ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 35, 2, 205–215, 1987
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

# OGÓLNE SFORMUŁOWANIE RÓWNAŃ RUCHU OŚRODKA LEPKOSPRĘŻYSTEGO

ADAM PODHORECKI (BYDGOSZCZ)

Rozpatruje się dowolny liniowy ośrodek lepkosprężysty. W równaniach naprężenie-odkształcenie występują wielomianowe operatory różniczkowe względem czasu. Do wyprowadzenia ogólnych równań przemieszczeniowych ruchu wykorzystano metodę wariacyjną. Stosując metody elementów skończonych do dyskretyzacji przestrzennej, uzyskano układ zwyczajnych równań różniczkowych względem czasu. Równania te można rozwiązać numerycznie dobrze znanymi i oprogramowanymi metodami (stosowanymi w m.in. metodzie elementów skończonych).

## 1. Wstęp

Tłumienie wewnętrzne (materiałowe) w metodzie elementów skończonych (MES) i innych metodach numerycznych opisuje się głównie lepkosprężystym modelem Kelvina–Voigta. Model ten nie w pełni opisuje lepkosprężyste właściwości ciał rzeczywistych, w związku z czym zachodzi potrzeba tworzenia złożonych związków konstytutywnych. W przypadku badania zjawisk reologicznych (pełzanie, relaksacja) w niektórych pracach (np. [1]) przyjmuje się model bardziej rozbudowany, jednak użyty tam sposób formułowania równań ruchu dostosowany jest raczej do konkretnej klasy zagadnień.

W niniejszej pracy rozpatruje się dowolny liniowy ośrodek lepkosprężysty. Związki naprężenie–odkształcenie mają charakter równań różniczkowych. Po dyskretyzacji wg metody elementów skończonych uzyskujemy układ zwyczajnych równań różniczkowych względem czasu. Równania te można rozwiązywać numerycznie dobrze znanymi metodami bezpośredniego całkowania lub metodą superpozycji modalnej.

Celem pracy jest więc sformułowanie równań ruchu dla dowolnie wymodelowanego ciała lepkosprężystego, przy czym uzyskane równania mają taką postać, że można do ich rozwiązywania stosować znane i oprogramowane procedury.

## 2. Równania fizyczne

Związki między naprężeniami $\sigma_{ij}$ a odkształceniami infinitezymalnymi $\varepsilon_{ij}$ opisujemy następującymi liniowymi równaniami różniczkowymi [2, 3]:

$$
\begin{aligned}
&P_1(D)\, S_{ij}(\mathbf{x}, t) = P_2(D)\, \gamma_{ij}(\mathbf{x}, t),\\
&P_3(D)\, \sigma_{kk}(\mathbf{x}, t) = P_4(D)\, \varepsilon_{kk}(\mathbf{x}, t), \qquad \mathbf{x}, t \in V \times \langle t_0, \infty),
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
&S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j\\ 0 & \text{dla } i \neq j\end{cases},\\
&\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}, \qquad D = \frac{\partial}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

są kolejno dewiatorami naprężenia i odkształcenia. Wielomianowe operatory różniczkowe względem czasu $P_i(D)$ zależą od przyjętego ośrodka lepkosprężystego. Najczęściej przyjmuje się, że przy wszechstronnym rozciąganiu lub ściskaniu ciało lepkosprężyste zachowuje się tak samo jak ciało sprężyste (Hooke'a). Równanie $(2.1)_2$ wyraża więc prawo zmiany objętości dla ośrodka sprężystego ($K$ oznacza moduł ściśliwości):

