

## PRZESTRZENNE ROZKŁADY DYNAMICZNYCH OBCIĄŻEŃ MIĘDZYŻĘBNYCH W WALCOWEJ PRZEKŁADNI O ZĘBACH PROSTYCH

STANISŁAW STACHOŃ (KRAKÓW)

Podano metodę i sposób wyznaczania międzyzębnych obciążeń statycznych i dynamicznych jako funkcji dwóch zmiennych tj. wzdłuż odcinka przyporu i szerokości wieńca koła zębatego dla walcowej przekładni zębatej o zębach prostych. Równanie różniczkowe opisujące ruch przekładni scałkowano metodą linearyzacji równań nieliniowych, stanowiącą połączenie metody analitycznej z numeryczną. W obliczeniach numerycznych symulujących ruch przekładni posłużono się odpowiednio zmodyfikowanym modelem L. Müllera. Rozszerzono go na model przestrzenny oraz wprowadzono do opisu jego parametrów tzw. funkcję deformacji  $V(x, y)$ . Przedstawiona analiza uwzględnia równoczesny wpływ szeregu czynników konstrukcyjnych, materiałowych i geometrycznych — łącznie z modyfikacją zarysu i linii zęba.

### 1. WSTĘP

Problem dynamicznych obciążeń międzyzębnych w przekładniach zębatych jest tematem wielu prowadzonych obecnie prac badawczych. Wpływ pojedynczych czynników, zarówno zewnętrznych jak i wewnętrznych przekładni, na jej dynamikę jest w dotychczasowej literaturze przeanalizowany dość szczegółowo (np. w pracy [1]), ale uwzględnienie ich w sposób łączny, szczególnie w opracowaniach teoretycznych, jest niedostateczne. Z problemem tym związane są duże trudności natury formalnej i obliczeniowej. W obecnej pracy podjęto próbę jego rozwiązania wykorzystując w tym celu znany, lecz odpowiednio rozszerzony model przekładni — mechaniczny model L. MÜLLERA [2]. Praca jest rozwinięciem analizy obciążeń dynamicznych w przekładniach zębatych, przedstawionej w [6], gdzie zamieszczono procedurę obliczeniową sił dynamicznych w zażębieniu wzdłuż odcinka przyporu. Obecnie analizowane jest zagadnienie dwuwymiarowe, które prowadzi do wyznaczenia przestrzennych rozkładów obciążeń międzyzębnych  $p(x, y)$  jako funkcji dwóch zmiennych; wzdłuż odcinka przyporu  $y$  i wzdłuż szerokości wieńca koła zębatego  $x$ .

Procedura całkowania różniczkowych równań ruchu przekładni oparta jest na metodzie zamieszczonej w pracach [5 i 7] i opiera się na wyznaczanej

indywidualnie dla danej przekładni tzw. funkcji deformacji  $V(x, y)$ . Funkcja ta opisuje wpływ odkształceń, niedokładności i modyfikacji zębów na rozkład obciążeń statycznych i dynamicznych. Za jej pomocą zmodyfikowano wspomniany model L. Müllera. Z tych względów metodzie i procedurze jej wyznaczania poświęcono dalszy, oddzielny rozdział niniejszej pracy.

Przeprowadzona i przedstawiona w obecnym opracowaniu analiza statyczna i dynamiczna dotyczy następującej przekładni: 1) jednostopniowej, walcowej o zębach prostych; 2) wykonanej w wysokiej klasie dokładności (powyżej 6 klasy wg PN), tzn. takiej, w której zmierzone odchyłki podziału, zarysu itp. można by było pominąć w porównaniu ze względnymi przemieszczeniami zębów, spowodowanymi średnim statycznym obciążeniem nominalnym.

Rozpatrzono przekładnię, w której uwzględniono następujące elementy: a) zmienny rozkład międzyzębnego obciążenia wzdłuż linii styku i odcinka przyporu; b) pewne odstępstwa od idealnego kształtu zarysu i linii zęba, które związane z ewolwentową modyfikacją zarysu (modyfikacja Maaga) oraz paraboliczną modyfikacją linii; c) odchylenia od równoległego położenia osi wałów, wynikające z odchyłek równoległości osi i statycznych, niesymetrycznych przemieszczeń podpór; d) statyczne odkształcenia giętno-skrętne zębownika i wałów; e) zmianę sztywności pojedynczej pary współpracujących zębów wzdłuż odcinka przyporu  $c = c(y)$ ; f) zmianę sztywności i tłumienia na powierzchni współpracujących zębów wzdłuż linii zęba  $x$ , wynikającą z aktualnej długości linii międzyzębnego styku.

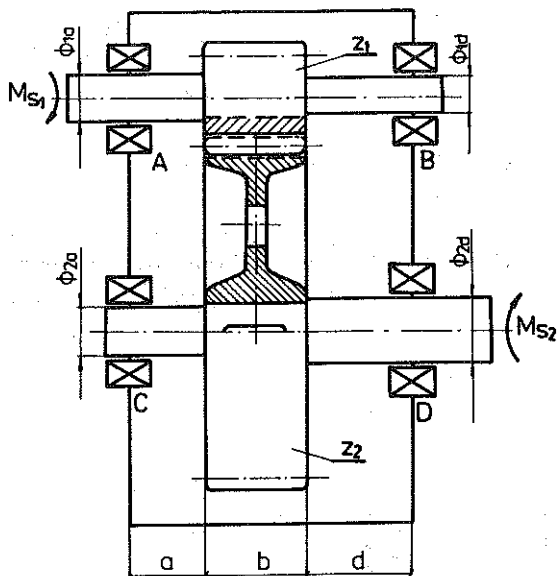
W obliczeniach pominięto natomiast a) strukturę dynamiczną napędu; rozważono przekładnię całkowicie zewnętrznie odizolowaną dynamicznie; b) drgania giętno-skrętne wałów, c) wpływ oddziaływań łożysk na dynamikę przekładni.

