ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 35, 1, 129–148, 1987
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

DRGANIA BELKI NA INERCYJNYM PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM, OBCIĄŻONEJ SIŁĄ RUCHOMĄ(*)

PIOTR RUTA (WROCŁAW)

W pracy rozwiązano zagadnienie drgań belki nieskończenie długiej, spoczywającej na inercyjnym podłożu sprężystym, obciążonej poruszającą się ze stałą prędkością siłą skupioną. Problem ten rozwiązano metodą transformacji Fouriera. Przeprowadzono numeryczną analizę wykonując obliczenia dla różnych wartości parametrów. Zbadano również wpływ inercji podłoża na ekstremalne wartości otrzymanych rozwiązań.

1. WSTĘP

Zagadnienie drgań belki na podłożu sprężystym jest jednym z ważnych problemów mechaniki konstrukcji; belkę taką można bowiem traktować jako uproszczony model toru kolejowego obciążonego ruchomymi pojazdami.

Problemem tym zajmowało się wielu autorów. W pracach swych brali oni pod uwagę różne modele podłoża poczynając od najprostszego modelu Winklera do modelu klasycznej półprzestrzeni sprężystej włącznie.

I tak KEER [5], KENNY [6] i ROZENBAJGIER [10] rozważali zagadnienie belki spoczywającej na podłożu Winklera, obciążonej siłą skupioną [5 i 6] oraz rozłożonym odcinkowo stałym obciążeniem [10]. W pracy [5] został uwzględniony wpływ sił osiowych. Wybranym zagadnieniem drgań belki nieskończonej na podłożu Winklera poświęcona jest praca Świtki [15]. Praca ta o charakterze przeglądowym zawiera również pewne nowe rozwiązania, m.in. rozwiązanie zagadnienia drgań belki obciążonej ruchomą siłą harmonicznie zmienną. Belki półnieskończone i nieskończone rozpatrywał również ŚNIADY [13]. Z innych prac można wymienić pracę BANDYOPADHYNAY'A [1], w której rozwiązano to zagadnienie w wykorzystaniem różnych znanych modeli reologicznych. W modelach tych nie uwzględniono jednak wzajemnego oddziaływania między cząsteczkami podłoża, można zatem je traktować jako rozszerzenie modelu Winklera.

(*) Praca wykonana w ramach Problemu Węzłowego 05.12/14.3.

Wspólną cechą wymienionych prac było pomijanie inercji podłoża.

Model typu półprzestrzeni sprężystej zastosowali LABRA [7] i FILIPPOW [2]. Autorzy tych prac założyli równomierny rozkład funkcji odporu podłoża w kierunku poprzecznym do toru. W wymienionych pracach rozważano belkę obciążoną siłą skupioną. Bardziej złożony typ obciążenia w postaci dwumasowych oscylatorów obciążonych siłą harmonicznie zmienną uwzględnili TIERIENTIEW i FILIPPOW [16]. Zastosowanie modelu w postaci klasycznej półprzestrzeni sprężystej prowadziło w cytowanych pracach do rozwiązań w postaci podwójnych całek Fouriera. Otrzymanie wyników liczbowych było możliwe tylko przy zastosowaniu całkowania numerycznego, co w przypadku całek podwójnych nastręcza znaczne trudności.

W niniejszej pracy jako model podłoża wykorzystano uproszczony model inercyjnego podłoża sprężystego przedstawiony w pracy autora [11] oraz w pracy [12]. Przedstawiony w [11] model jest uogólnieniem koncepcji modelu podłoża zaproponowanego przez ŚWITKĘ [14] (znanego pod nazwą aproksymowanej półprzestrzeni sprężystej) oraz MURAWSKIEGO [9]. Równania opisujące model uproszczony w [11] wyprowadzono z równań przemieszczeniowych klasycznej elastokinetyki, pomijając w nich sprzężenia. Jedno z uzyskanych tam równań jest identyczne z równaniami uzyskanymi inną drogą w [14 i 9].

W pracy [14] dokonano weryfikacji modelu przez porównanie go z klasyczną półprzestrzenią sprężystą. Podobne porównania dla modelu uproszczonego wykonano w [11 i 12].

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozważać będziemy zagadnienie drgań belki nieskończenie długiej spoczywającej na inercyjnym podłożu sprężystym, obciążonej przesuwającą się ze stałą prędkością siłą skupioną $F = P\delta(x_1 - vt)\,\delta(x_2)$ (rys. 1).

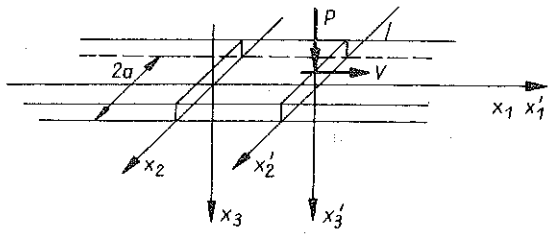
Wykorzystamy następujące znane równanie belki:

$$EJ\frac{\partial^4 W}{\partial x_1^4} + \varrho_b \frac{d^2 W}{dt^2} + \eta \frac{dW}{dt} = q(x_1, t). \tag{2.1}$$

Podłoże w przypadku występowania tylko obciążenia pionowego opisane jest równaniami

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\right) + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - \varrho \frac{d^2 u_3}{dt^2} = 0,$$

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, 0) = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -R, \tag{2.2}$$

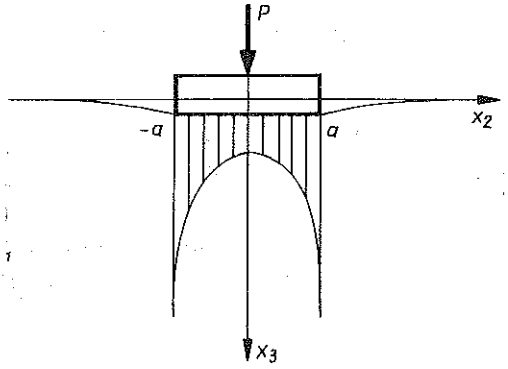


Rys. 1

gdzie $(2.2)_2$ jest naprężeniowym warunkiem brzegowym.

W celu uproszczenia rozważań przyjmiemy, że funkcja odporu podłoża ma postać (rys. 2)

$$R(x_1, x_2, t) = \begin{cases} Pr(x_1, t)(a^2 - x_2^2)^{-\frac{1}{2}} & \text{dla} \quad |x_2| \leqslant a, \\ 0 & \text{dla} \quad |x_2| > a, \end{cases} \tag{2.3}$$



Rys. 2

(czynnik opisujący rozkład funkcji (2.3) w kierunku osi x_2 jest taki, jak funkcja odporu podłoża w płaskim statycznym zagadnieniu kontaktowym).

Osłabimy również warunek ciągłego kontaktu belki z podłożem, żądając zgodności przemieszczeń tylko wzdłuż osi x_1. Rozważania ograniczymy do przypadku zagadnienia stacjonarnego.