**Tablica 1**

| Nazwa modelu | $P_1(D)$ | $P_2(D)$ | Oznaczenia |
|---|---|---|---|
| Hooke'a | $1$ | $2\mu_1$ | $\lambda_1 = \dfrac{\eta_1}{\mu_1}$ |
| Kelvina–Voigta | $1$ | $2\mu_1\left(1+\lambda_1\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$ | $\lambda_2 = \dfrac{\eta_1}{\mu_2}$ |
| Maxwella | $1+\lambda_2\dfrac{\partial}{\partial t}$ | $2\lambda_2\mu_2\dfrac{\partial}{\partial t}$ | $\lambda_3 = \dfrac{\eta_2}{\mu_2}$ |
| Zenera I-go rodzaju | $1+\lambda_3\theta_1\dfrac{\partial}{\partial t}$ | $2\theta_1\mu_1\left(1+\lambda_3\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$ | $\lambda_4 = \dfrac{\eta_2}{\mu_1}$ |
| Zenera II-go rodzaju | $1+(\lambda_2+\lambda_3)\dfrac{\partial}{\partial t}$ | $2\lambda_2\mu_2\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\lambda_3\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$ | $\lambda_5 = \dfrac{\eta_3}{\mu_3}$, $\theta_1 = \dfrac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$ |
| Bürgersa | $1+\left(\dfrac{\lambda_4}{\theta_2}+\lambda_5\right)\dfrac{\partial}{\partial t}+\lambda_4\lambda_5\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ | $2\lambda_4\mu_1\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\lambda_5\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$ | $\theta_2 = \dfrac{\mu_3}{\mu_1+\mu_3}$ |

$\mu$ — moduł odkształcenia postaciowego [N m$^{-2}$]
$\eta$ — współczynnik lepkości [N s m$^{-2}$]

$$\begin{aligned} \sigma_{kk}(\mathbf{x}, t) &= 3K\varepsilon_{kk}(\mathbf{x}, t), \\ P_3(D) = 1, &\quad P_4(D) = 3K. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Operatory różniczkowe $P_1(D)$ i $P_2(D)$ przy tych założeniach dla znanych modeli lepkosprężystych [2] podaje się w tablicy 1. Przyjmowane są też inne założenia np., że współczynnik Poissona $\nu$ jest stały i nie zależy od czasu lub że ciało lepkosprężyste jest nieściśliwe i wtedy $P_3(D) = 0$.

Równania (2.1) można napisać w postaci rozwiniętej z wykorzystaniem rachunku wskaźnikowego [2]:

$$P_1(D)P_3(D)\sigma_{ij} = P_2(D)P_3(D)\varepsilon_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}[P_1(D)P_4(D) - P_2(D)P_3(D)]\varepsilon_{kk}, \tag{2.4}$$

lub rachunku macierzowego

$$P_1(D)P_3(D)\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}^*\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2.5}$$

gdzie

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{3}P_1(D)P_4(D)\mathbf{L}_1 + \frac{1}{2}P_2(D)P_3(D)\mathbf{L}_2, \tag{2.6}$$

jest macierzą lepkosprężystości.

Opis macierzy $\mathbf{L}_1$ i $\mathbf{L}_2$ zależy od analizowanego stanu naprężenia i odkształcenia, np. dla ogólnego stanu naprężenia mamy

$$\underset{6\times 6}{\mathbf{L}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underset{6\times 6}{\mathbf{L}_2} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathrm{col}\{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}\}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathrm{col}\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

## 3. Różniczkowe równania ruchu

Pod wpływem obciążeń powierzchniowych $p_i(\mathbf{x}, t)$ i objętościowych $X_i(\mathbf{x}, t)$ utworzy się w ciele o gęstości $\varrho$ pole przemieszczeń $u_i(\mathbf{x}, t)$ i związane z nim pola odkształceń $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$ i naprężeń $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$.

Różniczkowe równania ruchu oraz siłowe warunki brzegowe mają postać

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + X_i - \varrho\ddot{u}_i = 0, &\quad \mathbf{x}, t \in V \times \langle t_0, \infty), \\ \sigma_{ij}n_j = p_i, &\quad \mathbf{x}, t \in \partial V_\sigma \times \langle t_0, \infty). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Równania te można przedstawić w postaci macierzowej:

$$
\begin{aligned}
&\partial_x^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{X} - \varrho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\
&\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{p},
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

gdzie $\partial_x^T$ jest macierzą operatorową względem współrzędnych przestrzennych $\mathbf{x}$ oraz $\mathbf{n}$ — macierzą transformacji. Efektywne równania ruchu dla ciała lepkosprężystego uzyskamy rugując naprężenie posiłkując się związkiem fizycznym (2.5):

$$
\begin{aligned}
&\partial_x^T (\mathbf{E}^* \boldsymbol{\varepsilon}) + P_1 P_3 \mathbf{X} - P_1 P_3 (\varrho \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}, \\
&\mathbf{n}\mathbf{E}^* \boldsymbol{\varepsilon} = P_1 P_3 \mathbf{p}.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

