

STABILNOŚĆ i ZBIEŻNOŚĆ METODY NUMERYCZNEJ STOSOWANEJ W DYNAMICE NIESPRĘŻYSTYCH MEMBRAN

WŁODZIMIERZ I D C Z A K i IRENEUSZ W I N N I C K I (WARSZAWA)

Przedstawiono analizę skalarnego wariantu metody przegania z iteracjami zastosowanej do rozwiązywania niejawnego, nieliniowego schematu różnicowego dynamiki zamocowanej niesprężystej membrany kołowej. Przeprowadzono analizę stabilności zagadnienia oraz analizę zbieżności metody iteracyjnej. Na zakończenie omówiono wyniki obliczeń numerycznych podając praktyczne znaczenie przeprowadzonych analiz.

1. WSTĘP

Zagadnienie dynamiki niesprężystych, utwierdzonych membran kołowych podlegających oddziaływaniu obciążeń o dużej intensywności jest przedmiotem rozważań wielu autorów. Przedstawiane rozwiązania dotyczące obciążeń idealnym impulsem początkowym opierają się na metodach przybliżonych: analitycznych [1, 2 i 3] lub analityczno-numerycznych [4 i 5].

Analityczno-numeryczne metody przybliżone dotyczące dynamiki niesprężystych membran obciążonych falą ciśnienia przedstawiono w pracy [6], a w pracy [7] podjęto próbę rozwiązania tego zagadnienia metodą numeryczną. Tam też przedstawiono jeden z wariantów aproksymacji równań różniczkowych cząstkowych schematami różnicowymi.

W przedstawionej pracy podano dwa warianty aproksymacji drugiej pochodnej względem czasu funkcji ugięcia oraz dokonano analizy numerycznej rozważanej metody i przyjętych schematów różnicowych. Dyskutowane zagadnienie z numerycznego punktu widzenia stanowi ciekawy i szeroki problem niejawnych schematów różnicowych, do którego często wraca wielu autorów.

Jedną z metod rozwiązywania niejawnych równań różnicowych, lub ich układów, często stosowaną w praktyce, jest metoda „przegania”. Wynika to stąd, że większość schematów niejawnych skonstruowanych dla zagadnień ewolucyjnych charakteryzuje się bezwzględną stabilnością numeryczną, metoda przegania zaś umożliwia ich dostatecznie szybkie całkowanie. W wielu zagadnieniach dynamiki konstrukcji niesprężystych natrafiamy na problemy mogące prowadzić do rozwiązań nieregularnych. Nieregularności te mogą być

wywołane nieliniowością równań lub nieregularnością w występujących warunkach brzegowych lub początkowych, np. punktowo przyłożone obciążenie lub wymuszenie (por. [13 i 14]). Niejawny dyskretny opis tych problemów w dużej mierze zabezpiecza rozwiązania, nawet problemów nieregularnych, przed zaburzeniami generującymi się w sposób niefizyczny (numeryczny) w trakcie obliczeń. Należy jednak pamiętać, że w myśl analizy przeprowadzonej w [13] mogą zdarzyć się przypadki, dla których nawet schematy niejawne, bezwzględnie stabilne, będą prowadzić do rozwiązań pozbawionych sensu fizycznego.

Z drugiej strony, prawidłowa konstrukcja niejawnych schematów różnicowych sama w sobie nie gwarantuje poprawności otrzymanych wyników. Również metoda służąca do ich rozwiązywania powinna być zarówno zbieżna jak i stabilna. Wiadomo, że istotną wadą wszystkich wariantów metody przegania jest występowanie warunku na wewnętrzną stabilność jej algorytmu. Jest to szczególnie ważne w przypadku problemów nieliniowych, głównie hiperbolicznych.

Różniczkowe sformułowanie zagadnienia, przyjęte schematy różnicowe oraz ogólne algorytmy rozwiązania przedstawiono w [7].

W pracy tej zajmiemy się analizą skalarnego wariantu metody przegania z iteracjami zastosowanej do rozwiązywania niejawnego, nieliniowego schematu różnicowego dynamiki zamocowanej niesprężystej membrany. W punkcie 2 dokonamy analizy stabilności zagadnienia, w punkcie 3 przeprowadzimy analizę zbieżności metody iteracyjnej, w punkcie zaś 4 omówimy wyniki obliczeń. Pracę zakończymy wnioskami ogólnymi.

2. ANALIZA STABILNOŚCI SKALARNEGO WARIANTU METODY PRZEGANIA

Wiele aproksymacji zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu prowadzi do układów równań z macierzą trójdziagonalną. Układy takie otrzymujemy również dla zadań parabolicznych i hiperbolicznych z jedną zmienną przestrzenną. Postać skalarna takiego układu jest następująca:

$$\begin{aligned} D_0 y_0 - G_0 y_1 &= F_0, \\ (2.1) \quad -H_i y_{i-1} + D_i y_i - G_i y_{i+1} &= F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ -H_N y_{N-1} + D_N y_N &= F_N. \end{aligned}$$

Stosując metodę eliminacji Gaussa, dochodzimy do równań

$$\begin{aligned} (2.2) \quad y_i &= Z_{i+1} y_{i+1} + Y_{i+1}, \quad i = N-1, N-2, \dots, 0, \\ y_N &= Y_{N+1}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.3) \quad \begin{aligned} Z_{i+1} &= \frac{G_i}{D_i - H_i Z_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ Y_{i+1} &= \frac{F_i + H_i Y_i}{D_i - H_i Z_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ Z_1 &= \frac{G_0}{D_0}, \quad Y_1 = \frac{F_0}{D_0}. \end{aligned}$$

Powyższa metoda nosi nazwę skalarnego wariantu metody przegania (w języku rosyjskim „progonka”). Jej algorytm składa się z dwóch części. W pierwszej określa się parametry pośrednie Z_i , Y_i , a w drugiej wylicza rozwiązanie y_i .

Dla układu (2.1) poprawny jest następujący

LEMAT. Jeśli współczynniki D_0 , D_N , H_i i G_i , $i = 1, 2, \dots, N-1$ są różne od zera oraz

$$(2.4) \quad \begin{aligned} |D_i| &\geq |H_i| + |G_i|, \\ |D_0| &\geq |G_0|, \quad |D_N| \geq |H_N|, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned}$$

przy czym co najmniej jedna nierówność (2.4) jest nierównością ostrą, to układ (2.1) ma jednoznaczne rozwiązanie i algorytm (2.2) jest numerycznie poprawny.

Dowód lematu można znaleźć np. w [17].