Przyjęte założenia upraszczające są podobne do założeń występujących w pracy FILIPPOWA [2]. Różnica polega na przyjęciu w [2] równomiernego rozkładu funkcji odporu podłoża w kierunku poprzecznym do belki. Założenie w niniejszej pracy dotyczące postaci funkcji odporu podłoża zostało zaczerpnięte z pracy GALINA [3] i dotyczyło w [3] zadania statycznego. Na możliwość zastosowania funkcji odporu podłoża z zadania statycznego w zagadnieniu dynamicznym wskazał ŚWITKA [14].

3. Rozwiązanie

Wykorzystując przedstawione założenia otrzymamy równania

$$\text{(3.1)}\qquad \mathrm{EJ}\frac{\partial^4 W}{\partial x_1^4}+\varrho_b\frac{d^2 W}{dt^2}+\eta\frac{dW}{dt}=$$

$$=\int_{-a}^{a}\left(P\delta(x_1-vt)\,\delta(x_2)-Pr(x_1,t)\,(a^2-x_2^2)^{-\frac{1}{2}}\right)dx_2=$$

$$=P\left[\delta(x_1-vt)-\pi r(x_1,t)\right],$$

$$\text{(3.2)}\qquad \mu\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\right)+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}-\varrho\frac{d^2 u_3}{dt^2}=0,$$

$$\sigma_{33}(x_1,x_2,0)=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=-Pr(x_1,t)\,(a^2-x_2^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Wprowadzimy nowy układ współrzędnych związany z poruszającym się obciążeniem (rys. 1):

$$\text{(3.3)}\qquad x_1'=\frac{x_1-vt}{a},\qquad x_2'=\frac{x_2}{a},\qquad x_3'=\frac{x_3}{a}.$$

Po wykorzystaniu przyjętych założeń i ograniczeniu się do rozwiązania stacjonarnego stwierdzimy, że równania (3.1) i (3.2) przyjmą odpowiednio postać

$$\text{(3.4)}\qquad \frac{\partial^4 W}{\partial x_1'^2}+b^2\frac{\partial^2 W}{\partial x_1'^2}+l^2\frac{\partial W}{\partial x_1'}=\frac{Pa^3}{\mathrm{EJ}}-\pi\frac{Pa^3}{\mathrm{EJ}}r'(x_1'),$$

$$\text{(3.5)}\qquad (c_2^2-v^2)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1'^2}+c_2^2\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2'^2}+c_1^2\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3'^2}=0,$$

$$\sigma_{33}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_3}{\partial x_3'}=-\frac{Pr'(x_1')}{a\,(1-x_2'^2)^{\frac{1}{2}}},$$

gdzie

$$b^2=\varrho_b v^2 a^2/\mathrm{EJ},\qquad l^2=\eta v a^3/\mathrm{EJ},\qquad r'(x_1')=ar(x_1,t),$$
$$c_1^2=(\lambda+2\mu)/\varrho,\qquad c_2^2=\mu/\varrho.$$

W dalszej części dla uproszczenia zapisu pomijać będziemy znak prim. Ze względu na zastosowaną metodę transformacji Fouriera przydatne będą następujące wzory całkowe ([4], wzory 7.355 i 6.552):

$$\int_{-a}^{a} \frac{T_{2n}\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{a^2-x^2}} e^{ix\alpha}\, dx = (-1)^n J_{2n}(a|\alpha|), \tag{3.6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_\nu(b|x|)}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx = 2I_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}ab\right) K_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}ab\right), \tag{3.7}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{J_\nu(b|x|)}{\sqrt{x^2-a^2}}\, dx = \begin{cases} -\frac{1}{2} i\pi J_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}ab\right) H^{(2)}_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}ab\right), \\ \text{lub} \\ \frac{1}{2} i\pi J_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}ab\right) H^{(1)}_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}ab\right), \end{cases} \tag{3.8}$$

gdzie wprowadziliśmy następujące oznaczenia: $T_n(x)$ oznacza wielomiany Czebyszewa I rodzaju, $J_\nu(x)$ funkcję Bessela ν-tego rzędu, $I_\nu(x)$ zmodyfikowaną funkcję Bessela pierwszego rodzaju ν-tego rzędu, $K_\nu(x)$ zmodyfikowaną funkcję Bessela drugiego rodzaju ν-tego rzędu oraz $H^{(i)}_\nu(x)$ funkcję Hankela i-tego rodzaju ($i = 1, 2$). Całka występująca we wzorze (3.8) jest wieloznaczna. Istnienie dwóch niezależnych rozwiązań jest spowodowane niejednoznacznością funkcji podcałkowej.

Rozwiązanie zagadnienia rozpoczniemy od równania ruchu belki (3.4). W tym celu wykonajmy na nim jednowymiarową transformację Fouriera zdefiniowaną wzorem

$$\bar{u}(\alpha_1) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1)\, e^{i\alpha_1 x_1}\, dx_1, \tag{3.9}$$

co prowadzi do wyniku

$$\bar{W}(\alpha_1) = \frac{Pa^3}{EJ} \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} - \pi\bar{r}(\alpha_1)}{(\alpha_1^4 - b^2\alpha_1^2 + il^2\alpha_1)}. \tag{3.10}$$

Chcąc rozwiązać równanie (3.5) wykonamy na nim podwójną transformację Fouriera określoną wzorem

$$\tilde{u}(\alpha_1, \alpha_2) = (2\pi)^{-1} \iint_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2)\, e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}\, dx_1\, dx_2. \tag{3.11}$$

Po wykonaniu odpowiednich przekształceń dostaniemy następujące równanie różniczkowe:

$$c_1^2 \frac{d^2\tilde{u}_3}{dx_3^2} = [(c_2^2 - v^2)\alpha_1^2 + c_2^2\alpha_2^2]\,\tilde{u}_3, \tag{3.12}$$

którego rozwiązania poszukiwać będziemy w postaci

$$\tilde{u}_3(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = A(\alpha_1, \alpha_2)\, e^{mx_3}. \tag{3.13}$$

Po podstawieniu (3.13) do równania (3.12) i wykorzystaniu warunku wypromieniowania $u_3 \to 0$ dla $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \to \infty$ otrzymamy

$$m = -\left(\frac{c_2^2-v^2}{c_1^2}\alpha_1^2+\frac{c_2^2}{c_1^2}\alpha_2^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.14}$$

Stąd po wykorzystaniu warunku brzegowego $(3.5)_2$, wzoru całkowego (3.6) oraz po wykonaniu przekształceń dostaniemy wzór

$$\tilde{u}_3(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \frac{P}{\varrho a c_1 c_2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{J_0(|\alpha_2|)\,\bar{r}(\alpha_1)}{(c^2\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{c_2}{c_1}(c^2\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{\frac{1}{2}}|x_3|\right)\right], \tag{3.15}$$

gdzie $c^2 = 1-v^2/c_2^2$. Dla $x_3 = 0$ mamy

$$u_2(x_1, x_2, 0) = \frac{P}{2\pi\varrho a c_1 c_2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \frac{J_0(|\alpha_2|)\,\bar{r}(\alpha_1)}{(c^2\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp\left[-i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\right] d\alpha_1\, d\alpha_2. \tag{3.16}$$

Wykorzystamy teraz warunek kontaktu belki z podłożem $u_3(x_1, 0, 0) = W(x_1)$ równoważny warunkowi

$$\bar{u}_3(\alpha_1, x_2, x_3)|_{\substack{x_2=0\\x_3=0}} = \bar{W}(\alpha_1).$$