## 4. Równania geometryczne

Rozpatruje się przypadek małych przemieszczeń, stąd tensor odkształcenia ma następującą postać w zapisie wskaźnikowym:

$$
\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}[u_{i,j} + u_{j,i}], \qquad \mathbf{x}, t \in V \times \langle t_0, \infty), \tag{4.1}
$$

lub w postaci macierzowej

$$
\boldsymbol{\varepsilon} = \partial_x \mathbf{u}. \tag{4.2}
$$

Na powierzchni $\partial V_u$ znane są kinematyczne warunki brzegowe:

$$
\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}, \qquad \mathbf{x}, t \in \partial V_u \times \langle t_0, \infty). \tag{4.3}
$$

## 5. Warunki początkowe

Do układu równań należy dołączyć warunki początkowe. Liczba tych danych zależy od rzędu równania ruchu. Rząd tych równań względem czasu zależy m.in. od charakteru równania konstytutywnego, a więc od modelu lepkosprężystego ciała. W przypadku stosowania modeli wyszczególnionych w tablicy 1 należy znać następujące warunki początkowe:

a) dwa modele Hooke'a i Kelvina–Voigta, np.

$$
\mathbf{u}(t_0) = \hat{\hat{\mathbf{u}}}_0, \qquad \dot{\mathbf{u}}(t_0) = \hat{\hat{\dot{\mathbf{u}}}}_0,
$$

b) trzy modele Maxwella, Zenera I-go i II-go rodzaju, np.

$$
\mathbf{u}(t_0) = \hat{\hat{\mathbf{u}}}, \qquad \dot{\mathbf{u}}(t_0) = \hat{\hat{\dot{u}}}, \qquad \ddot{\mathbf{u}}(t_0) = \hat{\hat{\ddot{\mathbf{u}}}}_0,
$$

c) cztery modele Bürgersa, np.

$$
\mathbf{u}(t_0) = \hat{\hat{\mathbf{u}}}_0, \qquad \dot{\mathbf{u}}(t_0) = \hat{\hat{\dot{\mathbf{u}}}}_0, \qquad \ddot{\mathbf{u}}(t_0) = \hat{\hat{\ddot{\mathbf{u}}}}_0, \qquad \dddot{\mathbf{u}}(t_0) = \hat{\hat{\dddot{\mathbf{u}}}}_0.
$$

## 6. Wariacyjne równanie dynamiki

Rozpatrujemy liniowe zagadnienie dynamiki ciała odkształcalnego, opisanego równaniami konstytutywnymi (2.5), równaniami ruchu $(3.3)_1$, równaniami geometrycznymi (4.2), siłowymi warunkami brzegowymi $(3.3)_2$, przemieszczeniowymi warunkami brzegowymi (4.3) oraz warunkami początkowymi. Wszystkie występujące wielkości w tych równaniach są odpowiednio gładkimi funkcjami współrzędnych przestrzennych $\mathbf{x}$ i współrzędnej czasowej $t$. Rozpatrzmy wirtualną wariację funkcji $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, którą oznaczamy symbolem $\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Zakładamy, że istnieje układ przemieszczeń $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, czyniący zadość równaniom równowagi $(3.3)_1$ i danym warunkom brzegowym $(3.3)_2$. Rozważmy klasę dowolnych przemieszczeń $\mathbf{u}+\delta\mathbf{u}$ zgodnych z więzami ciała, co powoduje, że $\delta\mathbf{u}$ musi zanikać na $\partial V_u$ i jest dowolne na $\partial V_\sigma$, gdzie określone są siły powierzchniowe

$$(6.1)\qquad \begin{aligned} &\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, && \mathbf{x}, t \in \partial V_u \times \langle t_0, \infty), \\ &\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \neq \mathbf{0}, && \mathbf{x}, t \in \partial V_\sigma \times \langle t_0, \infty). \end{aligned}$$