## 2. MODEL PRZEKŁADNI

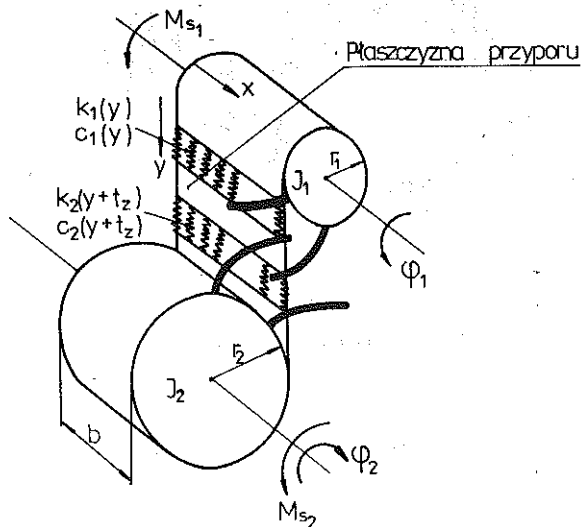
W rezultacie poczynionych założeń przekładnię walcową, której schemat przedstawiono na rys. 1, zastąpiono modelem dyskretnym (rys. 2). Zgodnie z wprowadzonymi oznaczeniami ruch przekładni opisano równaniem

$$(2.1) \quad r_1 \ddot{\varphi} + \frac{k_1}{mk} \sum_{j=1}^k [r_1 \dot{\varphi} - \Delta_1(j)] + \frac{k_2}{mk} \sum_{j=1}^k [r_1 \dot{\varphi} - \Delta_2(j)] + \\ + \frac{c_1}{mk} \sum_{j=1}^k [r_1 \varphi - \Delta_1(j)] + \frac{c_2}{mk} \sum_{j=1}^k [r_1 \varphi - \Delta_2(j)] = \frac{1}{m} \frac{M_{s1}}{r_1},$$

gdzie  $r_1 \varphi = r_1 \varphi_1 - r_2 \varphi_2$  oznacza względne przemieszczenie kół,  $r_1, r_2$  promienie kół zasadniczych [m],  $\varphi_1, \varphi_2$  kąty obrotu kół [rd],  $m = (m_1 + m_2) / (m_1 m_2)$  — zredukowaną masę kół na wałek I [kg],  $m_1 = J_1 / r_1^2$ ,  $m_2 = J_2 / r_2^2$ ,



Rys. 1. Schemat przekładni



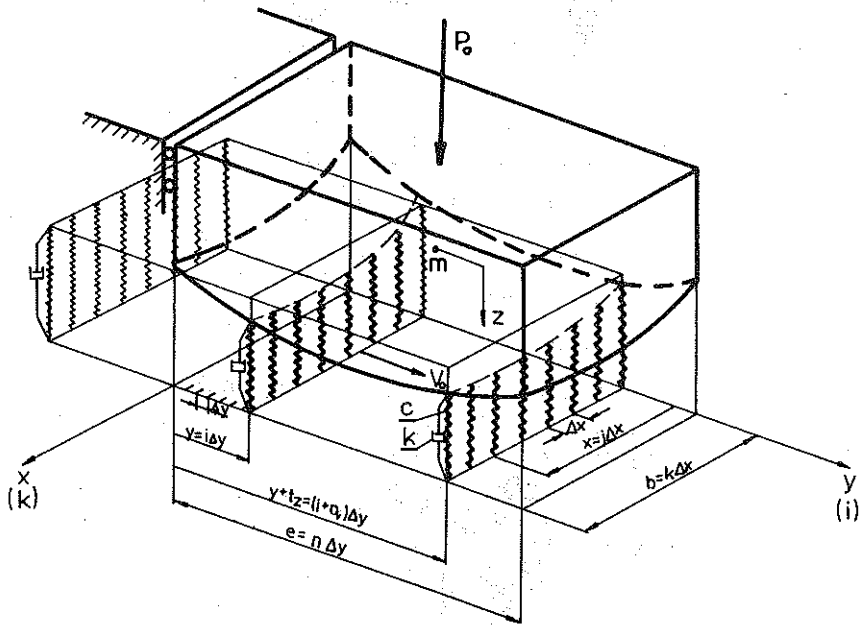
Rys. 2. Model przekładni

$J_1, J_2$  — masowe momenty bezwładności,  $c_1 = c(y)$ ,  $c_2 = c(y+t_z)$  — sztywności par będących w zazębieniu w [N/m],  $k_1 = k(y)$ ,  $k_2 = k(y+t_z)$  — współczynniki tłumienia na powierzchni współpracujących zębów dla par będących w zazębieniu [kg/s],  $y$  — współrzędną wzdłuż odcinka przyporu,  $t_z$  — podziałkę na kole zasadniczym [m],  $\Delta_1(j) = \Delta(y, x)$ ,  $\Delta_2(j) = \Delta(y+t_z, x)$  —

sumaryczne odchylenie od idealnej geometrii obydwu zębów wzdłuż szerokości koła odpowiednio dla 1 i 2 pary współpracujących zębów [m] oraz  $k$  — liczbę przedziałów związanych z dyskretyzacją modelu wzdłuż szerokości koła.