Rozważania ograniczymy na razie do przypadku $v < c_2$; przypadek $v > c_2$ rozważymy później. Korzystając ze wzorów (3.10) i (3.16) warunek ten możemy napisać w postaci

$$\frac{P}{2\varrho a c_1 c_2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(|\alpha_2|)\,\bar{r}(\alpha_1)}{(c^2\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{\frac{1}{2}}}\, d\alpha_2 = \frac{\mathrm{Pa}^3}{\mathrm{EJ}} \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}-\pi\bar{r}(\alpha_1)}{(\alpha_1^4-b^2\alpha_1^2+il^2\alpha_1)}. \tag{3.17}$$

Całkę występującą po lewej stronie równania (3.17) możemy przedstawić w postaci zamkniętej, korzystając ze wzoru całkowego (3.7). Otrzymamy wtedy wzór

$$\frac{P}{\varrho a c_1 c_2} I_0\left(\frac{1}{2}c|\alpha_1|\right) K_0\left(\frac{1}{2}c|\alpha_1|\right)\bar{r}(\alpha_1) = \frac{\mathrm{Pa}^3}{\mathrm{EJ}} \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}-\pi\bar{r}(\alpha_1)}{(\alpha_1^4-b^2\alpha_1^2+il^2\alpha_1)}, \tag{3.18}$$

pozwalający na obliczenie funkcji

$$(3.19)\quad \bar{r}(\alpha_1) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{EJ}{a^4 \varrho c_1 c_2} I_0\left(\frac{1}{2} c|\alpha_1|\right) K_0\left(\frac{1}{2} c|\alpha_1|\right)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot(\alpha_1^4 - b^2\alpha_1^2 + il^2\alpha_1) + \pi\right]^{-1}.$$

Po podstawieniu tego wyniku do wzoru określającego funkcję przemieszczeń u_3 (wzór (3.16)), powtórnym wykorzystaniu wzoru całkowego (3.7) oraz po dokonaniu zamiany zmiennych, otrzymamy ostatecznie

$$(3.20)\quad u_3(x_1, 0, 0) = \frac{Pa^3 c^3}{8\pi EJ} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{I_0(s) K_0(s) e^{-i\frac{2}{c}sx_1} ds}{I_0(s) K_0(s)(s^4 - p^2 s^2 + ir^2 s) + h^2},$$

gdzie

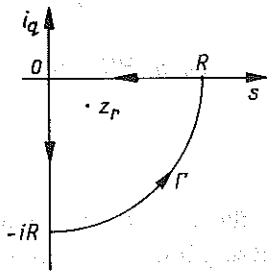
$$p^2 = \varrho_b v^2 a^2 c^2/4EJ, \quad r^2 = \eta v a^3 c^3/8EJ,$$
$$h^2 = \pi a^4 c^4 \varrho c_1 c_2/16EJ.$$

Wynik ten możemy traktować jako końcowe rozwiązanie. Ze względu jednak na konieczność numerycznego obliczania całki (wzór (3.20)) poddamy go dalszym przekształceniom powodującym przyspieszenie zbieżności do zera funkcji podcałkowej. Wykorzystamy przy tym znane twierdzenia dotyczące obliczania całek krzywoliniowych na płaszczyźnie zespolonej.

W tym celu wprowadzimy zmienną zespoloną $z = s + iq$ oraz rozważymy dwa kontury całkowania, których wybór jest uzależniony od wartości funkcji sign (x_1). Rozbicie na dwa przypadki jest konieczne ze względu na wymóg spełniania przez funkcje podcałkowe lematu Jordana, zapewniającego zbieżność obliczanych całek.

PRZYPADEK 1. $x_1 > 0$

Dla $x_1 > 0$ kontur całkowania jest zawarty w dolnej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej $\operatorname{im} z \leqslant 0$ i ma postać jak na rys. 3. Korzystając z twierdzenia o residuach (por. [8], str. 134) oraz z faktu, że całka na



Rys. 3

ćwierćokręgu Γ przyjmuje dla dostatecznie dużych R wartość dowolnie małą

$$\left|\int_{\Gamma} F(z)\,dz\right| \leqslant \int_{\Gamma} |F(z)|\,dz \leqslant \frac{S}{R^4}\,\frac{\pi R}{2} = \frac{S\pi}{2}\,\frac{1}{R^3}, \qquad S = \text{const},$$

po przejściu do granicy $R \to \infty$ otrzymamy

$$(3.2.1)\quad u_3(x_1, 0, 0) = \frac{\mathrm{Pa}^3 c^3}{8\pi\,\mathrm{EJ}}\,\mathrm{Re}\left[-2\pi i \sum_{z_r} \operatorname{res} F(z) - \right.$$

$$\left. - i \int_0^{\infty} \frac{J_0(q)\,H_0^{(1)}(q)\,e^{-\frac{2}{c}qx_1}}{J_0(q)\,H_0^{(1)}(q)\,(q^4 + p^2 q^2 + r^2 q) - i\,\frac{2}{\pi}\,h^2}\,dq\right],$$

gdzie $z_r \in \{z: \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z < 0\}$ i są biegunami funkcji podcałkowej $F(z)$ ze wzoru (3.20); w tym przypadku są to pierwiastki równania

$$(3.22)\qquad M(z) = I_0(z)\,K_0(z)\,(z^4 - p^2 z^2 + ir^2 z) + h^2 = 0,$$

Można wykazać, opierając się na znanych twierdzeniach dotyczących liczby miejsc zerowych funkcji analitycznych (por. [8], str. 137–140), że dla parametrów mających praktyczne zastosowanie liczba pierwiastków równania (3.22) leżących w obszarze $A = \{z: \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z < 0\}$ jest ograniczona i wynosi jeden. Dowód polega na wykazaniu, że kontur otrzymany w wyniku przekształcenia konturu z rys. 3 za pomocą odwzorowania $M(z)$ (przekształcenie $M(z)$ jest opisane lewą stroną wzoru (3.22)) przy $R \to \infty$ obiega punkt zerowy tylko jeden raz.