Przy tych założeniach na podstawie równań (3.3) możemy utworzyć całkowe równanie spełnione dla dowolnej chwili $t$, a także czasu $\langle t_0, t_1 \rangle$:

$$(6.2)\qquad \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \int_V \delta\mathbf{u}^T [\partial_x^T (\mathbf{E}^* \boldsymbol{\varepsilon}) + P_1 P_3 \mathbf{X} - P_1 P_3 \varrho \ddot{\mathbf{u}}]\, dV + \\ + \int_{\partial V_\sigma} \delta\mathbf{u}^T (P_1 P_3 \mathbf{p} - \mathbf{n}\mathbf{E}^* \boldsymbol{\varepsilon})\, d(\partial V) \Big\}\, d\tau = 0.$$

Dokonujemy przekształcenia pierwszej całki, wykorzystując twierdzenie Gaussa–Ostrogradskiego i założenie $(6.1)_1$:

$$(6.3)\qquad \int_V \delta\mathbf{u}^T \partial_x^T (\mathbf{E}^* \boldsymbol{\varepsilon})\, dV = \int_V \partial_x^T (\delta\mathbf{u}^T \mathbf{E}^* \boldsymbol{\varepsilon})\, dV - \int_V (\partial_x^T \delta\mathbf{u}^T) \mathbf{E}^* \boldsymbol{\varepsilon}\, dV = \\ = \int_{\partial V_\sigma} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{n}\mathbf{E}^* \boldsymbol{\varepsilon}\, d(\partial V) - \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}^* \boldsymbol{\varepsilon}\, dV,$$

przy czym

$$(6.4)\qquad \begin{gathered} \partial_x(\delta\mathbf{u}) = \delta(\partial_x \mathbf{u}) = \delta(\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}), \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \qquad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}), \\ \delta(\partial_x \mathbf{u})^T (\mathbf{E}^* \boldsymbol{\varepsilon}) = \delta(\boldsymbol{\varepsilon}^T + \boldsymbol{\omega}^T)(\mathbf{E}^* \boldsymbol{\varepsilon}) = \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}^* \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \delta\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{E}^* \boldsymbol{\varepsilon} = O, \end{gathered}$$

gdzie $\omega_{ij}$ oznacza tensor antysymetryczny a $\mathbf{E}^* \boldsymbol{\varepsilon}$ tensorem symetrycznym.

Końcowe równanie (6.2) może być napisane w postaci, którą nazwiemy wariacyjnym równaniem ruchu

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}^* \boldsymbol{\varepsilon} + \delta\mathbf{u}^T P_1 P_3 (\varrho\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{X})\, dV - \int_{\partial V_\sigma} \delta\mathbf{u}^T P_1 P_3\, \mathbf{p}\, d(\partial V) \right\} d\tau = 0. \tag{6.5}$$

Równanie to rozwiązujemy ze względu na $\mathbf{u}$ przy respektowaniu równań geometrycznych (4.2) i warunków początkowych.

Ogólność powyższych rozważań polega na niestosowaniu dyskusyjnych założeń o zanikaniu wariacji $\delta\mathbf{u}$ w chwilach $t_0$ i $t_1$.

Interesująca jest różnica między równaniem wariacyjnym (6.5) i znaną zasadą Hamiltona dla ciał liniowo sprężystych

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta (U - T + A)\, d\tau = 0, \tag{6.6}$$

gdzie $U$, $T$, $A$ oznaczają kolejno całkowitą energię odkształcenia, całkowitą energię kinetyczną, energię potencjalną obciążeń zachowawczych.

