego oraz R_{kr} wartość obciążenia krytycznego. Zmiennymi decyzyjnymi są przekroje prętów A_i w poszczególnych strefach, a parametry stałe to wymiary globalne i długości elementów konstrukcji oraz wartość obciążenia zewnętrznego P .

Problem optymalizacji (3.1)–(3.4) sprowadzono do zadania programowania całkowitoliczbowego poprzez wprowadzenie zmiennych boolowskich w następujący sposób:

$$(3.5) \quad z_j^i = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli na miejsce pręta konstrukcji z } i\text{-tej strefy} \\ & \text{wybrano } j\text{-ty pręt z katalogu,} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Wówczas

$$(3.6) \quad A_i = \sum_{j=1}^q \bar{A}_j z_j^i, \quad i = 1, \dots, k,$$

przy warunku

$$(3.7) \quad \sum_{j=1}^q z_j^i = 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

Funkcję celu zagadnienia optymalizacji można więc napisać w postaci

$$(3.8) \quad W(z_j^i) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^q l_i N_i z_j^i \bar{A}_j \gamma_i \rightarrow \min,$$

przy ograniczeniach

$$(3.9) \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_i(z_j^i) \leq \sigma_R \\ P_{kr}(z_j^i) \geq P \\ z_j^i \in \{0; 1\} \end{array} \right\} \text{ dla } \begin{array}{l} i = 1, \dots, k, \\ j = 1, \dots, q; \end{array}$$

$$(3.12) \quad \sum_{j=1}^q z_j^i = 1 \quad \text{dla } i = 1, \dots, k.$$

Przy takim sformułowaniu pola przekrojów prętów \bar{A}_j są parametrami stałymi, zmiennymi decyzyjnymi są natomiast z_j^i . Problem optymalizacji opisany jest liniową funkcją celu, lecz występuje nieliniowe ograniczenie (3.10). Zmienne z_j^i są dyskretne, natomiast ograniczenia (3.9) i (3.10) mają charakter ciągły. Mamy więc do czynienia z nieliniowym, dyskretno-ciągłym zadaniem programowania matematycznego o zmiennych zero-jedynkowych. Liczba zmiennych decyzyjnych zwiększyła się co prawda z k do kq , ale pozwala to na zastosowanie jednego z algorytmów optymalizacji kombinatorycznej, np. metody przeglądu według rosnących wartości funkcji celu.

4. METODA PRZEGLĄDU

Wykorzystanie metod kombinatorycznych do rozwiązania zadań programowania dyskretnego polega na stosowaniu takich algorytmów, aby rozwiązanie optymalne uzyskać dokonując jedynie częściowego, niepełnego przeglądu możliwych kombinacji rozwiązań. Jedną z takich metod jest podana

w pracach [3] i [7] metoda przeglądu według rosnących wartości funkcji celu, której ogólny algorytm zostanie tutaj przedstawiony.

Zadanie optymalizacji

$$(4.1) \quad Z = \sum_{j=1}^n c_j y_j \rightarrow \min,$$

$$(4.2) \quad \mathbf{y} \in D,$$

gdzie $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_n)$, y_j całkowite ($j = 1, \dots, n$), $c_j \geq 0$, ($j = 1, \dots, n$), $D \subset N^n$, oznacza zbiór określony przez ograniczenia.

Rozwiązanie zadania optymalizacji polega na utworzeniu rosnącego (w szczególnym przypadku niemalejącego) ciągu wartości funkcji celu

$$(4.3) \quad \{Z^0, Z^1, Z^2, \dots\},$$

zdefiniowanego w następujący sposób:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} Z: \bigvee_{\mathbf{y}^0 \in D} Z(\mathbf{y}^0) = Z^0 \wedge \bigwedge_{\mathbf{y} \in D, \mathbf{y} \neq \mathbf{y}^0} Z(\mathbf{y}) \geq Z(\mathbf{y}^0), \\ Z^i: \bigvee_{\mathbf{y}^i \in D} Z(\mathbf{y}^i) = Z^i \wedge \bigwedge_{i \geq j} Z^i \geq Z^j \wedge \bigwedge_{\substack{\mathbf{y} \in D, \mathbf{y} \neq \mathbf{y}^j \\ j=1, \dots, i-1}} Z(\mathbf{y}) \geq Z(\mathbf{y}^j). \end{aligned}$$

Drugim ciągiem otrzymanym w wyniku konstrukcji ciągu (4.3) jest ciąg wektorów zmiennych decyzyjnych, odpowiadających poszczególnym wartościom funkcji celu

$$(4.5) \quad \{\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1, \dots\}, \quad \mathbf{y}^i = (y_1^i, y_2^i, \dots, y_n^i),$$

o następujących własnościach

$$(4.6) \quad \bigwedge_{\mathbf{y} \in D} Z(\mathbf{y}) \geq Z(\mathbf{y}^0) \wedge \bigwedge_{i > 0} \bigwedge_{\substack{\mathbf{y} \neq \mathbf{y}^j \\ j=0, 1, \dots, i-1}} Z(\mathbf{y}) \geq Z(\mathbf{y}^i).$$