Po obliczeniu residuum funkcji podcałkowej w punkcie osobliwym z_r otrzymamy końcowy wynik

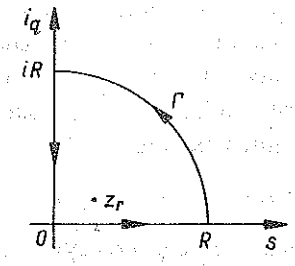
$$(3.23)\quad u_3(x_1, 0, 0) =$$

$$= \frac{\mathrm{Pa}^3 c^3}{8\pi\,\mathrm{EJ}}\,\mathrm{Re}\left[-2\pi i\,\frac{I_0(z)\,K_0(z)}{[I_0(z)\,K_0(z)\,(z^4 - p^2 z^2 + ir^2 z)]'}\Bigg|_{z=z_r} e^{-i\frac{2}{c}z_r x_1} - \right.$$

$$\left. - i \int_0^{\infty} \frac{J_0(q)\,H_0^{(1)}(q)\,e^{-\frac{2}{c}qx_1}}{J_0(q)\,H_0^{(1)}(q)\,(q^4 + p^2 q^2 + r^2 q) - i\,\frac{2}{\pi}\,h^2}\,dq\right].$$

PRZYPADEK 2. $x_1 < 0$

Analogicznie postępujemy dla $x_1 < 0$ z tą różnicą, że kontur całkowania jest zawarty w górnej półpłaszczyźnie $\operatorname{im} z \geqslant 0$ i ma postać przedstawioną na rys. 4. Po wykonaniu odpowiednich przekształceń i obliczeniu wartości



Rys. 4

residuum funkcji podcałkowej w biegunie z_r (tak jak poprzednio liczba punktów osobliwych wynosi jeden) otrzymamy końcowy wynik

$$(3.24)\quad u_3(x_1, 0, 0) = \frac{\mathrm{Pa}^3 c^3}{8\pi \mathrm{EJ}} \mathrm{Re}\left[2\pi i \frac{I_0(z) K_0(z)}{[I_0(z) K_0(z)(z^4 - p^2 z^2 + ir^2 z)]'}\bigg|_{z=z_r} e^{-i\frac{2}{c} z_r x_1} + \right.$$

$$\left. + i \int_0^{\infty} \frac{J_0(q) H_0^{(2)}(q) e^{\frac{2}{c} q x_1}}{J_0(q) H_0^{(2)}(q)(q^4 + p^2 q^2 - r^2 q) + i \frac{2}{\pi} h^2} dq \right].$$

Postać ta jest wygodna do obliczeń numerycznych ze względu na szybki eksponencjalny zanik funkcji podcałkowych występujących we wzorach (3.23) i (3.24). Pozwala to na dostatecznie dokładne obliczenie występujących tam całek w niedużych przedziałach całkowania.

Rozważmy teraz przypadek gdy prędkość poruszania się siły jest większa od prędkości krytycznej. Przypadek ten rozwiązuje się analogicznie do przypadku $v < c_2$ — do wzoru (3.17) włącznie. Jedyną różnicą jest to, że w miejscu stałej c^2 jest teraz stała $-d^2$, gdzie $d^2 = v^2/c_2^2 - 1$. Rozwiązanie rozpoczniemy od odpowiednika wzoru (3.17):

$$(3.25)\quad \frac{P}{2\varrho a c_1 c_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(|\alpha_2|)\, \bar{r}(\alpha_1)}{(\alpha_2^2 - d^2 \alpha_1^2)^{\frac{1}{2}}} d\alpha_2 = \frac{\mathrm{Pa}^3}{\mathrm{EJ}} \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} - \pi \bar{r}(\alpha^1)}{(\alpha_1^4 - b^2 \alpha_1^2 + il^2 \alpha_1)}.$$

Ze wzoru tego możemy obliczyć transformatę funkcji reakcji podłoża $\bar{r}(\alpha_1)$. Po prostych przekształceniach otrzymamy

$$(3.26)\quad \bar{r}(\alpha_1) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{P}{2\varrho a^4 c_1 c_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(|\alpha_2|)}{(\alpha_2^2 - d^2 \alpha_1^2)^{\frac{1}{2}}} d\alpha_2 \right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (\alpha_1^4 - b^2 \alpha_1^2 + il^2 \alpha_1) + \pi \right]^{-1}.$$

Całkę występującą w tym wzorze możemy przedstawić w postaci zamkniętej (por. wzór (3.8)) z tym, że całka ta jest wieloznaczna. W celu wybrania odpowiedniej gałęzi skorzystamy z fizycznej interpretacji funkcji $r(x_1)$. Funkcja ta jako reakcja podłoża jest funkcją rzeczywistą. W związku z tym jej transformata Fouriera musi mieć postać

$$\bar{r}(\alpha_1) = \bar{r}_p(\alpha_1) + i\bar{r}_n(\alpha_1), \tag{3.27}$$

gdzie $\bar{r}_p(\alpha_1)$ oznacza parzystą funkcję rzeczywistą oraz $\bar{r}_n(\alpha_1)$ nieparzystą funkcję rzeczywistą. Aby warunek ten był spełniony, funkcja występująca we wzorze (3.26) określona całką

$$C(\alpha_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(|\alpha_2|)}{(\alpha_2^2 - d^2\alpha_1^2)^{\frac{1}{2}}}\, d\alpha_2, \tag{3.28}$$

musi mieć tę samą postać co funkcja $\bar{r}(\alpha_1)$, tzn.

$$C(\alpha_1) = C_p(\alpha_1) + iC_n(\alpha_1). \tag{3.29}$$

Biorąc pod uwagę wzory (3.8) i (3.29) widzimy, że całka (3.28) musi przyjąć jedną z dwóch postaci:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(|\alpha_2|)\, d\alpha_2}{(\alpha_2^2 - d^2\alpha_1^2)^{\frac{1}{2}}} = \begin{cases} -\pi i J_0\left(\frac{1}{2} d\,|\alpha_1|\right) H_0^{(2)}\left(\frac{1}{2} d\,|\alpha_1|\right) & \text{dla} \quad \alpha_1 < 0, \\ \pi i J_0\left(\frac{1}{2} d\,|\alpha_1|\right) H_0^{(1)}\left(\frac{1}{2} d\,|\alpha_1|\right) & \text{dla} \quad \alpha_1 > 0, \end{cases} \tag{3.30}$$

lub

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(|\alpha_2|)\, d\alpha_2}{(\alpha_2^2 - d^2\alpha_1^2)^{\frac{1}{2}}} = \begin{cases} \pi i J_0\left(\frac{1}{2} d\,|\alpha_1|\right) H_0^{(1)}\left(\frac{1}{2} d\,|\alpha_1|\right) & \text{dla} \quad \alpha_1 < 0, \\ -\pi i J_0\left(\frac{1}{2} d\,|\alpha_1|\right) H_0^{(2)}\left(\frac{1}{2} d\,|\alpha_1|\right) & \text{dla} \quad \alpha_1 > 0. \end{cases} \tag{3.31}$$

Na podstawie wzoru (3.26) otrzymamy dwie sprzężone transformaty funkcji odporu podłoża

$$\bar{r}_1(\alpha_1) = \begin{cases} -(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[\dfrac{i\pi EJ}{2\varrho a^4 c_1 c_2} J_0\left(\frac{1}{2} d\,|\alpha_1|\right) H_0^{(2)}\left(\frac{1}{2} d\,|\alpha_1|\right) \cdot \right. \\ \qquad \left. \cdot (\alpha_1^4 - b^2\alpha_1^2 + il^2\alpha_1) + \pi \right]^{-1} \quad \text{dla} \quad \alpha_1 < 0, \\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[\dfrac{i\pi EJ}{2\varrho a^4 c_1 c_2} J_0\left(\frac{1}{2} d\,|\alpha_1|\right) H_0^{(1)}\left(\frac{1}{2} d\,|\alpha_1|\right) \cdot \right. \\ \qquad \left. \cdot (\alpha_1^4 - b^2\alpha_1^2 + il^2\alpha_1) + \pi \right]^{-1} \quad \text{dla} \quad \alpha_1 > 0, \end{cases} \tag{3.32}$$

oraz

$$(3.33)_1 \quad \bar{r}_2(\alpha_1) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{i\pi EJ}{2\varrho a^4 c_1 c_2} J_0\left(\frac{1}{2} d|\alpha_1|\right) H_0^{(1)}\left(\frac{1}{2} d|\alpha_1|\right) \cdot (\alpha_1^4 - b^2\alpha_1^2 + il^2\alpha_1) + \pi \right]^{-1} \quad \text{dla} \quad \alpha_1 < 0,$$

$$(3.33)_2 \quad \bar{r}_2(\alpha_1) = -(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{i\pi EJ}{2\varrho a^4 c_1 c_2} J_0\left(\frac{1}{2} d|\alpha_1|\right) H_0^{(2)}\left(\frac{1}{2} d|\alpha_1|\right) \cdot (\alpha_1^4 - b^2\alpha_1^2 + il^2\alpha_1) + \pi \right]^{-1} \quad \text{dla} \quad \alpha_1 > 0.$$