Napiszemy najpierw równania (3.3) w innej równoważnej postaci:

$$\begin{aligned} &\partial_x^T \left[ \sum_{i=1}^{m} \left( b_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}} \mathbf{L}_1 \boldsymbol{\varepsilon} + c_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}} \mathbf{L}_2 \boldsymbol{\varepsilon} \right) \right] + \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} (\mathbf{X} - \varrho\ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}, \\ &\mathbf{n} \sum_{i=1}^{m} \left( b_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}} \mathbf{L}_1 \boldsymbol{\varepsilon} + c_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}} \mathbf{L}_2 \boldsymbol{\varepsilon} \right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} \mathbf{p}, \end{aligned} \tag{6.7}$$

gdzie współczynniki $a_i$, $b_i$, $c_i$ zależą od modelu lepkosprężystego (tablica 2). Utwórzmy następnie równanie pracy wirtualnej równoważne wyrażeniu (6.2):

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \Bigg\{ \int_V \delta\mathbf{u}^T \Bigg[ \partial_x^T \sum_{i=1}^{m} \left( b_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}} \mathbf{L}_1 \boldsymbol{\varepsilon} + c_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}} \mathbf{L}_2 \boldsymbol{\varepsilon} \right) + \\ + \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} (\mathbf{X} - \varrho\ddot{\mathbf{u}}) \Bigg] dV + \int_{\partial V_\sigma} \delta\mathbf{u}^T \Bigg[ \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} \mathbf{p} - \\ - \mathbf{n} \sum_{i=1}^{m} \left( b_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}} \mathbf{L}_1 \boldsymbol{\varepsilon} + c_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}} \mathbf{L}_2 \boldsymbol{\varepsilon} \right) \Bigg] d(\partial V) \Bigg\} d\tau = 0. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Po wykonaniu przekształcenia Gaussa-Ostrogradskiego na pierwszej całce, całkowaniu przez części całki z wyrazem bezwładnościowym $\varrho\ddot{\mathbf{u}}$ oraz po zastosowaniu takich samych oznaczeń jak w (6.6):

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T (b_1 \mathbf{L}_1 + c_1 \mathbf{L}_2) \boldsymbol{\varepsilon}\, dV, \\ T &= \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{u}}^T \varrho a_1 \dot{\mathbf{u}}\, dV, \end{aligned} \tag{6.9}$$

**Tablica 2**

| Nazwa modelu | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Hooke'a | 1 | 0 | 0 | $K$ | 0 | 0 | $\mu_1$ | 0 | 0 |
| Kelvina–Voigta | 1 | 0 | 0 | $K$ | 0 | 0 | $\mu_1$ | $\mu_1 \lambda_1$ | 0 |
| Maxwella | 1 | $\lambda_2$ | 0 | $K$ | $K\lambda_2$ | 0 | 0 | $\mu_2 \lambda_2$ | 0 |
| Zenera I-go rodzaju | 1 | $\lambda_3 \theta_1$ | 0 | $K$ | $K\theta_1 \lambda_3$ | 0 | $\theta_1 \mu_1$ | $\mu_1 \theta_1 \lambda_3$ | 0 |
| Zenera II-go rodzaju | 1 | $\lambda_2+\lambda_3$ | 0 | $K$ | $K(\lambda_2+\lambda_3)$ | 0 | 0 | $\mu_2 \lambda_2$ | $\mu_2 \lambda_2 \lambda_3$ |
| Bürgersa | 1 | $\frac{\lambda_4}{\theta_2}+\lambda_5$ | $\lambda_4 \lambda_5$ | $K$ | $K\left(\frac{\lambda_4}{\theta_2}+\lambda_5\right)$ | $K\lambda_4 \lambda_5$ | 0 | $\mu_1 \lambda_4$ | $\mu_1 \lambda_4 \lambda_5$ |

Założenia o oznaczenia są takie same jak w tablicy 1.

$$A = \int_V \mathbf{u}^T \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} \mathbf{X}' dV + \int_{\partial V_\sigma} \mathbf{u}^T \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} \mathbf{p}' d(\partial V), \tag{6.9 [cd.]}$$