W dalszej analizie posłużono się odpowiednio rozszerzonym (na przestrzenny) modelem przekładni, jaki został zaproponowany przez L. Müllera.

Równanie ruchu masy bryły modelu (rys. 3), opisaną wspomnianą funkcją deformacji  $\nabla(x, y)$ , ma w sensie matematycznym postać analogiczną do równania (2.1) opisującego ruch przekładni, mianowicie



Rys. 3. Mechaniczny model przekładni

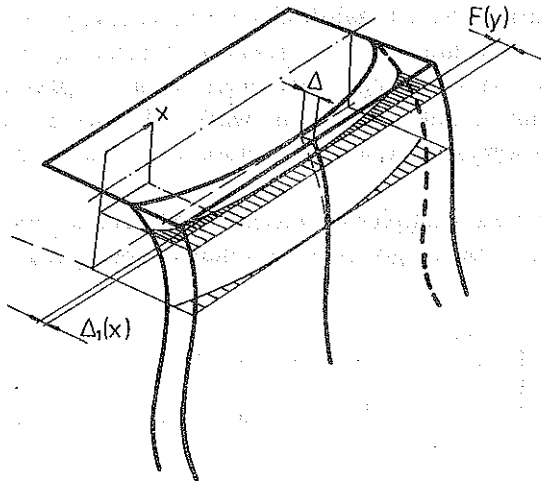
$$(2.2) \quad \ddot{z} + \frac{k_1}{mk} \sum_{j=1}^k [\dot{z} - \dot{V}_1(j)] + \frac{k_2}{mk} \sum_{j=1}^k [\dot{z} - \dot{V}_2(j)] + \\ + \frac{c_1}{mk} \sum_{j=1}^k [z - V_1(j)] + \frac{c_2}{mk} \sum_{j=1}^k [z - V_2(j)] = \frac{P_0}{m},$$

przy czym przemieszczeniu  $z$  odpowiada względne przemieszczenie kół, prędkości palisady sprężyn  $V_0$  odpowiada prędkość obwodowa kół ( $V_0 = \omega r_1$ ), masie bryły modelu  $m$  — zredukowana masa kół na wałek I, odchyleniom od idealnej geometrii zębów spowodowanym modyfikacją i deformacjami elementów przekładni — funkcją deformacji  $\nabla(x, y)$  oraz sile  $P_0$  — sile obwodowa pochodząca od statycznego obciążenia zewnętrznego  $M_{s1}$  ( $P_0 = M_{s1}/r_1$ ).

### 3. MODYFIKACJA ZARYSU I LINII ZĘBA

Do analizy dynamicznej przekładni wprowadzono pewne parametry związane z modyfikacją zarysu i linii zęba. W związku z tym omówiono i podano w odpowiednim skrócie metodę i sposób ich wyznaczania.

Przy opisie zmodyfikowanego zarysu zęba posłużono się funkcją  $F(y)$ , dla której wartości wzdłuż odcinka przyporu wyznaczono na podstawie tzw. modyfikacji Maaga. Zgodnie z wymaganiami dotyczącymi tej modyfikacji oraz przy wykorzystaniu danych zawartych w pracy [4] określono na drodze



Rys. 4. Ząb o zmodyfikowanym zarysie i linii

numerycznej parametry modyfikacji obydwu kół oraz konstrukcyjne parametry narzędzia-zębatki. Linie zęba zmodyfikowano natomiast wg zaleceń zawartych w pracy [3]. Dla tak zaproponowanej modyfikacji wyznaczoną teoretycznie zmodyfikowaną linię zęba aproksymowano parabolą  $\Delta(x) = \alpha x^2 + \beta x + \delta$ , dla której współczynniki  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\delta$  uzyskuje się również numerycznie dla dowolnego nominalnego obciążenia  $M_n$ . Na rys. 4 przedstawiono na tle zęba niezmodyfikowanego ząb po modyfikacji jego zarysu i linii.

### 4. FUNKCJA DEFORMACJI $\nabla(x, y)$

Funkcja deformacji  $\nabla(x, y)$  odwzorowuje powierzchnię boczną zęba i wynika z analizy odkształceń giętno-skrętnych kół i wałów oraz niedokładności wykonania — w tym również dowolnych modyfikacji zębów znajdujących się pod obciążeniem statycznym. Posługiwanie się nią w obliczeniach dynamicznych powoduje pewne nieścisłości, gdyż nie odwzorowuje wpływu amplitud drgań giętno-skrętnych wałów. Mając na uwadze, że są one pomijal-

nie małe w stosunku do statycznych deformacji zębów, wprowadzenie tej funkcji pozwala analizować model przekładni o jednym stopniu swobody, co znacznie upraszcza i tak złożony problem obciążeń dynamicznych.