Po podstawieniu tych wyników do wzoru określającego funkcję przemieszczeń u_3, powtórnym wykorzystaniu wzorów (3.30), (3.31) i po dokonaniu zamiany zmiennych otrzymamy poszukiwane rozwiązania, odpowiadające obliczonym transformatom funkcji odporu podłoża:

$$(3.34) \quad u_3^1(x_1, 0, 0) = \frac{Pa^3 d^3}{8\pi EJ} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{J_0(s) H_0^{(1)}(s) e^{-i\frac{2}{d}sx_1}}{J_0(s) H_0^{(1)}(s)(s^4 - p^2 s^2 + ir^2 s) - f^2} ds,$$

$$(3.35) \quad u_3^2(x_1, 0, 0) = \frac{Pa^3 d^3}{8\pi EJ} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{J_0(s) H_0^{(2)}(s) e^{-i\frac{2}{d}sx_1}}{J_0(s) H_0^{(2)}(s)(s^4 - p^2 s^2 + ir^2 s) + f^2} ds,$$

gdzie

$$p^2 = \varrho_b v^2 a^2 d^2/4\,EJ, \qquad r^2 = \eta v a^3 d^3/8\,EJ,$$
$$f^2 = 2ia^4 d^4 \varrho c_1 c_2/16\,EJ.$$

Należy podkreślić, że tylko jedno z rozwiązań ma sens fizyczny.

Przed dokonaniem wyboru pokażemy związek łączący otrzymane rozwiązania. Oznaczmy

$$(3.36) \quad \bar{v}_{1,2}(\alpha_1) = \operatorname{Re}\left[\frac{Pa^3 d^3}{8\pi EJ} \frac{J_0(s) H_0^{(1),(2)}(s)}{J_0(s) H_0^{(1),(2)}(s)(s^4 - p^2 s^2 + ir^2 s) \mp f^2} \right],$$

$$(3.37) \quad \bar{w}_{1,2}(\alpha_1) = \operatorname{Im}\left[\frac{Pa^3 d^3}{8\pi EJ} \frac{J_0(s) H_0^{(1),(2)}(s)}{J_0(s) H_0^{(1),(2)}(s)(s^4 - p^2 s^2 + ir^2 s) \mp f^2} \right].$$

Okazuje się, że funkcje występujące we wzorach (3.36) i (3.37) różnią się tylko znakiem części urojonej. Mamy zatem

$$(3.38) \quad \bar{v}_1(\alpha_1) = \bar{v}_2(\alpha_1), \qquad \bar{w}_1(\alpha_1) = -\bar{w}_2(\alpha_1).$$

Wykorzystując wprowadzone oznaczenia oraz związki (3.38), wzory (3.34) oraz (3.35) przedstawimy w następującej postaci:

$$(3.39)\quad u_3^1(x_1,0,0) = \operatorname{Re}\int_0^\infty [\bar{v}_1(\alpha_1)+i\bar{w}_1(\alpha_1)]\, e^{-i\alpha x_1}\, d\alpha_1 = v_1(x_1)+w_1(x_1),$$

$$u_3^2(x_1,0,0) = \operatorname{Re}\int_0^\infty [\bar{v}_1(\alpha_1)-i\bar{w}_1(\alpha_1)]\, e^{-i\alpha_1 x_1}\, d\alpha_1 = v_1(x_1)-w_1(x_1),$$

gdzie $v_1(x_1)$ oznacza część parzystą funkcji $u_3^1(x_1,0,0)$ oraz $w_1(x_1)$ część nieparzystą funkcji $u_3^1(x_1,0,0)$.

Ze wzoru (3.39) wynika, że funkcje u_3^1, u_3^2 spełniają związek

$$(3.40)\qquad u_3^1(x_1,0,0) = u_3^2(-x_1,0,0) \quad \text{dla} \quad x_1 \in R.$$

Opierając się na wynikach uzyskanych w pracach [1, 6 i 10] wybieramy to rozwiązanie, w którym maksymalne wartości występują za poruszającą się siłą. Ze względu na złożoną postać rozwiązań wyboru możemy dokonać po wykonaniu obliczeń numerycznych. Mając obliczone funkcje $v_1(x_1)$, $w_1(x_1)$ łatwo znajdziemy poszukiwane rozwiązanie.

W dalszej części dla ustalenia uwagi założymy, że rozwiązaniem mającym sens fizyczny jest rozwiązanie opisane wzorem (3.34). Podobnie jak w przypadku prędkości podkrytycznej wynik ten poddamy dalszym przekształceniom. Ograniczymy jednak je do przypadku, gdy $x_1 < 0$ (przy wyborze rozwiązania opisanego wzorem (3.35) byłby to przypadek $x_1 > 0$). Ograniczenie to jest spowodowane trudnościami związanymi z określeniem liczby biegunów funkcji podcałkowej, zawartych w obszarze ograniczonym przez kontur całkowania przedstawiony na rys. 3, a odpowiadającej przypadkowi $x_1 > 0$.

Tak jak w przypadku prędkości podkrytycznej, dla $x_1 < 0$ kontur całkowania ma postać przedstawioną na rys. 4. Wykorzystując twierdzenie o residuach, po wykonaniu przekształceń i obliczeniu wartości residuum w jednym biegunie z_r (istnienie tylko jednego bieguna wykazano korzystając z tych samych twierdzeń, jakie stosowano w przypadku gdy $v < c_2$) otrzymamy końcowy wynik dla $x_1 < 0$:

$$(3.41)\quad u_3(x_1,0,0) =$$

$$= \frac{Pa^3 d^3}{8\pi EJ} \operatorname{Re}\left[2\pi i \frac{J_0(z)\, H_0^{(1)}(z)}{[J_0(z)\, H_0^{(1)}(z)\,(z^4 - p^2 z^2 + ir^2 z)]'}\bigg|_{z=z_r} e^{-i\frac{2}{d}z_r x_1} + \right.$$

$$\left. + i\int_0^\infty \frac{I_0(q)\, K_0(q)\, e^{\frac{2}{d}qx_1}}{I_0(q)\, K_0(q)\,(q^4 + p^2 q^2 - r^2 q) - i\frac{\pi}{2} f^2}\, dq \right] =$$

$$= \frac{\mathrm{Pa}^3 d^3}{8\pi\,\mathrm{EJ}} \operatorname{Re}\left[2\pi i \frac{J_0(z)\, H_0^{(1)}(z)}{[J_0(z)\, H_0^{(1)}(z)\,(z^4 - p^2 z^2 + ir^2 z)]'} \Bigg|_{z=z_r} e^{-i\frac{2}{d} z_r x_1} \right].$$