Wynika stąd następujący fakt. Jeżeli m jest najmniejszą wartością $j \in N$, spełniającą warunek (4.2)

$$(4.7) \quad m := (\min j \in N : \mathbf{y}^m \in D),$$

to rozwiązaniem zadania optymalizacji (4.1), (4.2) jest

$$(4.8) \quad Z^{\min} = Z(\mathbf{y}^m), \quad \mathbf{y}^{\min} = \mathbf{y}^m.$$

Szczegółowy algorytm tworzenia ciągu (4.3) podany jest w [3 i 7]. W procesie konstrukcji ciągu (4.3) po każdym kroku sprawdza się, czy zmienne decyzyjne spełniają warunek ograniczający (4.2). Rozwiązaniem optymalnym jest pierwsza taka wartość Z^k , dla której zmienne decyzyjne \mathbf{y}^k spełniają (4.2).

5. PRZYKŁADY OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

We wszystkich przykładach przyjęto $E = 20500 \text{ kN/cm}^2$, $G = 8000 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_R = 21,5 \text{ kN/cm}^2$, $\gamma = 78,5 \text{ kN/m}^3$. Wartość siły krytycznej P_{kr} wyznaczano rozwiązując iteracyjnie równanie nieliniowe (2.14). Przy sprawdzaniu warunku (3.9) przyjęto założenie, że naprężenia wywołane w pręcie przez momenty zginające i skręcające są małe w porównaniu z naprężeniem normalnym, pochodzącym od siły osiowej P . Przyjęcie małej liczby przekrojów w katalogu wynika z chęci porównania otrzymanych wyników z metodą pełnego przeglądu.

5.1. Płyta prętowa ściskana w jednym kierunku

Problem optymalizacji dotyczy swobodnie podpartej na brzegach, ortogonalnej płyty prętowej przedstawionej na rys. 2a. Obliczenia wykonano dla dwóch pięcioelementowych katalogów prętów o przekrojach okrągłych:

$$\text{katalog I} \quad A_i [\text{cm}^2] \in \{0,785; 3,14; 7,07; 12,57; 19,64\},$$

$$\text{katalog II} \quad A_i [\text{cm}^2] \in \{1,13; 1,54; 2,01; 2,54; 3,14\}.$$

Bardziej „gęsty” katalog II przyjęto w celu porównania wyników dla różnych zbiorów przekrojów prętów.

Konstrukcję podzielono na dwie strefy sztywności A_1 i A_2 . Funkcja celu (3.8) przybiera postać

$$(5.1) \quad W = \sum_{j=1}^{q=5} [l_1 L_1 (L_2 + 1) z_j^1 + l_2 L_2 (L_1 + 1) z_j^2] \bar{A}_j \gamma.$$

W przypadku wyboczenia płyty z płaszczyzny utrata stateczności zachodzi przez ugięcie prętów w kierunku prostopadłym do płaszczyzny konstrukcji. Powierzchnię wyboczenia można przedstawić w postaci następujących funkcji, opisujących przemieszczenia i kąty obrotu poszczególnych węzłów:

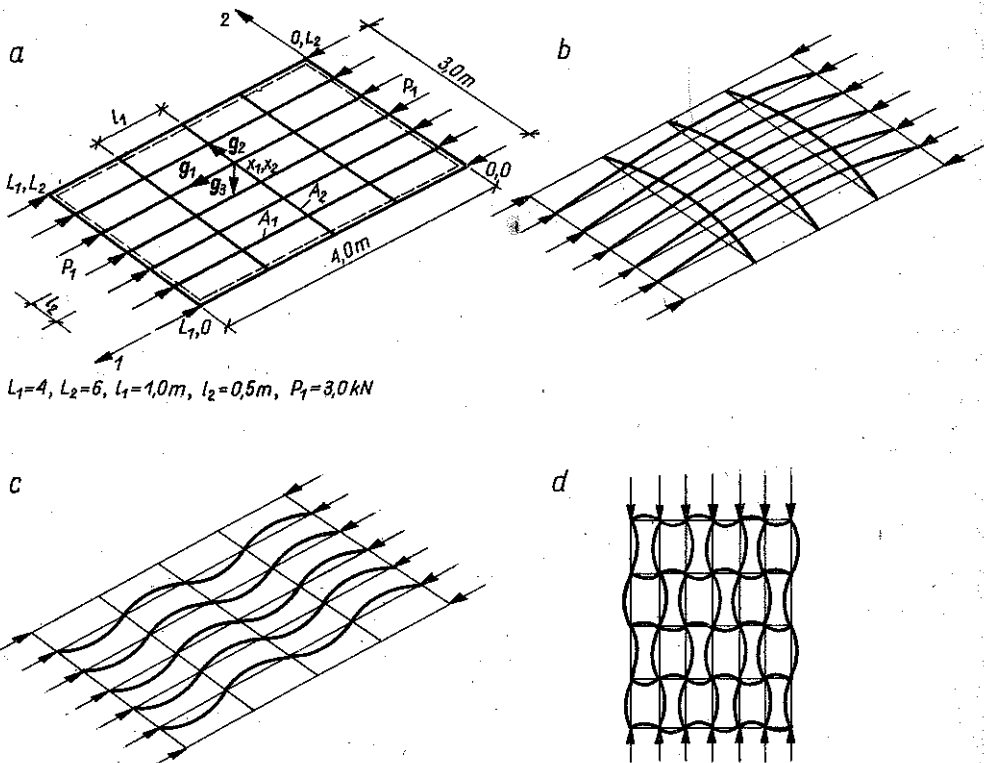
$$(5.2) \quad \begin{aligned} u^3 &= U^3 \sin \frac{m\pi}{L_1} x_1 \sin \frac{n\pi}{L_2} x_2, \\ v^1 &= V^1 \sin \frac{m\pi}{L_1} x_1 \cos \frac{n\pi}{L_2} x_2, \\ v^2 &= V^2 \cos \frac{m\pi}{L_1} x_1 \sin \frac{n\pi}{L_2} x_2, \end{aligned}$$