Z lematu wynika, że

$$(2.5) \quad Z_1 = \frac{G_0}{D_0} \leq 1.$$

Można udowodnić przez indukcję, że jeżeli spełniony jest warunek (2.5), to spełniony jest również następujący wzór:

$$(2.6) \quad Z_i = \frac{G_{i-1}}{D_{i-1} - H_{i-1} Z_{i-1}} \leq 1, \quad i = 2, 3, \dots, N.$$

Jest to inna, równoważna postać warunku na poprawność numeryczną metody przegania.

Jeżeli dla dowolnego $k > i$ współczynniki układu (2.1) mają tendencję do ustalenia się, tzn. jeżeli

$$H_{k-1} \rightarrow H, \quad D_k \rightarrow D, \quad G_{k+1} \rightarrow G$$

oraz jeśli

$$D > 0, \quad H > 0, \quad G > 0,$$

to przy $k \rightarrow \infty$ wartości Z_k są dodatnie, mniejsze od jedności i zdążają do stałej wartości Z wyznaczonej z równania

$$(2.7) \quad HZ^2 - DZ + G = 0,$$

tj. przy $k \rightarrow \infty$

$$(2.8) \quad Z_k \rightarrow Z = \frac{1}{2} \frac{D}{H} \left(1 - \sqrt{1 - 4 \frac{HG}{D^2}} \right).$$

W [9] została przeprowadzona ocena błędu rozwiązania y_i oraz parametrów pośrednich Z_i oraz Y_i . Wynika z niej, że

$$(2.9) \quad |\delta Z_i| \leq C \varkappa \varepsilon_1 i, \quad i = 2, 3, \dots, k-1;$$

$$(2.10) \quad |\delta Y_i| \leq C_1 \varkappa \varepsilon_2 \frac{i(i+1)}{2}, \quad i = 2, 3, \dots, k-1;$$

$$(2.11) \quad |\delta y_n| \leq C_1 \varkappa \varepsilon_3 \frac{n(n+1)}{2},$$

gdzie C oznacza stałą niezależną od ε i n .

$$\varkappa = \max_k \left(\prod_{i=2}^k \left| \frac{Z_k H_k}{G_k} \right| \right),$$

$$\varepsilon_1 = \max_k \{|\varepsilon_k|\},$$

gdzie ε_k oznacza błąd w obliczeniu ułamka,

$$\bar{Z}_k = \frac{G_{k-1}}{D_{k-1} + H_{k-1} \bar{Z}_{k-1}} + \varepsilon_k,$$

$$C_1 = 1 + \max_k \left\{ \frac{H_k \bar{Y}_{k-1} - F_k}{H_k} \right\},$$

$$\varepsilon_2 = \max_k \{|\varepsilon'_k|\},$$

gdzie ε'_k oznacza błąd w obliczeniu ułamka

$$\bar{Y}_k = \frac{F_k - H_k \bar{Y}_{k-1}}{D_k + H_k \bar{Z}_{k-1}} = Z_k \frac{H_k}{G_k} \left(\bar{Y}_{k-1} - \frac{F_k}{H_k} \right) + \varepsilon'_k,$$

oraz

$$\varepsilon_3 = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

Łatwo sprawdzić, że dla schematów różnicowych skonstruowanych w poprzednim punkcie, warunki lematu są spełnione, a tym samym skalarny wariant metody przegania jest numerycznie poprawny.

3. BADANIE ZBIĘŻNOŚCI METODY ITERACYJNEJ NA PODSTAWIE FUNKCJI MAJORYZUJĄCEJ

Analizowane w pracy nieliniowe równanie różniczkowe po zastosowaniu metody różnic skończonych sprowadzone zostało do układu nieliniowych równań algebraicznych. Rozwiązania otrzymanego układu poszukiwać będziemy opierając się na metodzie iteracyjnej. Polega to na sprowadzeniu wyjściowego nieliniowego układu algebraicznego do układu równań liniowych, w którym macierz układu zależy od rozwiązania na poprzedniej iteracji. W ten sposób rozwiązuje się ciąg układów liniowych do momentu uzyskania odpowiedniej dokładności, wynikającej z określonego sensu zbieżności. Pojawiają się przy tym zasadnicze problemy: 1) zbieżność ciągu rozwiązań równań liniowych do rozwiązania układu równań nieliniowych, 2) szybkość tej zbieżności.

W punkcie tym na podstawie [10, 11 i 12] dokonamy próby wyznaczenia kryteriów zbieżności ciągu rozwiązań przybliżonych do rozwiązania nieliniowego równania dynamiki niesprężystej membrany kołowej. Kryteria te, jak to wynika z rozważań, sprowadzą się do wyznaczenia granicznych kroków czasowych $d\tau_{gr}$ zapewniających zbieżność ciągu iteracji do rozwiązania układu nieliniowych równań algebraicznych. Ponieważ wyznaczenie takiego kroku jest możliwe w komputerze w czasie realizacji obliczeń na każdej warstwie czasowej, przeto wyniki tego punktu mają bezpośrednie znaczenie praktyczne.

Badanie zbieżności daje w wyniku parametry graniczne wyznaczające obszar zbieżności ciągu iteracji. Mogą one mieć charakter globalny, bądź lokalny. Ograniczymy się tu do zbadania zbieżności lokalnej, tj. zbieżności na każdej warstwie czasowej. Wyznaczone w ten sposób $d\tau_{gr}$ jest granicznym krokiem czasowym w metodzie numerycznej, który określa przedział dopuszczalnych kroków czasowych. Należy pamiętać, że zbieżność ciągu iteracji stanowi jeden z warunków stosowalności metody numerycznej. Innymi z nich to stabilność i zbieżność metody numerycznej do rozwiązania ścisłego. Może bowiem zdarzyć się taki przypadek metody numerycznej, że na każdym kroku czasowym ciąg iteracji jest zbieżny do granicy, lecz przy metodzie niestabilnej granica ta z kroku na krok szybko oddala się od rozwiązania ścisłego. W przypadku zaś metody niezbieżnej ciąg granic procesów iteracyjnych przy malejących krokach przestrzennym i czasowym nie zbiega do rozwiązania ścisłego.

Nie będziemy tu zajmować się zagadnieniem stabilności numerycznej, które stanowi dla modeli nieliniowych oddzielny problem. Zagadnienie to jest na tyle złożone, że do chwili obecnej problem ten pozostaje otwarty. Istniejące w literaturze prace dotyczą głównie warunków koniecznych stabilności numerycznej różnicowych modeli nieliniowych. Istnieje co prawda teoretyczna praca Rosingera [16]. Ma ona charakter ogólny i wykazuje

równoważność zbieżności i stabilności schematów nieliniowych wyznaczona tylko na podzbiorach zwartych określoności operatorów nieliniowych.