Funkcję  $\nabla(x, y)$  wyznaczono z następującego warunku:

$$(4.1) \quad p(x, y) = \frac{c(y)}{b} [z(y) - \nabla(x, y)],$$

gdzie  $p(x, y)$  oznacza międzyzębne obciążenie statyczne,  $c(y)$  całkowitą sztywność pary współpracujących zębów dla dowolnego punktu odcinka przyporu,  $z(y)$  względne przemieszczenie kół oraz  $b$  szerokość wieńca koła zębatego przy następujących założeniach dotyczących przekładni (rys. 1): 1) wałki i zębniak odkształcają się sprężysto (ulegają zginaniu i skręcaniu); 2) koło duże jest sztywne; jego przemieszczenia w płaszczyźnie przyporu związane są jedynie z odkształceniami wałka II oraz 3) zęby obydwu kół odkształcają się sprężysto, a ich sztywność ma charakter podłoża winklerowskiego.

W tym celu należało najpierw określić międzyzębne obciążenia statyczne  $p(x, y)$ , które dla dowolnego punktu odcinka przyporu  $y$  można przedstawić w postaci

$$(4.2) \quad p(x, y) = \begin{cases} \frac{c(y)}{b} z & \text{dla } x \in \langle x_1, x_2 \rangle, \\ 0 & \text{dla } x \in \langle 0, x_1 \rangle \vee x \in \langle x_2, b \rangle, \end{cases}$$

gdzie

$$(4.3) \quad z = [r_1 \varphi_1(x) - \Delta_1(x) - w_1(x)] - [r_2 \varphi_2(x) + \Delta_2(x) + w_2(x)] + \delta(x),$$

przy czym  $x_1, x_2$  oznacza granice przedziału, w którym istnieje międzyzębny kontakt;  $w_1(x), w_2(x)$  krzywe przemieszczeń zębów w płaszczyźnie przyporu pochodzących od zginania;  $\delta(x)$  funkcję opisującą przemieszczenie związane z nierównoległością osi oraz pochodzące od niesymetrycznego ugięcia podpór;

$$(4.4) \quad \Delta_1(x) = \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \delta_1 \quad \text{oraz} \quad \Delta_2(x) = \alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \delta_2,$$

oznacza funkcje opisujące zmodyfikowaną linię zębów obydwu kół.

Opierając się na przedstawionych założeniach i na elementarnych zasadach wytrzymałości materiałów, uwikłane równanie nieliniowe (4.2) doprowadzono do następującej postaci:

$$(4.5) \quad p_x^{(4)}(x, y) - 2Tp_x''(x, y) + H^2 p(x, y) = 0,$$

gdzie

$$T = \frac{1}{2} \frac{c(y)}{b} \frac{r_1^2}{GJ_0},$$

$$(4.6) \quad H^2 = \frac{c(y)}{b} \frac{1}{E_1 J_1},$$

przy czym  $GJ_0$  oznacza sztywność skrętną zębniaka oraz  $E_1 J_1$  sztywność giętną zębniaka. Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$(4.7) \quad p(x, y) = e^{T_1 x} (C_1 \sin H_1 x + C_2 \cos H_1 x) + \\ + e^{-T_1 x} (C_3 \sin H_1 x + C_4 \cos H_1 x),$$

gdzie

$$(4.8) \quad T_1 = \sqrt{\frac{H+T}{2}}, \\ H_1 = \sqrt{\frac{H-T}{2}},$$

gdyż  $T^2 - H^2 < 0$ .

Złożoność i nieliniowość problemu uwidoczniła się w podanych niżej warunkach brzegowych, z których należy wyznaczyć wartości graniczne przedziału międzyzębnego kontaktu  $x_1$  i  $x_2$ , oraz stałe  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  i  $C_4$ :

$$(4.9) \quad r_1 \int_{x_1}^{x_2} p(x, y) dx = M_{s1}, \\ w_1''(x_1) = -\frac{R_A(a+x_1)}{E_1 J_1}, \\ w_1''(x_2) = -\frac{R_B(d+b-x_2)}{E_1 J_1}, \\ \varphi_1'(x_1) = -\frac{M_{s1}}{GJ_0}, \\ p(x_1, y) = 0, \quad \text{gdy } x_1 > 0, \\ p(x_2, y) = 0, \quad \text{gdy } x_2 < b.$$

Po analitycznym rozwikłaniu czterech pierwszych warunków ze względu na stałe  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  i  $C_4$  posłużono się dalej techniką numeryczną, opartą na metodzie kolejnych przybliżeń, wykorzystując w tym celu pozostałe dwa warunki.

Wyznaczając tym sposobem rozkład statycznych obciążeń międzyzębnych  $p(x, y)$  dla każdego punktu odcinka przyporu  $y$ , przy równoczesnym uwzględnianiu modyfikacji zarysu opisanej zadana funkcją  $F(y)$ , otrzymano na drodze numerycznej poszukiwaną funkcję  $\nabla(x, y)$  w formie dyskretnej, dla całego jej obszaru, tzn. dla  $0 \leq x \leq b$  i  $0 \leq y \leq e$  w postaci tablicy  $D(i, j)$ .