Na zakończenie podamy możliwość uogólnienia pewnych założeń poczynionych na wstępie. Założyliśmy wtedy m.in., że funkcja odporu podłoża ma postać

$$R(x_1, x_2, t) = \begin{cases} \mathrm{Pr}(x_1, t)\,(a^2 - x_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{cases} \tag{3.42}$$

Wynik ten można znacznie uogólnić. Założymy mianowicie, że funkcja odporu podłoża wyraża się wzorem

$$R(x_1, x_2, t) = \begin{cases} \mathrm{Pr}(x_1, t)\, g(x_2) \\ 0 \end{cases} \tag{3.43}$$

gdzie $g(x_2)$ jest pewną całkowalną z kwadratem, ciągłą, przedziałami gładką funkcją parzystą określoną w przedziale $\langle -a, a\rangle$. Wtedy również funkcja $f(x_2) = g(x_2)\,(a^2 - x_2^2)$ będzie tego samego typu co funkcja $g(x_2)$. Wykorzystując odpowiednie twierdzenia o rozwijaniu funkcji w uogólnione szeregi Fouriera, otrzymamy rozwinięcie względem wielomianów Czebyszewa I rodzaju

$$f(x_2) = g(x_2)\,(a^2 - x_2^2)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\, T_{2n}\left(\frac{x_2}{a}\right). \tag{3.44}$$

Szereg ten jest zbieżny w przedziale $(-a, a)$ nieomal jednostajnie. Po wyliczeniu ze wzoru (3.44) funkcji $g(x_2)$ i podstawieniu do wzoru (3.43) otrzymamy

$$R(x_1, x_2, t) = \begin{cases} \mathrm{Pr}(x_1, t)\,(a^2 - x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\, T_{2n}\left(\frac{x_2}{a}\right) & \text{dla} \quad |x_2| \leqslant a, \\ 0 & \text{dla} \quad |x_2| > a. \end{cases} \tag{3.45}$$

Dokonując zamiany zmiennych określonej wzorem (3.3) i po wykorzystaniu wzoru całkowego (3.6) dostaniemy

$$\bar{R}(\alpha_1, \alpha_2, t) = \mathrm{Pa}^{-2}\, \bar{r}(\alpha_1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n}\, J_{2n}(|\alpha_2|). \tag{3.46}$$

Dalszy tok postępowania jest podobny jak dla obciążenia (3.42). Biorąc pod uwagę skończoną liczbę wyrazów szeregu otrzymamy

$$u_3(x_1, 0, 0) = \tag{3.47}$$

$$= \frac{\mathrm{Pa}^3 c^3}{8\pi\,\mathrm{EJ}} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{\sum_{n=0}^{m} (-1)^n a_{2n}\, I_n(s)\, K_n(s)\, e^{-i\frac{2}{c} s x_1}}{\sum_{n=0}^{m} (-1)^n a_{2n}\, I_n(s)\, K_n(s)\,(s^4 - p^2 s^2 + ir^2 s) + h^2}\, ds,$$

dla $v < c_2$, gdzie stałe p^2, r^2, h^2 są zdefiniowane za pomocą wzoru (3.20):

$$(3.48)\quad u_3(x_1, 0, 0) = \frac{Pa^3 d^3}{8\pi EJ} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{\sum_{n=0}^{m} (-1)^n a_{2n} J_n(s) H_n^{(1),(2)}(s) e^{-i\frac{2}{d}sx_1}}{\sum_{n=0}^{m} (-1)^n a_{2n} J_n(s) H_n^{(1),(2)}(s) (s^4 - p^2 s^2 + ir^2 s) + f^2} ds,$$

dla $v > c_2$, gdzie stałe p^2, r^2, f^2 są zdefiniowane we wzorze (3.35).

4. Analiza numeryczna

Dla przedstawionego zagadnienia, wykorzystując wzory przedstawiające rozwiązania dla podkrytycznej i nadkrytycznej prędkości ruchu obciążenia, wykonano obliczenia numeryczne. Obliczenia te wykonano dla różnych wartości parametru $\xi = v/c_2$, będącego stosunkiem prędkości ruchu do prędkości krytycznej oraz dla różnych modułów sprężystości podłoża: $E_1 = 0{,}1 \cdot 10^8$ N/m^2, $E_2 = 0{,}5 \cdot 10^8$ N/m^2, $E_3 = 1{,}0 \cdot 10^8$ N/m^2, gdzie $E_i = 2\mu_i(1+\nu)$. Pozostałe parametry przyjęto jako stałe; $\nu = 0{,}3$; $\varrho_b = 470$ kg/m, $\varrho = 1800$ kg/m^3, $a = 1{,}25$ m, EJ $= 12{,}83 \cdot 10^6$ Nm^2. Wartości a, EJ, ϱ_b są danymi dotyczącymi toru kolejowego z szynami S 60 i podkładami betonowymi INBK-8. Uzyskane wyniki przedstawiono na wykresach.

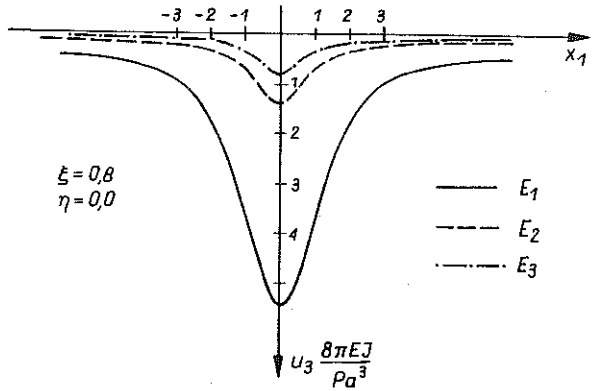
Na rys. 5 i 6 przedstawiono funkcje przemieszczeń dla różnych wartości modułu sprężystości podłoża przy ustalonych wartościach parametru $\xi = v/c_2$ ($\xi = 0{,}8$ dla przypadku podkrytycznej prędkości poruszania się obciążenia oraz $\xi = 2{,}0$ dla prędkości nadkrytycznej). Tego samego typu zależności dla momentów gnących przedstawiono na rys. 7 i 8.

Dokonano również porównania omawianych funkcji dla różnych wartości parametru ξ przy ustalonym module sprężystości podłoża równym E_2. Uzyskane zależności przedstawiono na rys. 9–12.