Powróćmy do omawianego tu równania różnicowego

$$(3.1) \quad H_i w_{i-1}^{j+1} + D_i w_i^{j+1} + G_i w_{i+1}^{j+1} = F_i,$$

gdzie

$$D_i = 1 + 2\alpha_1 \sigma_i h_i \left(\frac{d\tau}{d\varrho} \right)^2 = 1 + \frac{2\alpha_1}{d\varrho^2} \sigma_i h_i d\tau^2,$$

$$G_i = -\alpha_1 \sigma_i h_i \left[\left(\frac{d\tau}{d\varrho} \right)^2 + \frac{1}{\varrho_i} \frac{d\tau^2}{2d\varrho} \right] = -\frac{2\alpha_1}{d\varrho^2} \sigma_i h_i \left(\frac{1}{2} + \frac{d\varrho}{4\varrho_i} \right) d\tau^2,$$

$$H_i = -\alpha_1 \sigma_i h_i \left[\left(\frac{d\tau}{d\varrho} \right)^2 - \frac{1}{\varrho_i} \frac{d\tau^2}{2d\varrho} \right] = -\frac{2\alpha_1}{d\varrho^2} \sigma_i h_i \left(\frac{1}{2} - \frac{d\varrho}{4\varrho_i} \right) d\tau^2,$$

oraz

$$\sigma_i h_i = \frac{1 + \left(\frac{h_0^2}{\dot{\varepsilon}_0 t_f R^2} \right)^{\frac{1}{n}} (w_{,e} \dot{w}_{,e})^{\frac{1}{n}}}{1 + \left(\frac{h_0}{R} \right)^2 (w_{,e})^2},$$

$$\dot{w}_{,e} = \frac{1}{4d\varrho d\tau} [(w_{i+1}^{j+1} - w_{i+1}^j) - (w_{i-1}^{j+1} - w_{i-1}^j)],$$

$$w_{,e} = \frac{1}{2d\varrho} (w_{i+1}^j - w_{i-1}^j),$$

gdzie $d\tau$ jest krokiem czasowym oraz $d\varrho$ przestrzennym.

Układ (3.1) jest układem nieliniowych równań algebraicznych. Jego linearyzację można przeprowadzić korzystając z metod iteracyjnych. Ograniczymy się do metody Newtona–Kantorowicza [15]. W efekcie otrzymamy

$$(3.2) \quad \mathbf{A}(\mathbf{w}^{(s)}) \mathbf{w}^{(s+1)} = \mathbf{F},$$

gdzie $\mathbf{A}(\mathbf{w}^{(s)})$ jest pochodną funkcjonalną Frecheta układu nieliniowego (3.1)

$\mathbf{G}(\mathbf{w}) = \mathbf{L}(\mathbf{w}) - \mathbf{F} = \mathbf{0}$ czyli

$$(3.3) \quad \mathbf{A}(\mathbf{w}^{(s)}) = \mathbf{G}'(\mathbf{w}^{(s)});$$

natomiast $\mathbf{w}^{(s)}$ jest rozwiązaniem układu zlinearyzowanego na iteracji s -tej. Linearyzacja prowadzi tutaj do spełnienia następującej równości przybliżonej

$$(3.4) \quad \mathbf{G}(\mathbf{w}^{(s)}) + \mathbf{G}'(\mathbf{w}^{(s)}) (\mathbf{w}^{(s+1)} - \mathbf{w}^{(s)}) = \mathbf{0},$$

a ta z kolei do uogólnionego wzoru metody iteracyjnej Newtona–Kantorowicza

$$(3.5) \quad \mathbf{w}^{(s+1)} = \mathbf{w}^{(s)} - [\mathbf{G}'(\mathbf{w}^{(s)})]^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{w}^{(s)})$$

lub

$$(3.6) \quad \mathbf{w}^{(s+1)} = \mathbf{w}^{(s)} - [\mathbf{A}(\mathbf{w}^{(s)})]^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{w}^{(s)}).$$

Otrzymujemy stąd następującą macierz układu zlinearyzowanego:

$$(3.7) \quad A_{ij}(\mathbf{w}^{(s)}) = \frac{\partial G_i}{\partial w_j^{(s)}}.$$

Biorąc pod uwagę (3.1), przedstawiając $\sigma_i h_i$ w postaci

$$(3.8) \quad \sigma_i h_i = \frac{1 + P \left(\frac{1}{d\tau} \right)^{\frac{1}{n}}}{K_1},$$

gdzie

$$K_1 = 1 + \left(\frac{h_0}{R} \right)^2 (w_{j,e}^j)^2 = 1 + \left(\frac{h_0}{2RdQ} \right)^2 (w_{i+1}^j - w_{i-1}^j)^2,$$

$$P = A_1 (w_{i+1}^{j+1} - w_{i-1}^{j+1} - w_{i+1}^{j-1} + w_{i-1}^{j-1})^{\frac{1}{n}},$$

$$A_1 = \left(\frac{h_0^2}{\dot{\epsilon}_0 t_f R^2} \frac{w_{i+1}^j - w_{i-1}^j}{4dQ^2} \right)^{\frac{1}{n}},$$

oraz dokonując różniczkowania na warstwie $j+1$, otrzymamy macierz trójprzekątną z wyrazami

$$(3.9) \quad A_{i,i-1} = H_i + \frac{2\alpha_1}{dQ^2} \frac{A_2}{K_1} d\tau^2 \left(\frac{1}{d\tau} \right)^{\frac{1}{n}} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{dQ}{4Q_i} \right) w_{i-1} - w_i + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{dQ}{4Q_i} \right) w_{i+1} \right],$$

$$(3.10) \quad A_{i,i-1} = G_i - \frac{2\alpha_1}{dQ^2} \frac{A_2}{K_1} d\tau^2 \left(\frac{1}{d\tau} \right)^{\frac{1}{n}} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{dQ}{4Q_i} \right) w_{i-1} - w_i + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{dQ}{4Q_i} \right) w_{i+1} \right],$$

$$(3.11) \quad A_{i,i} = D_i,$$

gdzie

$$A_2 = \frac{1}{n} A_1 (w_{i+1}^{j+1} - w_{i-1}^{j+1} - w_{i+1}^{j-1} + w_{i-1}^{j-1})^{\frac{1-n}{n}}.$$