5. ANALIZA DYNAMICZNA MODELU. ROZKŁAD MIĘDZYŻĘBNYCH  
OBCIĄŻEŃ DYNAMICZNYCH

Dysponując dyskretnymi wartościami funkcji  $\nabla(x, y)$  w postaci tablicy  $D(i, j)$ , można napisać równania ruchu modelu przekładni zgodnie z rys. 3:

1) dla dwuparowego zazębenia

$$(5.1) \quad m\ddot{z} = P_0 - \frac{c(i)}{k} \sum_{j=1}^k (z - a_{i,j}) - \frac{k(i)}{k} \sum_{j=1}^k (\dot{z} - \dot{a}_{i,j}) - \\ - \frac{c(i+q)}{k} \sum_{j=1}^k (z - a_{i+q,j}) = \frac{k(i+q)}{k} \sum_{j=1}^k (\dot{z} - \dot{a}_{i+q,j});$$

2) dla jednoparowego zazębenia

$$(5.2) \quad m\ddot{z} = P_0 - \frac{c(i)}{k} \sum_{j=1}^k (z - a_{i,j}) - \frac{k(i)}{k} \sum_{j=1}^k (\dot{z} - \dot{a}_{i,j});$$

3) dla całkowitego rozwarcia międzyżębnego styku

$$(5.3) \quad m\ddot{z} = P_0,$$

gdzie  $e = n\Delta y$  oznacza odcinek przyporu,  $b = k\Delta x$  szerokość wieńca,  $t_z = q\Delta y$  podziałkę zasadniczą oraz  $a_{i,j}$  elementy tablicy  $D(i, j)$ .

Dla jednostajnego ruchu przekładni ( $V_0 = \text{const}$ ) można z równań (5.1), (5.2) i (5.3) wyeliminować czas, wprowadzając nową zmienną — zmienną wzdłuż odcinka przyporu  $y$ . Wówczas wszystkie trzy równania ruchu dają się sprowadzić do jednego równania nieliniowego w postaci

$$(5.4) \quad z'' + 2T\omega z' + \omega^2 z = A,$$

gdzie

$$(5.5) \quad z' = \frac{dz}{dy} = \frac{1}{V_0} \dot{z}, \\ z'' = \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{1}{V_0^2} \ddot{z},$$

$$y = V_0 t;$$

$$\omega^2 = \omega^2(z) = \frac{1}{mkV_0^2} (c_1 L_1 + c_2 L_2),$$

$$(5.6) \quad A = A(z) = \frac{P_0}{mV_0^2} + \frac{1}{mkV_0} (k_1 P_1 + k_2 P_2) + \frac{1}{mkV_0^2} (c_1 S_1 + c_2 S_2),$$

$$T = T(z) = \frac{1}{2\omega mkV_0} (k_1 L_1 + k_2 L_2),$$



przy czym  $L_1, L_2$  oznaczają liczby przedziałów  $\Delta x$  na długości międzyzębego kontaktu odpowiednio dla 1 i 2 pary współpracujących zębów

$$\left( L = \frac{x_2 - x_1}{\Delta x} \right),$$

$$(5.7) \quad S_1 = \sum_{j=1}^k a_{i,j}, \quad P_1 = \sum_{j=1}^k a'_{i,j},$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^k a_{i+a,j}, \quad P_2 = \sum_{j=1}^k a'_{i+a,j}.$$

Sumy (5.7) dotyczą tych wyrazów tablicy  $D(i, j)$ , dla których w modelu przekładni występuje międzyzębny kontakt, przy czym ze względu na jednostronne więzy kontakt ten istnieje, jeżeli

$$(5.8) \quad z - a_{i,j} \geq 0 \wedge c(z - a_{i,j}) + k(z' - a'_{i,j}) \geq 0;$$