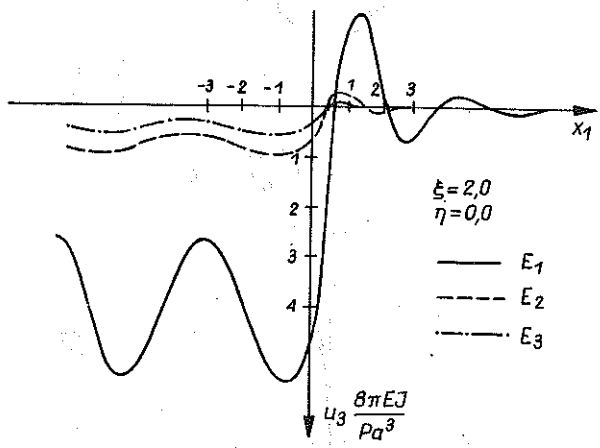
Analizując otrzymane wykresy widzimy, że zmiany omawianych parametrów nie powodują wyraźnej zmiany charakteru wykresów. Wyłączamy oczywiście przypadek, gdy prędkość ruchu przechodzi z przedziału prędkości podkrytycznych do przedziału prędkości nadkrytycznych. W tym bowiem przypadku charakter wykresów ulega istotnej zmianie.

Badano również wpływ tłumienia na przebieg omawianych funkcji. Obliczenia wykonano przy ustalonym module sprężystości podłoża równym E_2 oraz ustalonej wartości parametru ξ ($\xi = 0{,}8$ lub $\xi = 2{,}0$). Otrzymane wyniki przedstawiono na rys. 13–16.

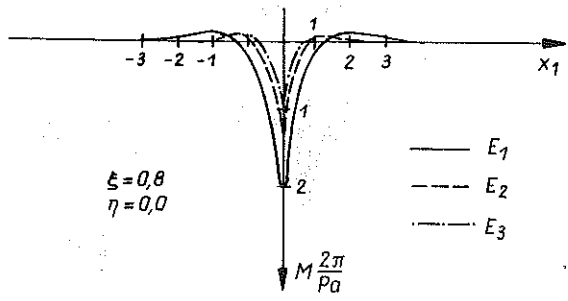
W celu zbadania wpływu inercji podłoża na przebiegi funkcji przemieszczeń i momentów gnących porównano rozwiązania uwzględniające siły