Badanie zbieżności przeprowadzimy opierając się na pojęciu funkcji mazyzującej [10, 11 i 12]. Funkcję taką konstruuje się z uwzględnieniem

normy operatora $G(\mathbf{w})$, jego pierwszej $G'(\mathbf{w})$ i drugiej pochodnej $G''(\mathbf{w})$ oraz normy pierwszej pochodnej operatora odwrotnego $[[G'(\mathbf{w})]^{-1}]$. W myśl powyższych założeń muszą więc być spełnione następujące warunki:

$$(3.12) \quad \|G(\mathbf{w}^{(0)})\| \leq r(x_0),$$

$$(3.13) \quad \|[[G'(\mathbf{w}^{(0)})]^{-1}]\| \leq r'(x_0),$$

$$(3.14) \quad \|G''(\mathbf{w})\| < r''(x),$$

gdzie

$$(3.15) \quad \|G\| = \max_i |G_i|,$$

$$(3.16) \quad \|([G']^{-1})\| = \max_i \sum_{j=1}^n |(A_{ij})^{-1}|,$$

$$(3.17) \quad \|G''\| = \max_i \sum_{j,k} |B_{ijk}|,$$

$$(3.18) \quad B_{ijk} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial w_k^{(s)}},$$

gdzie $r(x)$ jest szukana funkcją majoryzującą.

W [10 i 11] udawadnia się następujące

TWIERDZENIE. *Jeśli funkcja $r(x) \geq 0$ ma rozwiązanie \bar{x} w przedziale $[x_0, X]$, to układ (3.1) ma rozwiązanie $\bar{\mathbf{w}}$, do którego zbieżny jest ciąg kolejnych przybliżeń. Wykazuje się również poprawność następującego lematu:*

LEMAT. *Jeżeli \bar{x} jest najbliższym do x_0 rozwiązaniem równania $r(x) = 0$, to $r'(x) < 0$ w przedziale $[x_0, \bar{x}]$.*

Wynik powyższego lematu, jak również przedstawione tu twierdzenie, są podstawą do konstrukcji funkcji majoryzującej.

Funkcją tą może być następujący wielomian:

$$(3.19) \quad r(x) = Kx^2 - \frac{1}{B}x + R,$$

gdzie

$$(3.20) \quad R \geq \|G(\mathbf{w}^{(0)})\|,$$

$$(3.21) \quad B \geq \|[[G'(\mathbf{w}^{(0)})]^{-1}]\|,$$

$$(3.22) \quad K \geq \|G''(\mathbf{w})\|.$$

Wynika stąd, że przybliżeniu $\mathbf{w}^{(0)}$ odpowiada $x = 0$. Zatem rozwiązania układu równań $G(\mathbf{w}) = 0$ zawarte są w kuli

$$(3.23) \quad \|\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}^{(0)}\| \leq \frac{1}{2KB} [1 - (1 - 4KB^2R)^{\frac{1}{2}}].$$

Rozwiązania równania $r(x) = 0$ można poszukiwać iteracyjnie, co odpowiada iteracyjnej procedurze poszukiwania rozwiązania $\mathbf{G}(\mathbf{w}) = 0$ metodą Newtona-Kantorowicza:

$$(3.24) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{r(x_k)}{r'(x_k)}.$$

Ponieważ warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności metody iteracyjnej $x_{k+1} = F(x_k)$ jest warunek

$$(3.25) \quad |F'(x)| < 1,$$

to na podstawie (3.24) otrzymujemy

$$(3.26) \quad \frac{r(x)r''(x)}{(r'(x))^2} < 1,$$

lub uwzględniając wprowadzone oznaczenia i fakt maleńia funkcji $r(x)$

$$(3.27) \quad \frac{r(0)r''(x)}{(r'(0))^2} < 1.$$

Prowadzi to do nierówności

$$(3.28) \quad 2RB^2K < 1.$$

Przy uwzględnieniu (3.23) nierówność ta przyjmuje postać

$$(3.29) \quad 4RB^2K < 1.$$

Jest to zatem podstawowy warunek zbieżności, który powinny spełniać parametry R , B i K majoryzujące odpowiednie normy.

Korzystając z nierówności (3.29) wyznaczmy przedziały $d\tau$, dla których ciąg przybliżeń (tj. rozwiązań układów zlinearyzowanych) jest zbieżny do rozwiązań układu nieliniowego (3.1).

Jeśli przyjmiemy, że równania $x = 0$ odpowiadają wartości \mathbf{w} na warstwie $j+1$, to dla rozważanego równania ruchu [7] otrzymamy następujące wartości R , B i K :

$$(3.30) \quad \|\mathbf{G}(\mathbf{w}^{j+1})\| \leq R = d\tau^2 \max_i |B_i|,$$

gdzie

$$(3.31) \quad B_i = \sigma_i |V| = \left[1 + \left(\frac{1}{d\tau} \right)^{\frac{1}{n}} P \right] \frac{2\alpha_1}{K_1 dQ^2} \left| w_i^{j+1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{dQ}{4Q_i} \right) w_{i+1}^{j+1} - \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{2} - \frac{dQ}{4Q_i} \right) w_{i-1}^{j+1} \right|,$$

przy czym K_1 występuje we wzorze (9.8).

Normę $\mathbf{G}'(\mathbf{w}^{j+1})$ wyznaczamy ze wzoru

$$(3.32) \quad \|\mathbf{G}'(\mathbf{w}^{j+1})\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{w}^{j+1})\| = \max_i \sum_k \left| \frac{\partial G_i}{\partial w_k^{j+1}} \right|.$$

Ponieważ

$$(3.33) \quad \frac{\partial G_i}{\partial w_k} = \left(\frac{\partial G_i}{\partial w_{i-1}}, \frac{\partial G_i}{\partial w_i}, \frac{\partial G_i}{\partial w_{i+1}} \right),$$

przeto

$$(3.34) \quad \|A(\mathbf{w}^{j+1})\| = \max_i \left(\left| \frac{\partial G_i}{\partial w_{i-1}^{j+1}} \right| + \left| \frac{\partial G_i}{\partial w_i^{j+1}} \right| + \left| \frac{\partial G_i}{\partial w_{i+1}^{j+1}} \right| \right) \geq \max_i \left| \frac{\partial G_i}{\partial w_i^{j+1}} \right|.$$