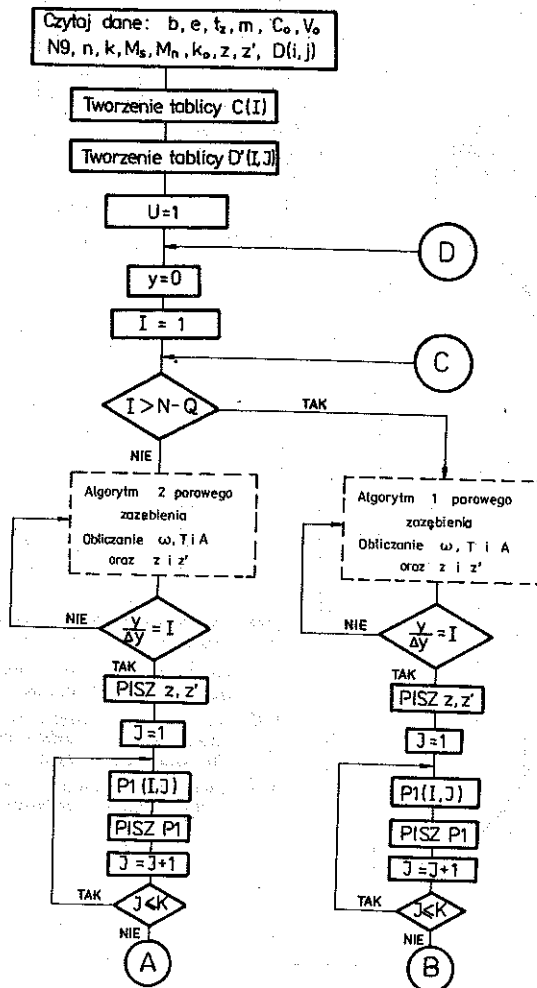
Rys. 5. Zamknięty cykl graniczny

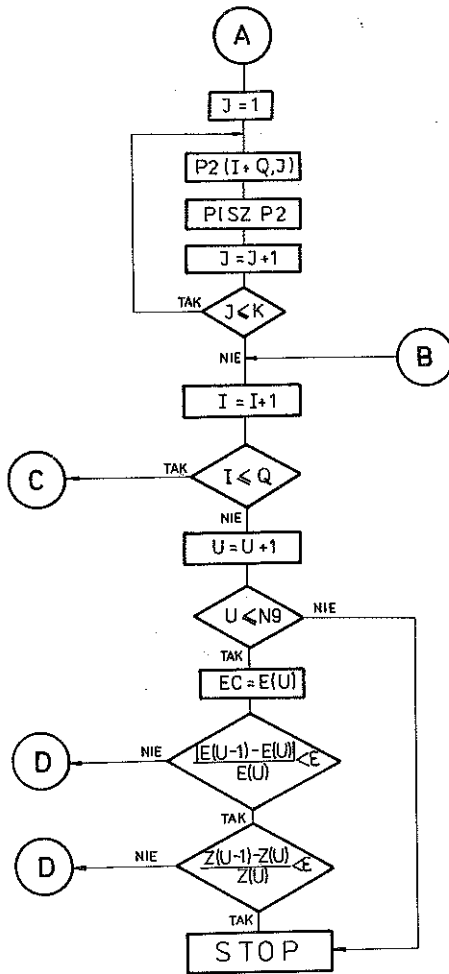
natomiast go brak, gdy

$$(5.9) \quad z - a_{i,j} < 0 \vee c(z - a_{i,j}) + k(z' - a'_{i,j}) < 0.$$

Równanie (5.4) scałkowano metodą, która została oparta na linearyzacji równań nieliniowych i stanowiła powiązanie metody analitycznej z numeryczną [5 i 7]. Idea tej metody polega na ustalaniu w przyjętym i odpowiednio (maszynowo) kontrolowanym kroku  $\Delta y$ , współczynników  $T$ ,  $\omega$  i  $A$  równania (5.4), których wartości oblicza się na podstawie rozwiązania z poprzedniego kroku lub na podstawie danych warunków początkowych — w chwili rozpoczynania ruchu.

Dla znanych wartości względnych przemieszczeń  $z$  i prędkości tych przemieszczeń  $z'$  jako funkcji zmiennej wzdłuż odcinka przyporu w przedziale  $0 \leq y \leq t_z$  można łatwo określić przestrzenne rozkłady dynamicznych lub



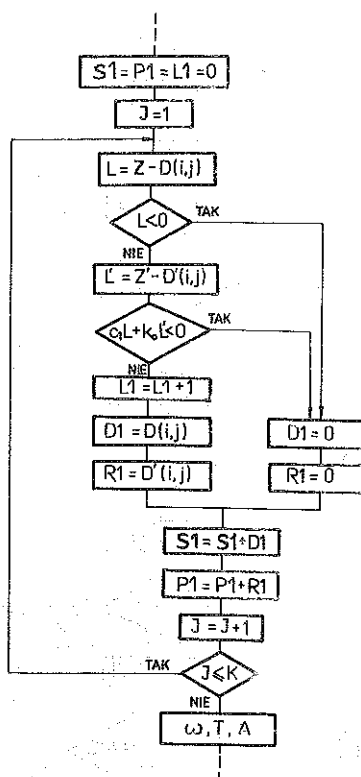


Rys. 6. Schemat blokowy programu „Dynamika przekładni”

statycznych (dla  $V_0 \approx 0$ ) obciążeń międzyzębnych w czasie pracy jednej dowolnej pary zębów:

$$(5.10) \quad p(i, j) = \begin{cases} \frac{c(i)}{k}(z - a_{i,j}) + \frac{k(i)}{k}(z' - a'_{i,j}) & \text{gdy } z - a_{i,j} \geq 0, \\ 0, & \text{gdy } z - a_{i,j} < 0 \vee p(i, j) < 0. \end{cases} \quad \wedge p(i, j) \geq 0;$$

Aby uzyskać rozwiązanie dla ustalonego ruchu przekładni, obliczenia należy powtarzać dla kolejnych par tak długo, dopóki nie wystąpi powtarzalność zamkniętych cykli granicznych na płaszczyźnie fazowej  $z, z'$  (rys. 5). Zamknięte cykle graniczne stanowią kryterium stabilizacji drgań w procesie numerycznej symulacji ruchu przekładni.



Rys. 7. Schemat algorytmu obliczania współczynników  $\omega$ ,  $T$  i  $A$  przy jednoparowym zazębieniu

Dla każdej kolejnej pary obliczenia przeprowadzane są identycznie z tym zastrzeżeniem, że warunkami początkowymi dla tej pary są warunki końcowe pary poprzedniej, a dla pary pierwszej — dowolnie dane warunki początkowe  $z$  i  $z'$ , które należy podać przy uruchomieniu programu. Na rysunkach 6 i 7 przedstawiono ogólny schemat blokowy tego programu. Jest on główną częścią składową zestawu czterech oddzielnych programów<sup>(1)</sup>, za pomocą których realizuje się kompletne obliczenia przekładni związane z wyznaczeniem międzyzębnych obciążeń dynamicznych.