gdzie L_1 , L_2 oznaczają liczbę prętów w kierunku x_1 i x_2 , m , n liczbę półfal w kierunku x_1 i x_2 opisującą postać wyboczenia oraz U^3 , V^1 , V^2 współczynniki charakteryzujące postać wyboczenia.

Wyboczenie z płaszczyzny opisują odpowiednio przekształcone równania (2.9)₃, (2.9)₄ i (2.9)₅. Funkcje (5.2) spełniają warunki swobodnego podparcia na brzegach. Otrzymane wyniki pokrywają się z wartościami uzyskanymi na podstawie [15]. Przypadek wyboczenia płyty prętowej w płaszczyźnie, gdy występuje ugięcie prętów w kierunku płaszczyzny konstrukcji, opisany jest przez zmodyfikowane równania (2.9)₁, (2.9)₂, (2.9)₆ i przy opisie pola przemieszczeń poszczególnych węzłów posłużono się funkcjami

$$(5.3) \quad \begin{aligned} v^3 &= V^3 \cos \frac{m\pi}{L_1} x_1 \cos \frac{n\pi}{L_2} x_2, \\ u^1 &= U^1 \cos \frac{m\pi}{L_1} x_1 \sin \frac{n\pi}{L_2} x_2, \\ u^2 &= U^2 \sin \frac{m\pi}{L_1} x_1 \cos \frac{n\pi}{L_2} x_2. \end{aligned}$$

Można wykazać, że przy korzystaniu z (5.3) w węzłach brzegowych znikają momenty utwierdzające w kierunku prostopadłym do płaszczyzny płyty prętowej.



Rys. 2

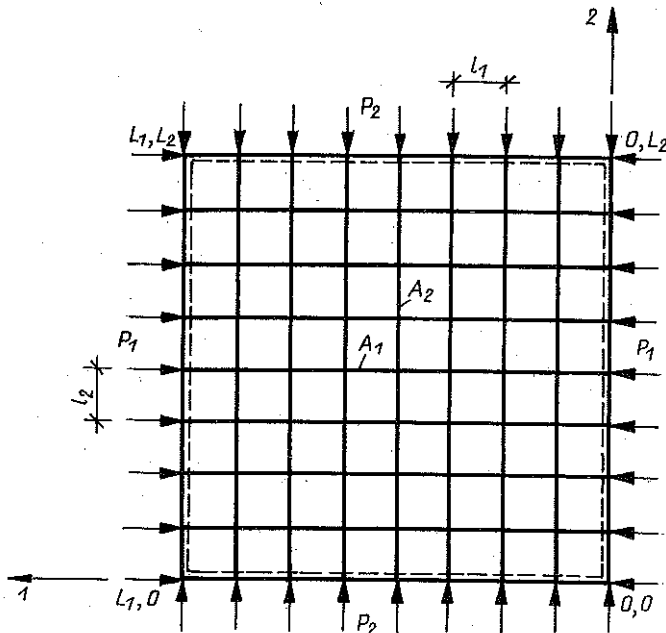
Tablica 1

| | Katalog I | Katalog II |
|----------------------------|--------------------|--------------------|
| A_1 [cm ²] | 3,14 | 2,01 |
| A_2 [cm ²] | 3,14 | 3,14 |
| Postać utraty stateczności | $m = 1$ $n = 1$ | $m = 1$ $n = 1$ |
| R_{cr} [kN] | 4,54 | 3,10 |
| W_{pt} [N] | 1059,9 | 811,5 |

W warunku ograniczającym (3.10) sprawdzano kilka najbardziej prawdopodobnych z inżynierskiego punktu widzenia postaci utraty stateczności. Dla wyoboczenia płyty prętowej z płaszczyzny przyjęto w (5.2) współczynniki $m = 1$, $n = 1$ (rys. 2b); $m = 2$, $n = 1$; $m = 2$, $n = 2$ oraz $m = 4$, $n = 1$ (rys. 2c). Dla przypadku wyoboczenia w płaszczyźnie uwzględniono w (5.3) $m = 4$, $n = 6$ (rys. 2d). Wyniki obliczeń zamieszczono w tablicy 1.