W rozważaniach występuje norma operatora odwrotnego $\| [G'(\mathbf{w}^{j+1})]^{-1} \|$, czyli należy wyznaczyć normę $\| [A(\mathbf{w}^{j+1})]^{-1} \|$. Biorąc pod uwagę (3.34), otrzymamy

$$(3.35) \quad \| [A(\mathbf{w}^{j+1})]^{-1} \| \leq \min \left(\left| \frac{\partial G_i}{\partial w_i^{j+1}} \right| \right)^{-1} = |B| = (1 + d\tau^2 \min_i |C_i|)^{-1},$$

lub oszacowanie silniejsze

$$(3.36) \quad \| [A(\mathbf{w}^{j+1})]^{-1} \| \leq (1 - d\tau^2 \max_i |C_i|) = |B|,$$

gdzie

$$|C_i| = \frac{2\alpha_1}{K_1 d\varrho^2} \left[1 + P \left(\frac{1}{d\tau} \right)^{\frac{1}{n}} \right].$$

W nierówności (3.27) występuje również druga pochodna funkcji majoryzującej. Dlatego też wyznaczmy K jak następuje:

$$(3.37) \quad \|G'(\mathbf{w})\| \leq K = \max_i \sum_{k,l} \left| \frac{\partial^2 G_i}{\partial w_k \partial w_l} \right| = d\tau^2 L,$$

gdzie

$$L = \max_i \left(2 \left| \frac{\partial^2 G_i}{\partial w_{i-1} \partial w_i} \right| + 2 \left| \frac{\partial^2 G_i}{\partial w_{i+1} \partial w_i} \right| + \left| \frac{\partial^2 G_i}{\partial w_{i+1}^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 G_i}{\partial w_i^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 G_i}{\partial w_{i-1}^2} \right| \right) = L_1 + \left(\frac{1}{d\tau} \right)^{\frac{1}{n}} L_2.$$

Szczegóły rachunkowe dotyczące obliczenia L pomijamy.

Dla skonstruowanych powyżej norm wprowadzimy zapis skrócony. Mianowicie przyjmiemy, że

$$(3.38) \quad \|G(\mathbf{w}^{j+1})\| \leq R = d\tau^2 \left[b_1 + \left(\frac{1}{d\tau} \right)^{\frac{1}{n}} b_2 \right],$$

gdzie b_1 i b_2 są wielkościami określonymi złożonymi wzorami wynikającymi z oszacowania normy (3.38):

$$(3.39) \quad \|[A(\mathbf{w}^{j+1})]^{-1}\| \leq |B| = \left\{ 1 + d\tau^2 \left[C_1 + \left(\frac{1}{d\tau} \right)^{\frac{1}{n}} C_2 \right] \right\}^{-1},$$

oraz po przepisaniu (3.37)

$$(3.40) \quad \|G''(\mathbf{w})\| \leq K = d\tau^2 \left[L_1 + \left(\frac{1}{d\tau} \right)^{\frac{1}{n}} L_2 \right].$$

Dalszy proces obliczeniowy polega na wyznaczeniu przedziałów $d\tau$, które zapewniają zbieżność metody iteracyjnej lub inaczej, spełniają nierówność (3.29). Z definicji mamy $d\tau > 0$, a zatem wchodzi w grę jedynie podprzedziały dodatniej części osi τ . Zagadnienie sprowadza się więc do wyznaczenia krańców przedziałów dopuszczalnych $d\tau$, co jest równoważne wyznaczeniu rzeczywistych dodatnich zer funkcji $w(d\tau)$.

Funkcję tę otrzymujemy z nierówności (3.29):

$$(3.41) \quad 4d\tau^2 \left[b_1 + \left(\frac{1}{d\tau} \right)^{\frac{1}{n}} b_2 \right] d\tau^2 \left[L_1 + \left(\frac{1}{d\tau} \right)^{\frac{1}{n}} L_2 \right] < \\ < \left\{ 1 + d\tau^2 \left[C_1 + \left(\frac{1}{d\tau} \right)^{\frac{1}{n}} C_2 \right] \right\}^2.$$

Ma ona więc postać

$$(3.42) \quad w(d\tau) = A_1 d\tau^4 + A_2 d\tau^{4-\frac{1}{n}} + A_3 d\tau^{4-\frac{2}{n}} + A_4 d\tau^2 + A_5 d\tau^{2-\frac{1}{n}} - 1 < 0.$$

Funkcję (3.42) będziemy aproksymować wielomianem

$$(3.43) \quad w(d\tau) = A_6 d\tau^4 + A_7 d\tau^2 - 1 < 0.$$

Analizując powyższy wielomian stwierdzamy, że posiada on tylko jeden pierwiastek rzeczywisty dodatni (reguła Kartezjusza) a ponadto wyraz wolny $A_8 = -1 < 0$. Zatem wielomian ten spełnia sformułowane tu wymagania, a problem sprowadza się do dokładnego wyznaczania najmniejszego i jedyngo pierwiastka dodatniego $d\tau_1$.

W ten sposób uzyskaliśmy możliwość wyznaczenia kroku czasowego $d\tau_{gr}$ dla dopuszczalnych kroków czasowych $d\tau$, które gwarantują zbieżność ciągu iteracji na warstwie czasowej $j+1$, gdy $d\tau_{gr}$ wyznaczone zostało na podstawie rozwiązań z warstwy j .

Zanim przejdziemy do następnego punktu, w którym zajmiemy się analizą rozwiązań, dokonajmy podsumowania dotychczasowych wyników oraz ich oceny.

Łatwo sprawdzić, że przedstawione tu rozważania, dotyczące zbieżności iteracyjnej metody przegania, odnosiły się do schematu różnicowego o aproksymacji rzędu $d\tau$. Z faktu tego płynie znany wniosek: chcąc uzyskać wyniki z wymaganą dokładnością należy ograniczyć się do małych kroków całkowania względem czasu, tzn. $d\tau < d\tau_{gr}$. Przy wzroście $d\tau$ należy liczyć się

z dwoma niebezpieczeństwami: 1) ze wzrostem błędów występujących w rozwiązaniach — schemat jest tylko rzędu $d\tau$; 2) ze wzrostem liczby iteracji na każdym kroku czasowym zblizamy się do $d\tau_{gr}$.

Powyższe problemy można ograniczyć lub nawet częściowo wyeliminować przez zmianę metody rozwiązywania schematu różnicowego dla równania różniczkowego oraz przez uśrednienie względem czasu wszystkich wyrażeń stojących w tym równaniu, tj. pierwszej i drugiej pochodnej przestrzennej, współczynników nieliniowych σ i h oraz obciążenia p .

Uzyskaliśmy więc praktyczne kryteria oceny zbieżności metod iteracyjnych poszukiwania rozwiązań nieliniowego układu równań algebraicznych, powstałego z nieliniowego równania dynamiki zamocowanej, niesprężystej membrany. Mogą one być stosowane rekurencyjnie. Na podstawie rozwiązania w warstwie j -tej oblicza się parametry B , K i R , a następnie określa się przedział dopuszczalnych wartości $d\tau$. Obliczone wartości $d\tau_{gr}$ mogą być korygowane po każdej iteracji. Niewygodę tę można usunąć stosując metody iteracyjne wyższych rzędów niż metoda Newtona–Kantorowicza. Przedziały $d\tau$ mogą być przy tym obliczane na komputerze w trakcie prowadzenia obliczeń.