Uruchamiając kolejno programy, które dotyczą następujących zagadnień: 1) sztywności i modyfikacji zarysu (program I), 2) modyfikacji linii zęba (program II), 3) funkcji deformacji  $V(x, y)$  (program III), 4) dynamiki przekładni (program IV) uzyskuje się wydruki szeregu parametrów przekładni oraz wydruki przestrzennych rozkładów międzyzębnych obciążeń dynamicz-

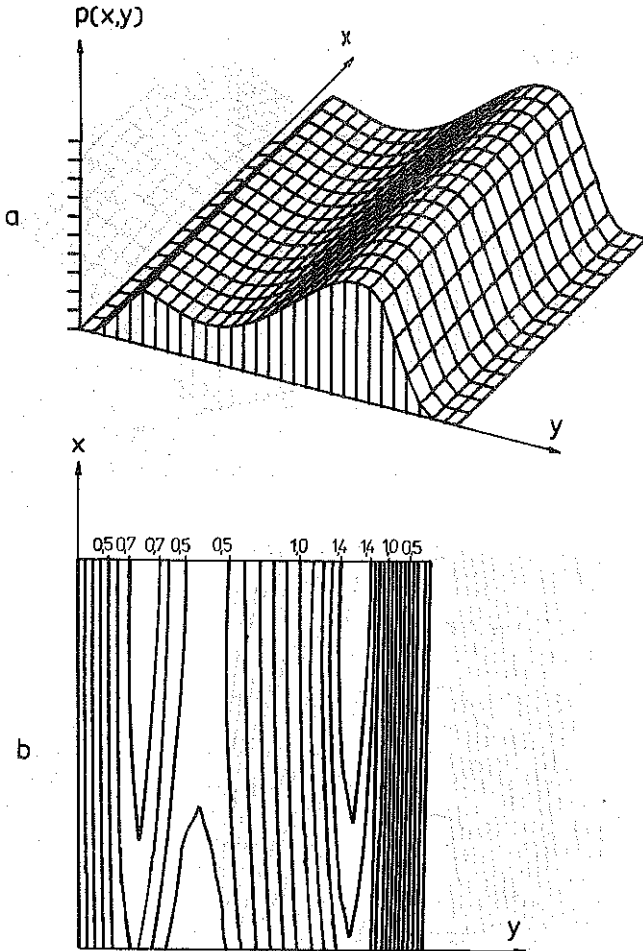
<sup>(1)</sup> Programy opracowane w języku BASIC znajdują się w Instytucie Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Krakowskiej. Obliczenia do załączonych wykresów wykonano na komputerze K-202 w Instytutowym Ośrodku Obliczeniowym ETO.

nych. Wydruki obciążeń dotyczą wielkości bezwymiarowych, gdyż są one odniesione do średnich statycznych obciążeń nominalnych.

Na rys. 8 przedstawiono rozkład obciążeń dynamicznych przekładni o zmodyfikowanym zarysie i linii zębów w obszarze nadkrytycznym, tzn. dla

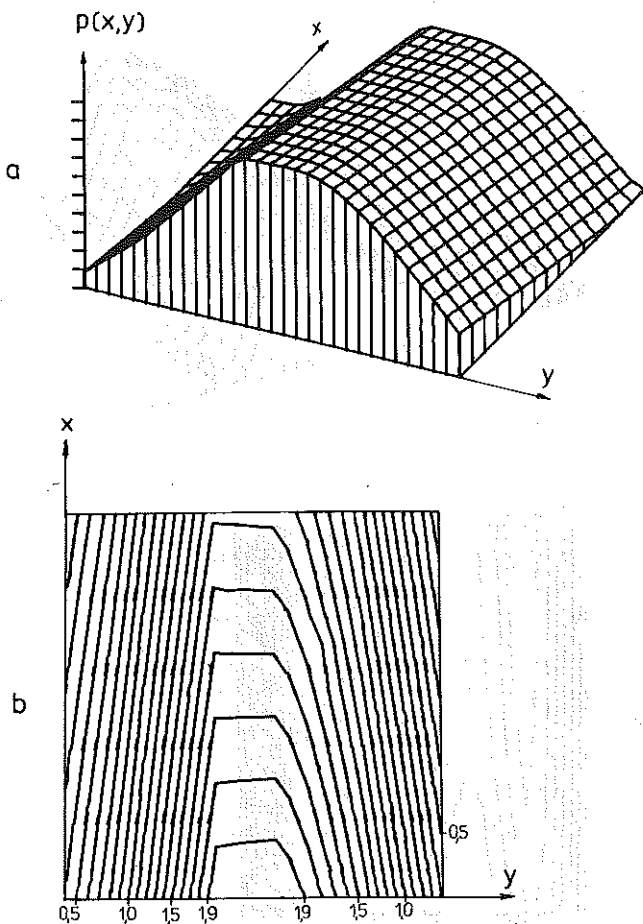
$v = (V_0/t_z) \sqrt{m/c_{sr}} = 0,25$  przy następujących danych:

- $z_1 = 18, z_2 = 63$  liczby zębów koła 1 i 2,
- $x_1 = x_2 = 0$  współczynniki korekcji,
- $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$  [N/m<sup>2</sup>],  
 $E_2 = 10^{11}$  [N/m<sup>2</sup>] moduły Young'e'a materiałów kół,
- $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$  liczby Poissona materiałów kół,
- $m_n = 5$  [mm] moduł nominalny,
- $\alpha_n = 20$  [°] nominalny kąt przyporu,