($X'$ i $p'$ oznacza obciążenia zachowawcze) uzyskujemy równanie przedstawiające zasadę Hamiltona w postaci ogólnej:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(U - T + A)\, d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \int_V \delta\mathbf{u}^T \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} \mathbf{X}'' dV + \int_{\partial V_\sigma} \delta\mathbf{u}^T \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} \mathbf{p}'' d(\partial V) - \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \sum_{i=2}^{m} \Big( b_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}} \mathbf{L}_1 \boldsymbol{\varepsilon} + c_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}} \mathbf{L}_2 \boldsymbol{\varepsilon} \Big) dV + \int_V \delta\dot{\mathbf{u}}^T \sum_{j=2}^{n} a_j \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} \ddot{\mathbf{u}}\, dV \Big\} d\tau - \int_V \delta\dot{\mathbf{u}}^T \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial^{j}}{\partial t^{j}} \mathbf{u}\, dV \Big|_{t_0}^{t_1}, \tag{6.10}$$

gdzie $\mathbf{X}''$ i $\mathbf{p}''$ są odpowiednio siłami zewnętrznymi masowymi i powierzchniowymi, które nie są zawarte w funkcji określającej $A$ ($\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}''$, $\mathbf{X} = \mathbf{X}' + \mathbf{X}''$).

Otrzymana więc postać zasady Hamiltona nie daje się wyrazić prosto jako minimum dobrze określonego funkcjonału.

## 7. Równania ruchu dla dyskretnego modelu ciała lepkosprężystego

Ciało lepkosprężyste dyskretyzujemy wg formuły MES. Dla elementu skończonego (ES) opisujemy pola przemieszczeń, odkształceń, prędkości i przyspieszeń przemieszczeń — przemieszczeniami węzłowymi $\mathbf{r}_e$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}(\mathbf{x})\, \mathbf{r}_e(t), \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) &= \partial_x \mathbf{u} = \partial_x (\mathbf{N}\mathbf{r}_e) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\, \mathbf{r}_e, \qquad \mathbf{B} = \partial_x \mathbf{N}, \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{N}\mathbf{r}_e) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\, \dot{\mathbf{r}}_e, \\ \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}(\mathbf{x})\, \ddot{\mathbf{r}}_e, \end{aligned} \tag{7.1}$$

gdzie $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ jest macierzą kształtu zawierającą funkcję przestrzenne. Wielkości te podstawiamy do wariacyjnego równania ruchu (6.5)

$$\sum_{e=1}^{E} \Big\{ \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \int_V \delta\mathbf{r}_e^T \big[ \mathbf{B}^T \mathbf{E}^* (\mathbf{B}\mathbf{r}_e) + \mathbf{N}^T P_1 P_3 (\varrho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{r}}_e) - \tag{7.2}$$

(7.2) [cd.] $$-\mathbf{N}^T P_1 P_3 \mathbf{X}]\, dV - \int\limits_{\partial V_e} \delta \mathbf{r}_e^T \mathbf{N}^T P_1 P_3 \mathbf{p} d(\partial V)\} \, d\tau = 0.$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\mathbf{K}_e^0 = \frac{1}{3} \int\limits_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{L}_1 \mathbf{B}\, dV,$$

(7.3) $$\mathbf{K}_e^p = \frac{1}{2} \int\limits_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{B}\, dV, \qquad \mathbf{M}_e = \int\limits_{V_e} \mathbf{N}^T \varrho \mathbf{N}\, dV,$$

$$\mathbf{R}_e = \int\limits_{V} \mathbf{N}^T \mathbf{X}\, dV + \int\limits_{\partial V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{p} d(\partial V),$$

znajdziemy

(7.4) $$\sum_{e=1}^{E} \{ \int\limits_{t_0}^{t_1} \delta \mathbf{r}_e^T \{[\mathbf{K}_e^0 P_1 P_4 + \mathbf{K}_e^p P_2 P_3] \mathbf{r}_e + \mathbf{M}_e P_1 P_3 \ddot{\mathbf{r}}_e - P_1 P_3 \mathbf{R}_e\} \, d\tau\} = 0.$$

Równanie to musi być spełnione dla dowolnych wariacji $\delta \mathbf{r}_e'^T$ oraz musi zachodzić tak w dowolnym przedziale czasu $(t_0, t_1)$ jak też w każdej chwili $t$:

(7.5) $$\mathbf{M}(P_1 P_3 \ddot{\mathbf{r}}) + \mathbf{K}^0 (P_1 P_4 \mathbf{r}) + \mathbf{K}^p (P_2 P_3 \mathbf{r}) = P_1 P_3 \mathbf{R}.$$

Globalne macierze $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}^0$, $\mathbf{K}^p$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{r}$ oznaczają odpowiednio macierz bezwładności mas, macierz sztywności objętościowej, macierz sztywności postaciowej,

**Tablica 3**

| Nazwa modelu | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | $\gamma_3$ | $\gamma_4$ | $\gamma_5$ | $\gamma_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Hooke'a | | | | | $3K$ | $2\mu_1$ |
| Kelvina–Voigta | | | | $2\mu_1 \lambda_1$ | $3K$ | $2\mu_1$ |
| Maxwella | | | $3K\lambda_2$ | $2\mu_2 \lambda_2$ | $3K$ | |
| Zenera I-go rodzaju | | | $3K\theta_1 \lambda_3$ | $2\mu_1 \theta_1 \lambda_3$ | $3K$ | $2\mu_1 \theta_1$ |
| Zenera II-go rodzaju | | $2\mu_2 \lambda_2 \lambda_3$ | $3K(\lambda_2+\lambda_3)$ | $2\mu_2 \lambda_2$ | $3K$ | |
| Bürgersa | $3K\lambda_4 \lambda_5$ | $2\mu_1 \lambda_4 \lambda_5$ | $3K\left(\frac{\lambda_4}{\theta_2}+\lambda_5\right)$ | $2\mu_1 \lambda_4$ | $3K$ | |
| Założenia i oznaczenia są takie same jak w tablicy 1. | | | | | | |

macierz–kolumnę obciążeń zewnętrznych i macierz–kolumnę zawierającą przemieszczenia węzłów zdyskretyzowanej struktury. W macierzach tych należy uwzględnić kinematyczne warunki brzegowe (4.3).

Jeżeli ciało lepkosprężyste odpowiadać będzie założeniom (2.3), to równanie (7.5) możemy napisać w praktyczniejszej formie (operatory $P_1$, $P_2$ podane są w tablicy 1):

$$(7.6)\qquad \frac{\gamma_1}{\gamma_5}\mathbf{M}\dddot{\mathbf{r}}\!\dot{} + \frac{\gamma_3}{\gamma_5}\mathbf{M}\dddot{\mathbf{r}} + (\mathbf{M}+\gamma_1\mathbf{K}^0+\gamma_2\mathbf{K}^p)\ddot{\mathbf{r}} + \\ +(\gamma_3\mathbf{K}^0+\gamma_4\mathbf{K}^p)\dot{\mathbf{r}} + (\gamma_5\mathbf{K}^0+\gamma_6\mathbf{K}^p)\mathbf{r} = \mathbf{R} + \frac{\gamma_3}{\gamma_5}\dot{\mathbf{R}} + \frac{\gamma_1}{\gamma_5}\ddot{\mathbf{R}},$$

gdzie współczynniki $\gamma_i$ zależą od przyjętego modelu lepkosprężystego (tablica 3).

Porównując współczynniki $\gamma_i$ (tablica 3) z równaniem (7.6) stwierdzamy, że mamy do czynienia z różnym rzędem równania różniczkowego w zależności od modelu lepkosprężystego:

(i) równanie II-go rzędu dla modeli Hooke'a i Kelvina–Voigta,

(ii) równanie III-go rzędu dla modeli Maxwella i Zenera;

(iii) równanie IV-go rzędu dla modelu Bürgesa.

W zależności od rzędu równania różniczkowego, do jednoznacznego rozwiązania potrzebne są warunki początkowe, które omawiano w punkcie 5.