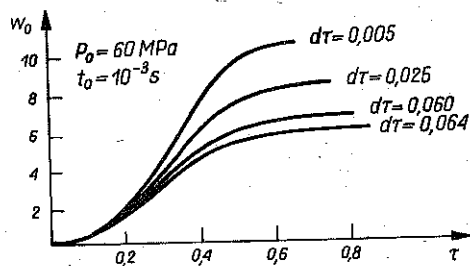
Należy jednak pamiętać, że warunek $d\tau < d\tau_{gr}$ zapewnia jedynie zbieżność metody iteracyjnej, a nie stabilność samej metody numerycznej. Dla analizowanego tu równania różnicowego [7] metoda przegania, jak też sam schemat różnicowy są bezwzględnie stabilne. Z badań stabilności w przypadku innych równań różniczkowych może wynikać inne $d\tau'_{gr}$. Wówczas do obliczeń należy przyjąć $d\tau$ spełniające warunek

$$d\tau < \min(d\tau_{gr}, d\tau'_{gr}).$$

Jak wynika z [10 i 12] przedstawiona tu procedura może być rozszerzona również na układ nieliniowych równań różniczkowych.

4. WYNIKI OBLICZEŃ I WNIOSKI

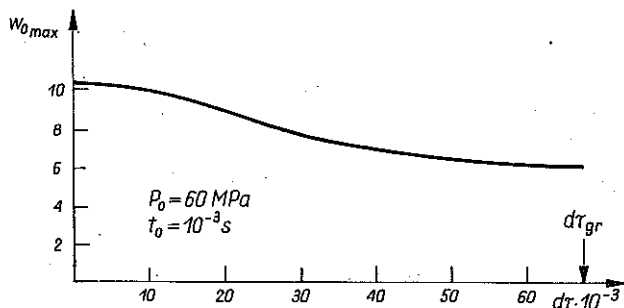
Obliczenia numeryczne prowadzone dla zamocowanej membrany kołowej o parametrach $\sigma_0 = 223 \cdot 10^6 \text{ N m}^{-2}$, $n = 5$, $\dot{\epsilon}_0 = 40 \text{ s}^{-1}$, $m = 15,15 \text{ Nm}^{-3} \text{ s}^2$,



Rys. 1

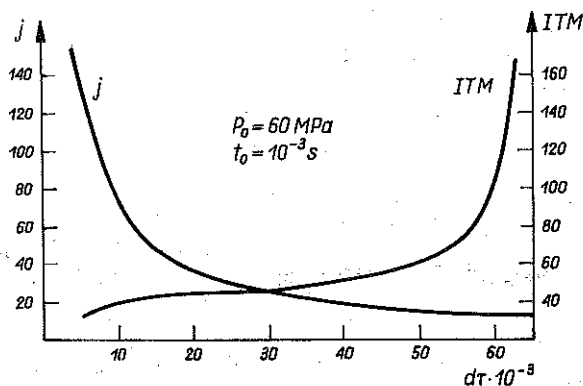
$R = 31,8 \cdot 10^{-3}$ m, $h_0 = 1,93 \cdot 10^{-3}$ m, obciążonej falą uderzeniową o amplitudzie $P_0 = 60$ MPa i czasie trwania $t_0 = 10^{-3}$ s.

Wyniki obliczeń numerycznych zamieszczone w postaci wykresów na rysunkach (1 do 3) przedstawiają: 1) Zmianę ugięcia środkowego punktu membrany w_0 jako funkcji czasu dla kilku wartości kroku czasowego $d\tau$



Rys. 2

(rys. 1) 2) Maksymalne ugięcie centralnego punktu membrany $w_{0\max}$ jako funkcji kroku $d\tau$ (rys. 2). 3) Liczbę kroków czasowych j , w czasie których realizowany jest proces obliczeń deformowania membrany oraz całkowitą (dla tego procesu) liczbę iteracji ITM zapewniającą uzyskiwanie wyników



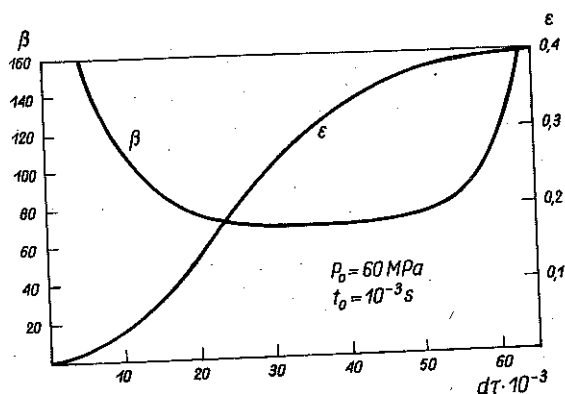
Rys. 3

z daną dokładnością, jako funkcje kroku czasowego $d\tau$ (rys. 3) 4) Liczbę cykli $\beta = j + \text{ITM}$, w czasie których realizowany jest proces obliczeń deformowania membrany oraz względną dokładność obliczeń $\varepsilon = |(\Delta w_{0\max}/w_{0\max})|$ jako funkcje kroku czasowego $d\tau$ (rys. 4).

Z przedstawionych wykresów wynika szereg istotnych faktów.

Proces deformacji membrany modelowany na komputerze zależy od kroku czasowego $d\tau$, przy czym przy małych wartościach kroku uzyskuje się

większe trwałe ugięcie końcowe membrany a przy dużych wartościach $d\tau$ obliczone ugięcia końcowe są mniejsze. Jednocześnie komputerowy czas trwania procesu deformacji (por. rys. 1), zależy od przejętej do obliczeń wartości $d\tau$, jest dłuższy przy dużych wartościach $d\tau$ ($\tau \approx 0,84$), a krótszy przy małych wartościach kroku czasowego ($\tau \approx 0,64$).



Rys. 4

Zasygnalizowana powyżej różnica w maksymalnych wartościach trwałych ugięć (rys. 1 i 2) spowodowana jest głównie dynamiką ciągu iteracyjnych błędów wywołanych zbliżaniem się $d\tau$ do $d\tau_{gr}$.