5.2. Płyta prętowa ściskana w dwóch kierunkach

Problem optymalizacji dotyczy swobodnie podpartej na brzegach płyty prętowej pokazanej na rys. 3. Przy przyjęciu dwóch stref sztywności A_1 i A_2 funkcję celu określa wzór (5.1).



Rys. 3. $L_1 = L_2 = 8$, $l_1 = l_2 = 1,0$ m, $P_1 = 1,5$ kN, $P_2 = 1,0$ kN

Tablica 2

| | Katalog I | Katalog II |
|----------------------------|--------------------|--------------------|
| A_1 [cm ²] | 3,14 | 5,31 |
| A_2 [cm ²] | 7,07 | 5,31 |
| Postać utraty stateczności | $m = 1$ $n = 1$ | $m = 1$ $n = 1$ |
| R_{kr1}, R_{kr2} [kN] | 1,60 1,07 | 1,54 1,03 |
| W_{6pt} [N] | 5770,6 | 6002,4 |

Obliczenia wykonano dla dwóch następujących katalogów prętów o przekroju okrągłym

katalog I A_i [cm²] $\in \{0,785; 3,14; 7,07; 12,57; 19,64\}$,

katalog II A_i [cm²] $\in \{3,8; 4,52; 5,31; 6,16; 7,07\}$.

W warunku ograniczającym (3.10) uwzględniono następujące postacie utraty stateczności 1) wyboczenie płyty z płaszczyzny (5.2): $m = 1, n = 1$ (rys. 2b); $m = 2, n = 1$; $m = 4, n = 1$; $m = 1, n = 4$; $m = 2, n = 2$; $m = 4, n = 4$; $m = 8, n = 1$ (rys. 2c); 2) wyboczenie płyty w płaszczyźnie (5.3): $m = 8, n = 8$ (rys. 2d). Otrzymane wyniki przedstawia tablica 2.

5.3. Powłoka prętowa o przekroju sześciokątnym

Rozważmy przypadek optymalnego doboru prętów dla powłoki przedstawionej na rys. 4.

Konstrukcja podzielona została na trzy strefy sztywności obejmujące jednakowe pręty (A_1 oznacza pręty pasów, A_2 pręty wręg oraz A_3 pręty wykrzyżowań). Założenia dotyczące sposobu połączeń prętów podane zostały w punkcie 2.2 pracy.

Ciężar materiału prętów powłoki prętowej wynosi

$$(5.4) \quad W = \sum_{j=1}^q [l_1 L_1 L_2 z_j^1 + l_2 L_2 (L_1 + 1) z_j^2 + 2l_3 L_2 L_1 z_j^3] \bar{A}_j \gamma.$$

Wzorując się na analizie stateczności cienkich, ciągłych powłok walcowych, poddanych działaniu dużych sił ściskających [18], można posłużyć się następującymi wzorami opisującymi postać utraty stateczności:

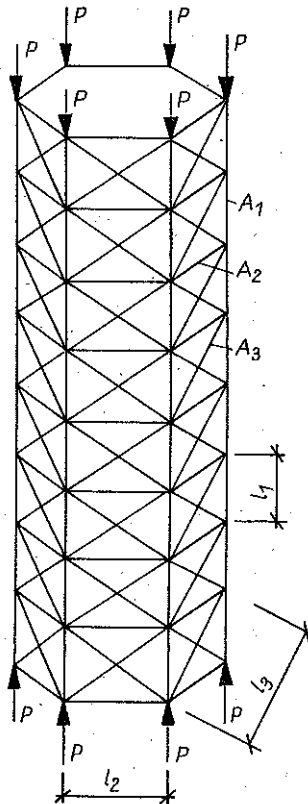
$$(5.5) \quad \begin{aligned} u^1 &= U^1 \cos bx_1 \sin ax_2, \\ u^2 &= U^2 \sin bx_1 \cos ax_2, \\ u^3 &= U^3 \sin bx_1 \sin ax_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v^1 &= V^1 \sin bx_1 \cos ax_2, \\
 v^2 &= V^2 \cos bx_1 \sin ax_2, \\
 v^3 &= V^3 \cos bx_1 \cos ax_2; \\
 (5.6) \quad a &= \frac{2n\pi}{L_2}, \quad b = \frac{m\pi}{L_1},
 \end{aligned}$$

gdzie m, n oznaczają liczby półfal w kierunku tworzącej i w kierunku obwodowym.

Odpowiedni dobór liczby półfal m i n pozwala na modelowanie różnych form utraty stateczności. Przy przyjęciu $n=0$ utrata stateczności nastąpi przez wyboczenie prętów pasów w kierunku stycznym do obwiedni powłoki przy powstaniu m półfal w kierunku tworzącej. Dla $n=1$ mamy przypadek wyboczenia przy „wyjściu” prętów z obwiedni powłoki i powstaniu m półfal w kierunku tworzącej; wręgi zostają obrócone względem siebie i wychodzą z płaszczyzny poziomej.