Przy quasi-statycznym działaniu obciążeń zewnętrznych i pomijalnym wpływie wymuszeń kinematycznych, znaczenie sił bezwładności staje się pomijalne. Równanie (7.6) przyjmie w tym przypadku prostszą postać:

$$(7.7)\qquad (\gamma_1\mathbf{K}^0+\gamma_2\mathbf{K}^p)\ddot{\mathbf{r}} + (\gamma_3\mathbf{K}^0+\gamma_4\mathbf{K}^p)\dot{\mathbf{r}} + (\gamma_5\mathbf{K}^0+\gamma_6\mathbf{K}^p)\mathbf{r} = \mathbf{R}.$$

Równanie (7.6) lub (7.7) można rozwiązać w sposób przybliżony metodą bezpośredniego całkowania lub metodą superpozycji modalnej. Do pierwszej grupy zaliczamy metody całkowania jawnego (np. metoda różnic skończonych), metody całkowania niejawnego (np. metody Wilsona i Newmarka) oraz metodą mieszaną (jawno-niejawną). Można również równanie (7.6) lub (7.7) sprowadzić do równań różniczkowych pierwszego rzędu (postać normalna) i następnie zastosować jedną ze znanych metod numerycznych (metody jednokrokowe, np. Rungego–Kutty lub wielokrokowe).

Zjawiska reologiczne (pełzanie, relaksacja) są procesami bardzo powolnymi (trwającymi latami) — na ogół przy obciążeniu niewiele zmieniającym się w czasie. W takim przypadku bezkonkurencyjne są metody całkowania, w których krok całkowania może być dostatecznie długi. Taki wymóg spełniają metody bezwarunkowo stabilne, np. metody Wilsona i Newmarka (przy odpowiednio dobranych parametrach metody).

Interesujące jest rozwiązanie zagadnienia liniowej lepkosprężystości przy zastosowaniu metody czasoprzestrzennych elementów skończonych, gdzie uzyskujemy wprost układ równań algebraicznych [4]. Duże walory ogólności mają prace Świtki [5 i 6].

Omawiana tematyka będzie przedmiotem następnych prac, gdzie rozwiązywane będą konkretne zadania inżynierskie.

## Literatura cytowana w tekście

1. B. Budkowska, *Analiza numeryczna warstwowego ośrodka lepkosprężystego*, Mech. i Komputer, t. 2, PWN Warszawa-Poznań, 275–286, 1980.
2. W. Nowacki, *Teoria pełzania*, Arkady, Warszawa 1963.
3. M. E. Gurtin and E. Sternberg, *On the linear theory of viscoelasticity*, Arch. National Mech. Anal., **11**, 1, 291–356, 1962.
4. A. Podhorecki, A. Podhorecka, *Lepkosprężysty element czasoprzestrzenny*, Rozpr. Inżyn., **33**, 1/2, 3–22, 1985.
5. B. Husiar, R. Świtka, *Quasi-statyczne pełzanie cięgna lepkosprężystego w ujęciu dyskretnym*, Arch. Inżyn. Lądow., **25**, 1, 11–19, 1979.
6. R. Świtka, *Propozycja dyskretyzacji problemów lepkosprężystości*, Materiały Sympozjum „Reologia Drewna i Konstrukcji Drewnianych", Akademia Rolnicza w Poznaniu, 1984.

## Р е з ю м е

### ОБЩАЯ ФОРМУЛИРОВКА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Рассматривается произвольная линейная вязкоупругая среда. В уравнениях напряжение — деформация выступают многочленные дифференциальные операторы по времени. Для вывода общих уравнений движения в перемещениях использован вариационный метод. Применяя метод конечных элементов для пространственной дискретизации, получена система обыкновенных диференциальных уравнений по времени. Эти уравнения можно решать численно хорошо известными и опрограммированными методами (применяемыми, между прочим, в методе конечных элементов).

## S u m m a r y

### GENERAL FORMULATION OF THE EQUATIONS OF MOTION OF VISCO-ELASTIC MEDIA

An arbitrary, linear visco-elastic medium is considered. The stress-strain relations contain polynomial differential operators with respect to time. Variational methods are used to derive the general equations of motion expressed in terms of displacements. Application of the finite element method to the spatial discretization of the problem yields a set of ordinary differential equations which may be solved by means of well-known numerical methods.

**AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA, BYDGOSZCZ**

*Praca została złożona w Redakcji dnia 18 września 1985 r.*