W celu wyjaśnienia tego zjawiska rozpatrzmy wzór iteracyjny

$$(4.1) \quad \mathbf{w}^{(s+1)} = \mathbf{F}(\mathbf{w}^{(s)}),$$

gdzie operator iteracyjny \mathbf{F} ma postać

$$(4.2) \quad \mathbf{F} = \mathbf{w}^{(s)} - [\mathbf{G}'(\mathbf{w}^{(s)})]^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{w}^{(s)}),$$

wzór (3.5) lub

$$(4.3) \quad \mathbf{F} = \mathbf{w}^{(s)} - [\mathbf{A}(\mathbf{w}^{(s)})]^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{w}^{(s)}),$$

(wzór (3.6)).

Załóżmy, że ciąg przybliżeń posiada granicę \mathbf{w} ($\mathbf{w}^{(s)} \rightarrow \mathbf{w}$) i \mathbf{w} jest rozwiązaniem (4.1). Oznacza to, że operator $\mathbf{F}(\mathbf{w})$ spełnia warunek Lipschitza, tzn.

$$(4.4) \quad \|\mathbf{F}(\mathbf{w}) - \mathbf{F}(\mathbf{w}^{(0)})\| \leq \|\mathbf{L}\| \|\mathbf{w} - \mathbf{w}^{(0)}\| - \|\mathbf{q}_0\|, \quad \|\mathbf{L}\| < 1,$$

gdzie \mathbf{q}_0 jest wektorem błędów systematycznych obliczania operatora $\mathbf{F}(\mathbf{w})$.

Zakładamy przy tym, że

$$(4.5) \quad \mathbf{0} \leq \|\mathbf{q}_0\| \leq (1 - \|\mathbf{L}\|) \|\mathbf{w} - \mathbf{w}^{(0)}\|.$$

W trakcie obliczeń kolejne przybliżenia realizują się z błędem dynamicznym \mathbf{e}_s . Zatem wartość przybliżona pierwiastka ma postać

$$(4.6) \quad \bar{\mathbf{w}}^{(s)} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{w}}^{(s-1)}) + \mathbf{e}_s.$$

Zakładamy przy tym, że błędy zaokrągleń \mathbf{e}_s posiadają oszacowanie

$$(4.7) \quad \|\mathbf{e}_s\| \leq \|\mathbf{e}_0\| q^{s-1}, \quad 0 \leq q \leq 1,$$

więc mniejsze od błędu systematycznego obliczenia operatora $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{w}})$.

Udawadnia się, że zachodzi następujące oszacowanie dla ciągu błędów iteracyjnych:

$$(4.8) \quad \mathbf{e}_s \leq \mathbf{e}_0 (\mathbf{L}^{s-1} + \mathbf{L}^{s-2} q + \mathbf{L}^{s-3} q^2 + \dots + \mathbf{L} q^{s-2} + q^{s-1}).$$

Wykorzystując powyższą nierówność oraz nierówność

$$(4.9) \quad \|\mathbf{w}^{(s)} - \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{L}\|^s \|\mathbf{w}^{(0)} - \mathbf{w}\|,$$

można udowodnić co następuje.

1) Jeżeli $0 < q < 1$, tzn. gdy błąd zaokrągleń w iteracji jest mniejszy od błędu systematycznego, to istnieje następujące oszacowanie:

$$(4.10) \quad \|\bar{\mathbf{w}}^{(s)} - \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{L}\|^s \|\mathbf{w}^{(0)} - \mathbf{w}\| + s \mathbf{e}_0 [\max(\|\mathbf{L}\|, q)]^s.$$

Oznacza to, że po odpowiednio dużej liczbie iteracji błąd obliczenia pierwiastka może być dowolnie mały.

Jeżeli $q = 1$, to

$$(4.11) \quad \|\bar{\mathbf{w}}^{(s)} - \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{L}\|^s \|\mathbf{w}^{(0)} - \mathbf{w}\| + \frac{\|\mathbf{e}_0\|}{1 - \|\mathbf{L}\|}.$$

W tym przypadku po dowolnej liczbie iteracji błąd obliczenia pierwiastka będzie nie mniejszy niż $\mathbf{e}_0/(1 - \|\mathbf{L}\|)$. Przy metodach słabo zbieżnych ($\|\mathbf{L}\| \cong 1$) możemy liczyć tylko na niewielką dokładność osiąganą po kilku iteracjach. Dalsze iteracje nie poprawią tego wyniku, lecz mogą go pogorszyć.

Na wartości składowych wektora \mathbf{e}_0 błędu systematycznego występującego w powyższych wzorach wpływa przede wszystkim rząd schematu różnicowego zastosowanego do rozwiązywania omawianego tu problemu. Jak już stwierdziliśmy wcześniej, schemat ten jest rzędu $d\tau$. Oznacza to, że

$$(4.12) \quad |Nw - N_h w_h| = O(d\tau, d\tau^2),$$

gdzie Nw oznacza lewą stronę równania ruchu oraz $N_h w_h$ aproksymację różnicową.

Zatem wzrostowi $d\tau$ odpowiada wzrost błędu systematycznego \mathbf{e}_0 . Biorąc ponadto pod uwagę fakt, że spełnieniu warunku zbieżności iteracyjnej

$$(4.13) \quad \|\mathbf{w}^{(s+1)} - \mathbf{w}^{(s)}\| \leq \varepsilon,$$

towarzyszy znaczny wzrost liczby iteracji na każdym kroku czasowym oraz, że w czasie $d\tau$ porównywalnym z $d\tau_{gr}$ zachodzą znaczne zmiany jakościowe. W procesie, można wytłumaczyć tak dużą różnicę w końcowych ugięciach, gdy $d\tau \rightarrow d\tau_{gr}$.

Nie należy natomiast doszukiwać się przyczyny tych różnic głównie w ilości operacji arytmetycznych wykonywanych przez komputer w ciągu analizy całego procesu, a tym samym tylko w kumulacji błędów ucięcia bez uwzględniania $O(d\tau)$. Zauważmy (rys. 4), że liczba cykli $\beta = j + ITM$ dla $d\tau \rightarrow 0$ oraz dla $d\tau \rightarrow d\tau_{gr}$ jest porównywalna. W przypadku, gdy $d\tau \rightarrow 0$, na wielkość β wpływa liczba kroków czasowych, natomiast gdy $d\tau \rightarrow d\tau_{gr}$ o wielkości β decyduje globalna liczba iteracji ITM na wszystkich warstwach czasowych. Różnica tkwi jednak w tym, że 1) przy $d\tau \rightarrow 0$ istnieje graniczne przejście schematu różnicowego w równanie różniczkowe (nie zajmujemy się tu krokiem $d\theta$ — przejściu temu musi również towarzyszyć $d\theta \rightarrow 0$); 2) przy $d\tau \rightarrow d\tau_{gr}$ dochodzimy do granicy zbieżności metody iteracyjnej, którą w obszarach dużych zmian rozwiązania można bardzo łatwo „przeskoczyć” na zasadzie analogii ze zjawiskiem niestabilności nieliniowej; 3) porównywalna liczba cykli β raz jest otrzymywana dla $O(d\tau)$ bliskiej zeru, a drugi raz dla $O(d\tau_{gr})$ o wartości maksymalnej (gwarantującej jeszcze zbieżność).