W rozważanym przykładzie w warunku ograniczającym (3.3) przyjmowano w (5.6) $m=1, n=0$; $m=2, n=0$; $m=4, n=0$; $m=8, n=0$; $m=1, n=1$;



Rys. 4. $L_1 = 8, L_2 = 6, l_1 = 1,0 \text{ m}, l_2 = 1,5 \text{ m}, l_3 = 1,8 \text{ m}, P = 20 \text{ kN}$

$m = 2, n = 1; m = 4, n = 1; m = 8, n = 1$. Przypadek $n \geq 2$ charakteryzujący się dużym zdeformowaniem przekrojów poprzecznych powłoki został pominięty jako mało prawdopodobny i dający w wyniku siły krytyczne znacznie przekraczające wartości otrzymywane dla przypadków opisanych wyżej.

Tablica 3

| | Katalog I | Katalog II |
|----------------------------|--------------------|--------------------|
| A_1 [cm ²] | 4,52 | 3,8 |
| A_2 [cm ²] | 2,01 | 1,54 |
| A_3 [cm ²] | 2,01 | 1,54 |
| Postać utraty stateczności | $m = 8$ $n = 0$ | $m = 8$ $n = 0$ |
| R_{kr} [kN] | 33,9 | 23,8 |
| W_{pt} [N] | 5711,8 | 4503,2 |

Wyniki optymalizacji przy wykorzystaniu dwóch katalogów prętów

katalog I A_i [cm²] $\in \{2,01; 3,14; 4,52; 7,07; 12,57\}$,

katalog II A_i [cm²] $\in \{1,54; 2,01; 2,54; 3,14; 3,8\}$,

przedstawia tablica 3.

5.4. Symetryczna i niesymetryczna powłoka o przekroju kwadratowym

W poniższym przykładzie porównano wyniki otrzymane dla dwóch powłok prętowych o przekroju kwadratowym (powłoka bez wykrzyżowań — rys. 5a, powłoka z pojedynczym wykrzyżowaniem — rys. 5b).

Ciężar materiału prętów konstrukcji przedstawionej na rys. 5a wynosi

$$(5.7) \quad W = \sum_{j=1}^q [l_1 L_1 L_2 z_j^1 + l_2 L_2 (L_1 + 1) z_j^2] \bar{A}_j \gamma,$$

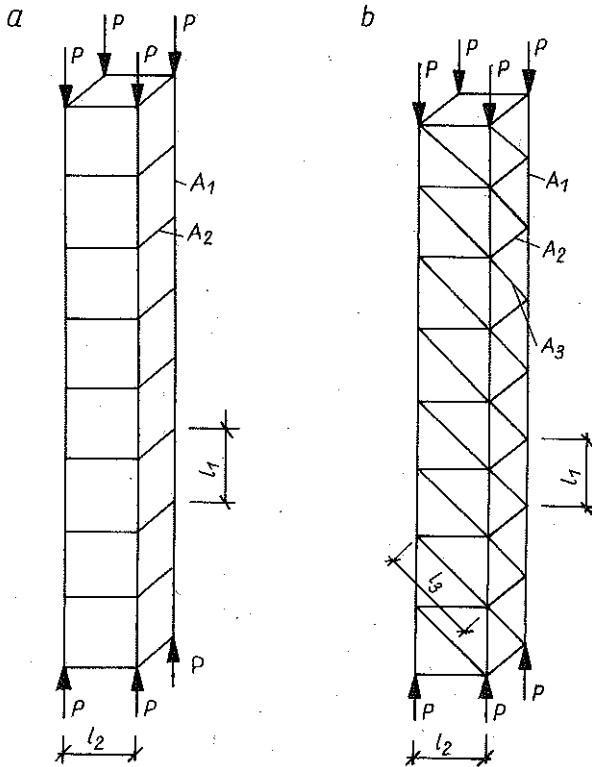
a powłoki z rys. 5b

$$(5.8) \quad W = \sum_{j=1}^q [l_1 L_1 L_2 z_j^1 + l_2 L_2 (L_1 + 1) z_j^2 + l_3 L_2 L_1 z_j^3] \bar{A}_j \gamma.$$

Obciążenie krytyczne dla powłoki symetrycznej wyznacza się rozwiązując równanie (2.14) przy uwzględnieniu wzorów (5.5) we wzorach (2.9). Stateczność prostopadłościenną powłoki prętowej niesymetrycznej (rys. 5b) można określić wykorzystując analogię do klasycznych, cylindrycznych powłok ciągłych, poddanych jednoczesnemu ścisłaniu i skręcaniu [18]. Funkcje opisujące pole przemieszczeń mają wtedy postać

$$(5.9) \quad \begin{aligned} u^1 &= U^1 \cos(ax_2 - bx_1), \\ u^2 &= U^2 \cos(ax_2 - bx_1), \\ u^3 &= U^3 \sin(ax_2 - bx_1), \\ v^1 &= V^1 \cos(ax_2 - bx_1), \\ v^2 &= V^2 \cos(ax_2 - bx_1), \\ v^3 &= V^3 \sin(ax_2 - bx_1), \end{aligned}$$