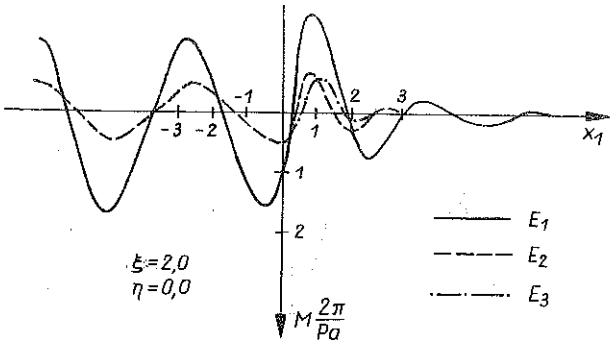
Rys. 5



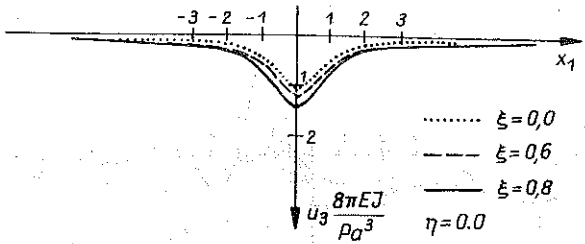
Rys. 6



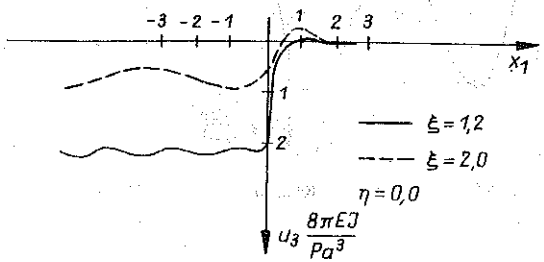
Rys. 7



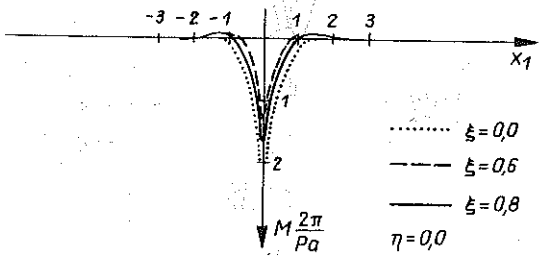
Rys. 8



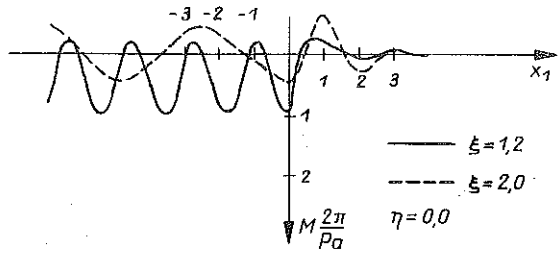
Rys. 9



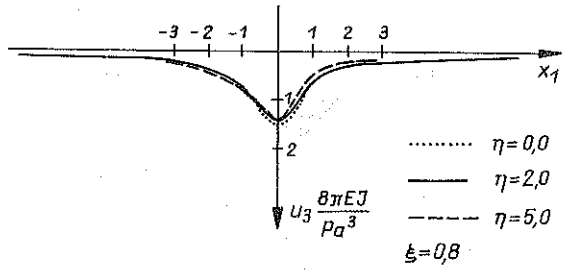
Rys. 10



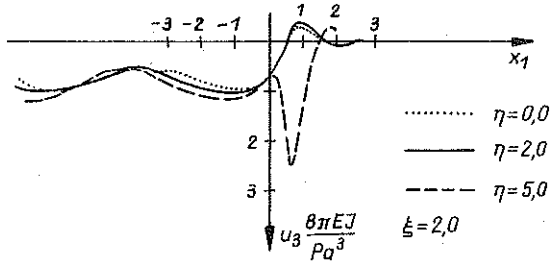
Rys. 11



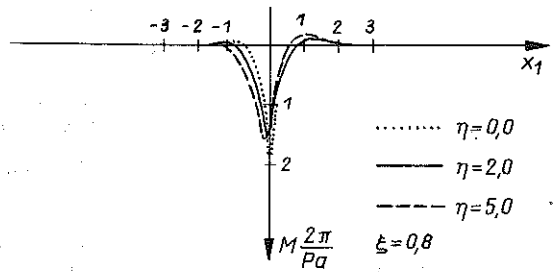
Rys. 12



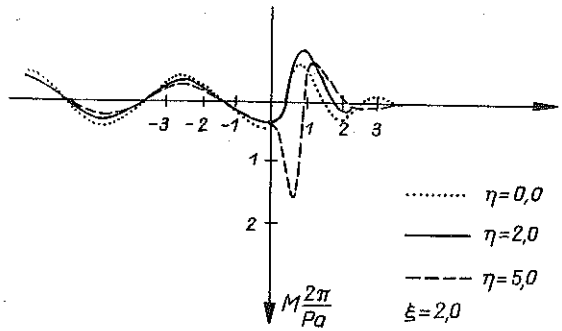
Rys. 13



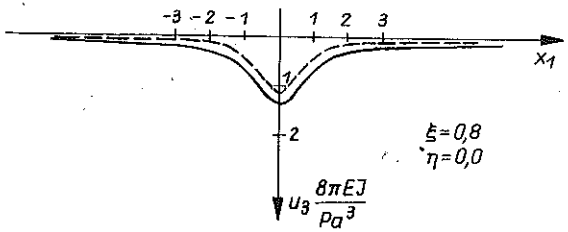
Rys. 14



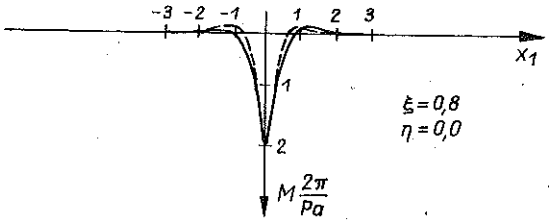
Rys. 15



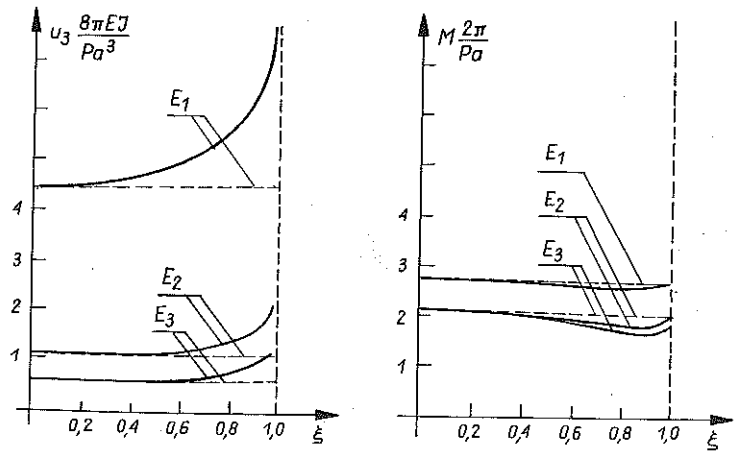
Rys. 16



Rys. 17



Rys. 18



Rys. 19

bezwładności z rozwiązaniami je pomijającymi. Obliczenia wykonano dla $\xi = 0{,}8$ i modułu sprężystości podłoża E_2. Wyniki przedstawiono na rys. 17 i 18, gdzie linią ciągłą oznaczono rozwiązania uwzględniające siły bezwładności w podłożu, a linią przerywaną rozwiązania pomijające je. Na rysunkach tych widzimy, że pominięcie inercji podłoża ma przede wszystkim wpływ na wartość funkcji przemieszczeń, nie powoduje natomiast zmiany charakteru badanych wykresów.

Wpływ ten jest szczególnie widoczny na rys. 19, gdzie przedstawiano wykresy największych wartości funkcji przemieszczeń i momentów gnących dla różnych modułów sprężystości podłoża w zależności od prędkości ruchu obciążenia ($\xi < 1$). Porównując rozwiązania uwzględniające inercję z rozwiązaniami je pomijającymi widzimy, że pominięcie sił bezwładności w podłożu powoduje znaczne zmniejszenie wartości funkcji przemieszczeń w porównaniu z wynikami uzyskanymi dla modelu podłoża uwzględniającego inercję. Jest to szczególnie widoczne dla większych prędkości ruchu obciążenia. Różnice dotyczące rozkładu momentów gnących są natomiast małe.

Należy zwrócić uwagę na znaczny, w porównaniu z wpływem prędkości, wpływ modułu sprężystości podłoża na wartości funkcji przemieszczeń i momentów gnących. Wpływ prędkości jest widoczny dopiero dla większych wartości parametru ξ i dotyczy rozwiązań uwzględniających inercję podłoża.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. S. BANDYOPADHYAY, *Analysis of rigid pavement on viscoelastic foundations subjected to moving loads*, Inter. J. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 6, 1982.
2. А. П. Филиппов, *Колебания деформируемых систем*, Издательство Машиностроение, Москва 1970.
3. Л. А. Галин, *Контактные задачи теории упругости*, Тосмехтеоретиздат, Москва 1953.
4. И. С. Градшейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Изд. Наука, Москва 1971.
5. A. D. KEER, *The continuously supported rail subjected to axial force and a moving load*, Int. J. Mech. Sci., **14**, 1972.
6. J. T. KENNEY, *Steady-state vibration of beam on elastic foundation for moving load*, J. Appl. Mech. Trans. ASME, **21**, 1954.
7. J. J. LABRA, *An axially stressed railroad track on an elastic continuum subjected to a moving load*, Acta Mechanica, **22**, 1975.
8. F. LEJA, *Funkcje zespolone*, PWN, Warszawa 1973.
9. Т. Б. Муравский, *О модели упругого основания*, Строительная механика и расчет сооружений, **6**, 54, Москва 1967.
10. Z. ROZENBAJGIER, *Dynamika belki na lepkosprężystym podłożu dla ruchomego odcinkowo stałego obciążenia*, Arch. Inż. Ląd., 23, 1, 1977.
11. P. RUTA, *Uproszczony model inercyjnego podłoża sprężystego i jego zastosowania*, Raport Inst. Inż. Ląd. Politechniki Wrocławskiej, seria PRE, 52, 1984.
12. P. RUTA, J. LANGER, *Uproszczony model półprzestrzeni sprężystej*, Zesz. Nauk. Politechniki Rzeszowskiej, 13, Mech., 5, 1983.

13. P. ŚNIADY, *Drgania dźwigarów wywołane ruchomym obciążeniem*, Prace Nauk. Inst. Inż. Ląd. Politechniki Wrocławskiej, 21, 1976.
14. R. ŚWITKA, *Aproksymowana półprzestrzeń sprężysta jako model podłoża sprężystego*, Rozprawy, 31, Politechnika Poznańska 1968.
15. R. ŚWITKA, *Wybrane zagadnienia drgań belki nieskończenie długiej na podłożu sprężystym*, Poznańskie Towarzystwo Przyjaciół Nauk, Prace Komisji Budownictwa i Architektury, 2, 1, 1972.
16. В. Н. Терентьев, А. Г. Филиппов, *Вынужденные установившиеся колебания безконечных балок, лежащих на упругом полупространстве*, Прикладная Механика, 1, 9, 1965.

Резюме

КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ НА ИНЕРТНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ НАГРУЖЕННОЙ ПОДВИЖНОЙ СУЛОЙ

В работе решения задача колебаний бесконечной балки, находящейся на инертном упругом основании, нагруженной движущейся с постоянной скоростью сосредоточенной силой. Эта задача решена методом преобразования Фурье. Проведен численный анализ задачи, производя расчеты для разных значений параметров. Исследовано тоже влияние инерции основания на экстремальные значения полученных решений.

Summary

VIBRATION OF A BEAM RESTING ON INERTIAL ELASTIC FOUNDATION AND LOADED BY A MOVING FORCE

Problem of vibration of an infinitely long beam is considered; the beam rests on inertial elastic foundation and is acted on by a concentrated force moving at a constant speed. The problem is solved by means of the Fourier integral transform technique. Numerical analysis is performed for different values of the parameters. The effect of inertia of the foundation on the final solutions of the problem is also analyzed.

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
INSTYTUT INŻYNIERII LĄDOWEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 grudnia 1985 r.