Rys. 8. Rozkład obciążeń dynamicznych: a) wykres, b) poziomicę

- $y = 1$  współczynnik wysokości zęba,  
 $\psi = 15$  współczynnik szerokości wieńca,  
 $M_{s1} = 400$  [Nm] obciążenie zewnętrzne,  
 $M_n = 400$  [Nm] obciążenie nominalne,  
 $n = 25$  liczba kroków na odcinku przyporu,  
 $k = 14$  liczba kroków na szerokości wieńca,  
 $a = 0,050$  [m]  
 $b = 0,075$  [m]  
 $d = 0,070$  [m]  
 $r_{1a} = 0,020$  [m]  
 $r_{1d} = 0,015$  [m]  
 $r_{2a} = 0,020$  [m]  
 $r_{2d} = 0,025$  [m]
- wymiary elementów przekładni wg rys. 1,



Rys. 9. Rozkład obciążeń statycznych: a) wykres, b) poziomicę

$\delta = 0$ [m]	błąd równoległości osi wałów,
$m = 20$ [kg]	zredukowana masa wałków i kół na wałek I,
$\xi = \frac{k_0}{\sqrt{2mc_{sr}}} = 0,05$	stały, bezwymiarowy współczynnik tłumienia, na powierzchni współpracujących zębów wg [3],
$v = 0,25$	bezwymiarowa prędkość obwodowa kół ( $V_0 = 30$ [m/s]).
$z = 0,0001$ [m]	warunki początkowe ruchu.
$z' = 0,001$ [1]	

Dla tej samej przekładni na rys. 9 przedstawiono wykres obciążeń statycznych przy przeciążeniu zewnętrznym  $M_{s1} = 1,5 M_n = 600$  [Nm].

## 6. UWAGI KOŃCOWE I WNIOSKI

Przestrzenne rozkłady obciążeń dynamicznych mogą być bardzo przydatne w inżynierskich obliczeniach przekładni na wytrzymałość postaciową, kontaktową i zatarcie. Teoretyczna analiza dynamiczna przekładni powinna być istotnym czynnikiem w procesie konstruowania i eksploatacji. Znalazienie korzystnego rozkładu obciążeń międzyzębnych poprzez odpowiedni dobór parametrów przekładni pozwala zwiększyć jej obciążalność i niezawodność. Przedstawione obliczenia numeryczne dają możliwość uwzględnienia równoczesnego wpływu szeregu czynników konstrukcyjnych, materiałowych, geometrycznych, a nawet zużycia zębów (jako szczególnego przypadku modyfikacji) na rozkład obciążeń dynamicznych w strefie współpracy.

Możliwość szybkiego przeprowadzania tych obliczeń pozwala na wprowadzanie określonych zmian parametrów przekładni na etapie jej projektowania i przeprowadzanie ponownych obliczeń sprawdzających. Podana metoda obliczeń stwarza ponadto korzystną możliwość szybkiej weryfikacji badań doświadczalnych.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Б. В. АБРАМОВ, *Колесания прямозубых колес*, Изд-во харьковского университета, 1968.
2. L. MÜLLER, *Nowy model dynamiczny przekładni walcowej*, *Przegąd Mech.*, **21**, 1974.
3. L. MÜLLER, *Przekładnie zębate*, WNT, Warszawa 1979.
4. J. RYŚ, *Szywność zębów prostych walcowych kół zębatych*, *Przegąd Mech.*, **10**, 1977.
5. J. RYŚ, *Theoretical investigation of the dynamic tooth-load distribution in cylindrical spur gears*, *Proc. Fourth National Congress on Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 2, Varna 1981.
6. J. RYŚ, S. STACHOŃ, *Numeryczne obliczanie sił statycznych i dynamicznych na powierzchni zębów walcowej przekładni zębatej*, *Rozpr. Inż.*, **28**, 2, 1980.
7. S. STACHOŃ, *Przestrzenny rozkład obciążeń statycznych i dynamicznych w walcowej przekładni zębatej z uwzględnieniem odkształceń elementów przekładni oraz modyfikacji zarysu i linii zęba*, Praca doktorska, Polit. Krak., 1981.

## РЕЗЮМЕ

## ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МЕЖЗУБНЫХ НАГРУЗОК В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАЧИ С ПРОСТЫМИ ЗУБЬЯМИ

Приведены метод и способ определения межзубных статических и динамических нагрузок как функций двух переменных, т.е. вдоль отрезка поддержки и ширины венца зубчатого колеса для цилиндрической зубчатой передачи с простыми зубьями. Дифференциальное уравнение, описывающее движение передачи, проинтегрировано методом линеаризации нелинейных уравнений, составляющим соединением аналитического метода с численным методом. В численных расчетах, имитирующих движение передачи, послужили соответственно модифицированной моделью Л. Мюллера. Она расширена на пространственную модель, а также введена в описание ее параметров, т. наз. функция деформации  $\nabla(x, y)$ . Представленный анализ учитывает одновременное влияние ряда конструктивных, материальных и геометрических факторов, совместно с модификацией профиля и линии зуба.

## SUMMARY

## SPATIAL DISTRIBUTION OF DYNAMIC LOADS IN SPUR GEARS

The paper gives a method of determination of static and dynamic load distribution in spur gears. The loads are determined as certain functions of coordinates measured along the tooth contact length and width. The nonlinear differential equations describing the motion of the gear have been integrated by means of a method which includes linearization of these equations and combines analytical and numerical solutions. In numerical calculations simulating the motion of the gear, an appropriately modified model of L. Müller has been used. This model has been generalized for three-dimensional, spatial motion and a certain function of deformation  $\nabla(x, y)$  has been introduced for the description of parameters of the model. The analysis presented in the paper takes into account the influence of several design factors, both material and geometrical, together with the profile and tooth line modification.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 stycznia 1986 r.