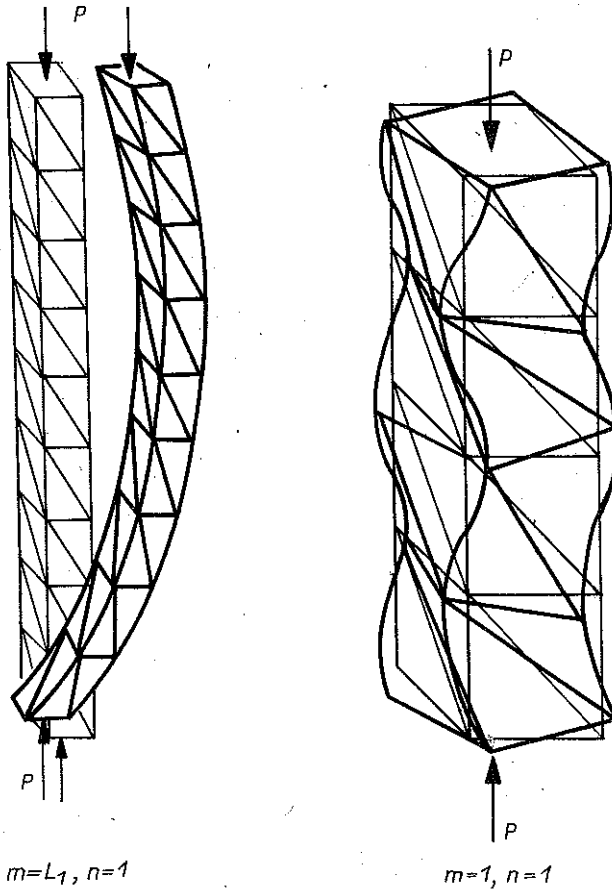
gdzie współczynniki a i b wyrażone są przez (5.6).



Rys. 5. $L_1 = 8$, $L_2 = 4$, $l_1 = 0,5$ m, $l_2 = 0,5$ m, $l_3 = 0,71$ m, $P = 30$ kN

Przykładowe postacie utraty stateczności dla powłoki o przekroju kwadratowym przedstawione zostały na rys. 6.

Przy badaniu warunku (3.3) we wzorach (5.5) i (5.9) przyjęto: $m = 1$, $n = 0$; $m = 2$, $n = 0$; $m = 4$, $n = 0$; $m = 8$, $n = 0$; $m = 1$, $n = 1$; $m = 2$, $n = 1$; $m = 4$, $n = 1$; $m = 8$, $n = 1$. Należy zwrócić uwagę na fakt, że opis pól przemieszczeń powłoki symetrycznej (5.5) różni się od związków (5.9) dla powłoki niesymetrycznej i w rezultacie ustalonym wartościom m i n odpo-



Rys. 6

wiadają podobne lecz nie jednakowe postacie utraty stateczności. Wyniki dla katalogów podanych w przykładzie (5.3) zamieszczono w tablicy 4.

Tablica 4

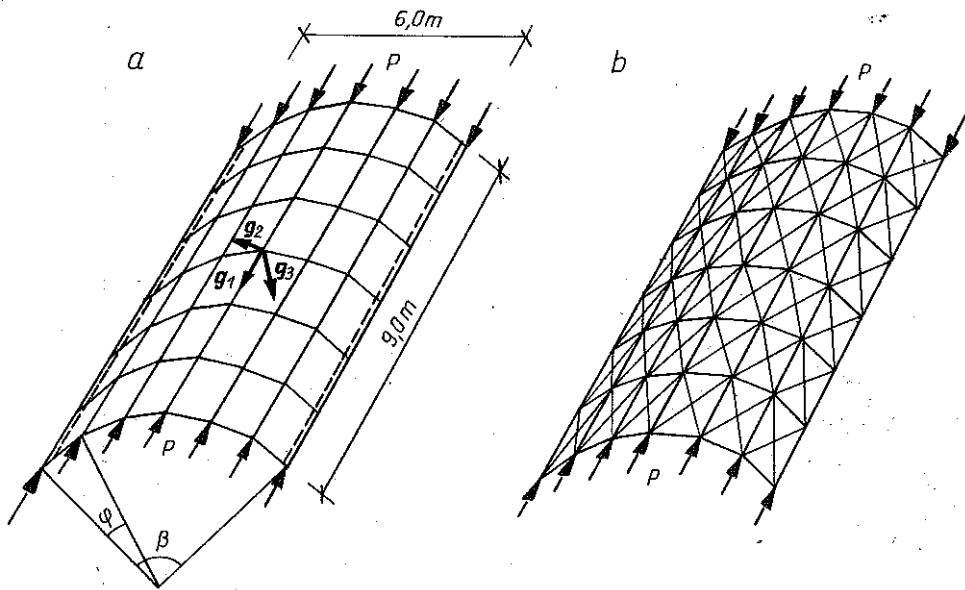
| | Powłoka symetryczna | | Powłoka niesymetryczna | |
|----------------------------|---------------------|--------------------|------------------------|--------------------|
| | Katalog I | Katalog II | Katalog I | Katalog II |
| A_1 [cm ²] | 4,52 | 3,14 | 2,01 | 2,01 |
| A_2 [cm ²] | 3,14 | 3,8 | 2,01 | 1,54 |
| A_3 [cm ²] | — | — | 2,01 | 1,54 |
| Postać utraty stateczności | $m = 1$ $n = 1$ | $m = 1$ $n = 1$ | $m = 8$ $n = 0$ | $m = 8$ $n = 0$ |
| R_{kr} [kN] | 32,7 | 31,9 | 35,7 | 31,9 |
| W_{0pt} [N] | 1011,4 | 931,3 | 893,4 | 743,6 |