Z rys. 4 wynika jeszcze jeden istotny wniosek. Mianowicie dla kroków całkowania po czasie bliskich zeru, tj. $d\tau \rightarrow 0$ z powodzeniem można stosować zamiast metod iteracyjnych metody zlinearyzowane. Liczba iteracji na jednym kroku czasowym wynosi w tym przypadku 1 do 2 i to tylko w obszarach dużych zmian rozwiązania. Wartość ε jest tu wyraźnie mała. Ponadto z rys. 4 wynika, jakie należy brać $d\tau$, tzw. $d\tau_{opt}$, ażeby przy wymaganej dokładności rozwiązania ε liczba cykli obliczeniowych β była minimalna. Uwzględniając fakt, że w tego typu obliczeniach inżynierskich dopuszczalny błąd względny nie powinien przekraczać 20%, możemy określić $d\tau$ spełniające ten warunek. Dla analizowanego tu problemu, przy założeniu $\varepsilon = 0,15$ (15%) mamy $d\tau_{opt} = 0,021$, $\beta = 78$. Zauważamy, że ze wzrostem $d\tau$ do wartości $d\tau \approx 0,050$ liczba cykli β pozostaje stała, a błąd rozwiązania ε gwałtownie rośnie.

Z powyższej analizy wynika, iż dobór optymalnej wartości kroku $d\tau$ jest ściśle związany z dokładnością rozwiązania ε i efektywnością procesu obliczeń β ; dlatego też wybór $d\tau_{opt}$ musi być związany ze szczegółową analizą całego zagadnienia.

Przedstawiona analiza dotyczy jednego wariantu różnicowej aproksymacji różniczkowego równania dynamiki niesprężystej membrany obciążonej falą ciśnienia. Oddzielnego potraktowania wymaga dobór właściwego schematu aproksymującego pochodne przestrzenne, nieliniowości, pochodną czasową oraz rozkład obciążenia.

Szczegółowa analiza tych zagadnień będzie przedmiotem kolejnych opracowań, a jej wyniki będą skonfrontowane z wynikami eksperymentalnymi.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. T. WIERZBICKI, *An approximate linear theory of thin viscoplastic shells*, Arch. Mech., **24**, 5-6, 1972.
2. P. S. SYMONDS, T. WIERZBICKI, *Membrane modes solutions for impulsively loaded circular plates*, J. Appl. Mech., **45**, 1978.
3. W. WOJNO, T. WIERZBICKI, *Perturbation solution for impulsively loaded viscoplastic plates*, Int. J. Non-linear Mech., **15**, 211-223, 19XX.
4. W. IDCZAK, T. WIERZBICKI, *Dynamic loading of a viscoplastic membrane*, Biul. PAN, Appl. Mech., 7-8, 1981.
5. W. IDCZAK, *Przybliżone rozwiązania w dynamice niesprężystych membran. Część 1. Rozpr. Inż.*, **4**, 1985.
6. W. IDCZAK, *Przybliżone rozwiązania w dynamice niesprężystych membran Część 2. Rozpr. Inż.*, **3**, 1986.
7. W. IDCZAK, *Wstępne modelowanie numeryczne dynamiki niesprężystych membran kołowych. Rozpr. Inż.* **35**, z. 3, 1987.
8. I. MARCZUK, *Analiza numeryczna zagadnień fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1983.
9. В. П. Ильин, *Прямой анализ устойчивости метода прогонки*. В кн.: Актуальные проблемы вычисленной математики и математического моделирования, Наука, Новосибирск 1985.
10. И. С. Гушин, *О методе последовательных прогонок*, Ж. В. М. и М. Ф., **16**, 2, 1976.
11. CZ. RYMARZ, *O zbieżności metod iteracyjnych przy numerycznym rozwiązywaniu zagadnień granicznych dla nieliniowego równania przewodnictwa ciepła*, Biul. WAT, **30**, 4, 344, 1981.
12. CZ. RYMARZ, I. WINNICKI, *Zbieżność iteracyjna metody niejawnej dla równań hydrodynamiki jako jeden z warunków dobrej aproksymacji numerycznej*, Biul. WAT, **32**, 1, 365, 1983.
13. CZ. RYMARZ, I. WINNICKI, *Some effective numerical methods for solving irregular boundary value problems of diffusion and hydrodynamics*, J. Techn. Phys., **25**, 3-4, 1984.
14. CZ. RYMARZ, I. WINNICKI, *Metody minimalizacji numerycznych efektów nefizycznych w rozwiązywaniu zagadnienia nieliniowego hydrodynamiki*, J. Techn. Phys., [w druku].
15. J. ORTEGA, W. RHEINBOLDT, *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Academic Press, New York 1970.
16. E. E. ROSINGER, *Stability and convergence for non-linear difference schemes are equivalent*, J. Inst. of Math. and its Appl., **2**, 1980.
17. А. А. САМАРСКИЙ, Э. С. НИКОЛАЕВ, *Методы решения сеточных уравнений*, Наука, Москва 1978.

РЕЗЮМЕ

УСТОЙЧИВОСТЬ И СХОДИМОСТЬ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА, В ДИНАМИКЕ НЕУПРУГИХ МЕМБРАН

Представлен анализ скалярного варианта прогонного метода с итерациями, примененного для неявного решения, нелинейной дифференциальной схемы динамики закрепленной неупругой круглой мембраны. Проведены анализ устойчивости и сходимости итерационного метода. В заключение обсуждаются результаты численных расчетов и их значение в практике.

SUMMARY

STABILITY AND CONVERGENCE OF A NUMERICAL METHOD APPLIED
TO INELASTIC MEMBRANE DYNAMICS

Scalar variant of the iterational sweep method is analyzed in connection with its application to the solution of an implicit, nonlinear difference scheme written for a circular, inelastic membrane fixed at its periphery. Stability of the problem and convergence of the iterational method applied are analyzed. Numerical results are discussed and possible practical applications of the method are indicated.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

Praca została złożona w Redakcji w dniu 12 maja 1986 r.