5.5. Powłoka prętowa otwarta

Rysunki 7a i 7b przedstawiają powłokę prętową otwartą bez krzyżulców i powłokę z podwójnym wykrzyżowaniem.

Uwzględniając w (2.1) fakt, iż $\varphi = \beta/L_2$ do opisu pola przemieszczeń można użyć funkcji (5.5) przyjmując

$$(5.10) \quad a = \frac{n\pi}{L_2}, \quad b = \frac{m\pi}{L_1}$$



Rys. 7. $L_1 = L_2 = 6$, $l_1 = 1,5$ m, $l_2 = 1,2$ m, $l_3 = 1,92$ m, $P = 10$ kN

Odpowiada to warunkom swobodnego podparcia z tym zastrzeżeniem, że u^2 nie znika wzdłuż tworzących $x_2 = 0$ i $x_2 = L_2$ i w płaszczyznach stycznych do obwiedni powłoki istnieją pewne przemieszczenia obwodowe.

Tablica 5

| | Powłoka bez wykrzyżowań | | Powłoka z wykrzyżowaniami | |
|----------------------------|-------------------------|--------------------|---------------------------|--------------------|
| | Katalog I | Katalog II | Katalog I | Katalog II |
| A_1 [cm ²] | 5,13 | 7,07 | 5,31 | 4,52 |
| A_2 [cm ²] | 6,16 | 4,52 | 2,01 | 2,01 |
| A_3 [cm ²] | — | — | 2,01 | 2,01 |
| Postać utraty stateczności | $m = 1$ $n = 1$ | $m = 1$ $n = 1$ | $m = 6$ $n = 0$ | $m = 6$ $n = 0$ |
| R_{kr} [kN] | 11,0 | 10,9 | 20,5 | 15,2 |
| W_{opt} [N] | 5063,2 | 5003,0 | 5603,6 | 5212,9 |

Jest to przypadek, gdy brzegi powłoki opierają się w rowkach o kształcie litery V z pewnym luzem.

Możliwość utraty stateczności analizowano przy przyjęciu w (5.10) $m = 1$, $n = 1$; $m = 2$, $n = 1$; $m = 3$, $n = 1$; $m = 6$, $n = 0$; $m = 6$, $n = 6$. Wyniki otrzymane dla dwóch katalogów przekrojów

$$\begin{aligned} \text{katalog I } A_i [\text{cm}^2] &\in \{2,01; 5,13; 6,16; 7,07; 8,04\}, \\ \text{katalog II } A_i [\text{cm}^2] &\in \{-2,01; 3,14; 4,52; 7,07; 12,57\}, \end{aligned}$$

zamieszczono w tablicy 5.

6. WNIOSKI

Zamieszczone przykłady numeryczne potwierdzają przydatność i efektywność metody przeglądu według rosnących wartości funkcji celu w zagadnieniach optymalizacji dyskretnej konstrukcji inżynierskich.

W rozważaniach przyjęto założenie, że ciężar każdego z połączeń węzłowych jest jednakowy, w związku z czym pominięcie ciężaru węzłów w funkcji celu nie prowadzi do błędów w wyznaczaniu optymalnego doboru prętów konstrukcji. W przedstawionych przykładach przekroje dobierane są z jednego katalogu. Zastosowanie kilku zestawów prętów, najbardziej odpowiednich dla poszczególnych stref nie przedstawia istotnych trudności.

Wartość obciążenia krytycznego zależy od stosunku sztywności prętów i kształtu rozpatrywanego układu konstrukcyjnego. W przypadku doboru przekrojów z katalogu niemożliwe jest określenie a priori postaci utraty stateczności dającej najmniejsze wartości obciążenie krytyczne i konieczne staje się każdorazowe sprawdzenie warunku (3.3) przy kilku różnych, prawdopodobnych formach wyboczenia.

W celu zmniejszenia pracochłonności wyznaczania rozwiązania optymalnego godne uwagi może być stosowanie dwukrotnego przeszukiwania. W pierwszym należy przyjąć nieduży katalog prętów o przekrojach bardzo zróżnicowanych, służący właściwie oszacowaniu szukanych wartości. Dopiero drugie przeszukiwanie ma na celu wyznaczenie rozwiązania optymalnego przy wykorzystaniu rezultatów poprzedniego kroku. Stosuje się wówczas bardziej „gęsty” katalog prętów, w których wielkości przekrojów poprzecznych „zawierają się” pomiędzy wielkościami przekrojów, określającymi rozwiązanie w przeszukiwaniu pierwszym, bądź też „leżą” w ich pobliżu.

Duże nadzieje należy wiązać ze zmodyfikowaną wersją algorytmu metody przeglądu [10], znacznie skracającą czas obliczeń. Kontynuacją przedstawionych rozważań będzie optymalizacja dyskretna ustrojów prętowych przy uwzględnieniu geometrycznie nieliniowego zachowania się konstrukcji.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. BAUER, W. GUTKOWSKI, *Stateczność regularnych konstrukcji prętowych*, Arch. Inż. Lądowej, **19**, 1, 1973.
2. J. BAUER, W. GUTKOWSKI, Z. IWANOW, *A discrete method for lattice structures optimization*, Engng Optimization, **5**, 1981.
3. J. BAUER, W. GUTKOWSKI, Z. IWANOW, *Metody numeryczne w optymalizacji dyskretniej*, Mechanika i Komputer, **4**, Warszawa 1981.
4. J. BŁACHUT, A. GAJEWSKI, *Unimodalna oraz bimodalna optymalizacja drgających i narażonych na utratę stateczności prętów i łuków*, w: Optymalizacja Wytrzymałościowa Konstrukcji, Ossolineum, Wrocław 1983.
5. S. BŁASZKOWIAK, Z. KACZKOWSKI, *Metoda Crossa*, PWN, Warszawa 1959.
6. B. A. БОБИН, *Разностно-вариационные методы строительной механики*, Госстройиздат, Киев 1963.
7. H. GREENBERG, *Integer programming*, Academic Press, New York 1971.
8. L. GAWKOWSKA, *Dobór optymalnych przekrojów prętów w strefach sztywności przekryć strukturalnych*, Arch. Inż. Lądowej, **31**, 1-2, 1985.
9. W. GUTKOWSKI, *Regularne konstrukcje prętowe*, PWN, Warszawa 1973.
10. Z. IWANOW, *The enumeration method according to the increasing value of the objective function in the optimization of bar structures*, Bull. Polon. Sci., Série Sci. tech., **29**, 9/10, 1981.
11. C. JORDAN, *Calculus of finite differences*, Chelsea, New York 1950.
12. N. S. KHOT, M. P. KAMAT, *Minimum weight design of truss structures with geometric nonlinear behaviour*, AIAA J., **23**, 1985.
13. J. KJUSALAAS, *Optimal design of structures with buckling constraints*, Int. J. Solids Struct., **9**, 1973.
14. E. F. MASUR, Z. MRÓZ, *Nonstationary conditions in structural design*, Int. J. Solids Struct., **15**, 1979.
15. W. NOWACKI, *Mechanika budowl*, T. 2, PWN, Warszawa 1967.
16. N. OLSHOFF, H. RASMUSSEN, *On single and bimodal optimum buckling loads of clamped columns*, Int. J. Solids Struct., **13**, 1977.
17. K. F. REINSCHEIDT, *Discrete structural optimization*, J. Structural Division, **97**, ST1, 1971.
18. S. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
19. A. R. TOAKLEY, *Optimum design using available sections*, J. Structural Division, **94**, ST5, 1968.
20. H. K. TURNER, R. H. PLAUT, *Optimal design for stability under multiple loads*, J. Eng. Mech. Division, ASCE, **12**, EM6, 1980.
21. T. WAH, L. R. CALCOTE, *Structural analysis by finite differences*, Van Nostrand Reinhold Company, 1970.
22. D. F. YATES, T. B. BOFFEY, A. B. TEMPLEMAN, *A heuristic method for the design of minimum weight trusses using discrete member sizes*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **37**, 1, North-Holland Publishing Company, 1983.

РЕЗЮМЕ

ДИСКРЕТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ РЕГУЛЯРНЫХ СТЕРЖЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ
ПРИ УЧЕТЕ УСЛОВИЙ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

Предметом работы является дискретная оптимизация регулярных стержневых конструкций при учете условий потери устойчивости. Как критерий оптимизации принят минимальный вес материала стержней. Решающими переменными являются поля поперечных сечений стержней, подобранные из данного, конечного каталога. В ограничивающих условиях учтена возможность выступления разных видов потери устойчивости. Задача оптимизации решена при использовании метода обзора по возрастающим значениям функции цели. Представлены расчетные примеры для разных типов конструкций.

SUMMARY

DISCRETE OPTIMIZATION OF REGULAR BAR SYSTEMS UNDER
INSTABILITY CONDITIONS

Discrete optimization of regular bar systems is considered, account being taken of the stability loss conditions. Minimum weight of the bars is assumed as the optimization criterion, and cross-sectional areas (taken from a given, finite catalogue) represent the optimization variables; various instability modes are considered. The problem is solved by investigating the increasing values of the aim function. Examples of several types of structures are numerically analyzed.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji w dniu 16 lipca 1986 r.
