

## KINEMATYKA PROCESU WSPÓLBIEŻNEGO WYCISKANIA PRZEZ DWA OTWORY

JAN PIWNIK (BIAŁYSTOK)

W pracy przedstawiono nowe rozwiązanie dla pól prędkości w obszarze uplastycznienia materiału wyciskanego z cylindrycznego pojemnika do matrycy z symetrycznie rozmieszczonymi otworami kołowymi. Otrzymane wzory na składowe prędkości przemieszczeń spełniają ściśle wszystkie warunki kinematyczne i warunek nieściśliwości materiału. Rozkład prędkości przemieszczeń i składowych prędkości odkształceń jest ciągły w całym obszarze płynięcia plastycznego. Wzory na składowe prędkości przemieszczeń otrzymano wprowadzając dwie funkcje zmiennych rzeczywistych  $\phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi)$ . Prezentowane rozwiązanie dla pól prędkości jest rozszerzeniem koncepcji funkcji prądu na procesy niesymetrycznego wyciskania. Obszar płynięcia plastycznego podzielono na dwie równe, sąsiadujące strugi materiału, Kierowano się przy tym wynikami badań doświadczalnych. Przeanalizowano możliwość wykorzystania funkcjonalu całkowitej mocy odkształceń do optymalizacji procesu.

### 1. WPROWADZENIE

Analiza złożonych procesów wyciskania metali jest oparta na modelu ciała sztywno-idealnie plastycznego [1, 2, 3 i 4]. Najczęściej podawano oszacowania górne dla sił wywołujących początek plastycznego płynięcia w warunkach płaskiego stanu odkształcenia lub osiowej symetrii [2, 3, 4 i 5].

Natomiast dla procesów wyciskania z bardziej złożonymi kształtami przepływu brakuje poprawnych, z punktu widzenia teorii plastycznego płynięcia, wzorów na moc odkształcenia. Wzory takie otrzymuje się z twierdzeń ekstremalnych teorii plastyczności i służą one nie tylko do obliczeń sił, ale również są pomocne przy doborze optymalnych parametrów technologicznych procesów wyciskania [3, 4, 5 i 6].

Znane rozwiązania dla sił w procesach wyciskania wielokanałowego są obarczone drastycznymi uproszczeniami, które najczęściej polegają na bezpośrednim przenoszeniu znanych rozwiązań idealnej plastyczności w płaskim stanie odkształcenia do zagadnień trójwymiarowego płynięcia plastycznego [2, 7, 8 i 9].

Proces współbieżnego wyciskania metali z cylindrycznego pojemnika do matrycy z dwoma otworami kołowymi był dotychczas przedmiotem kilku analiz doświadczalnych [4, 5, 8, 10 i 11]. W doświadczeniach tych realizowano głównie wyciskanie materiałów modelowych (plastelina, ołów), a wy-

niki badań przedstawiono za pomocą obrazów zdeformowanej siatki, którą uprzednio nanoszono w wybranych kilku wzdłużnych i poprzecznych przekrojach wyjściowej, cylindrycznej próbki. Porównując obrazy zdeformowanych siatek w kilku kolejnych, małych etapach deformacji, można w rozpatrywanym przekroju wyznaczyć rozkłady prędkości przemieszczeń. Taki sposób badania pól prędkości był stosowany od dawna [12], a ostatnio dzięki komputeryzacji obliczeń stał się standardowym narzędziem zaawansowanych badań różnych procesów formowania metali [13].

Należy tu dodać, że ze względu na trójwymiarowość płynięcia oraz nieregularny kształt obszaru uplastycznienia nie potrafimy skonstruować pełnego obrazu deformacji w badanym procesie, pomimo posiadania doświadczalnych rozkładów prędkości przemieszczeń w wielu przekrojach próbki. Obraz taki, z konieczności uproszczony, może dać teoria. Istnieje zatem pilna potrzeba zbudowania dla takich procesów chociaż najprostszych, teoretycznych schematów płynięcia plastycznego, które spełniałyby ściśle wszystkie kinematyczne warunki brzegowe i warunek nieściśliwości materiału.

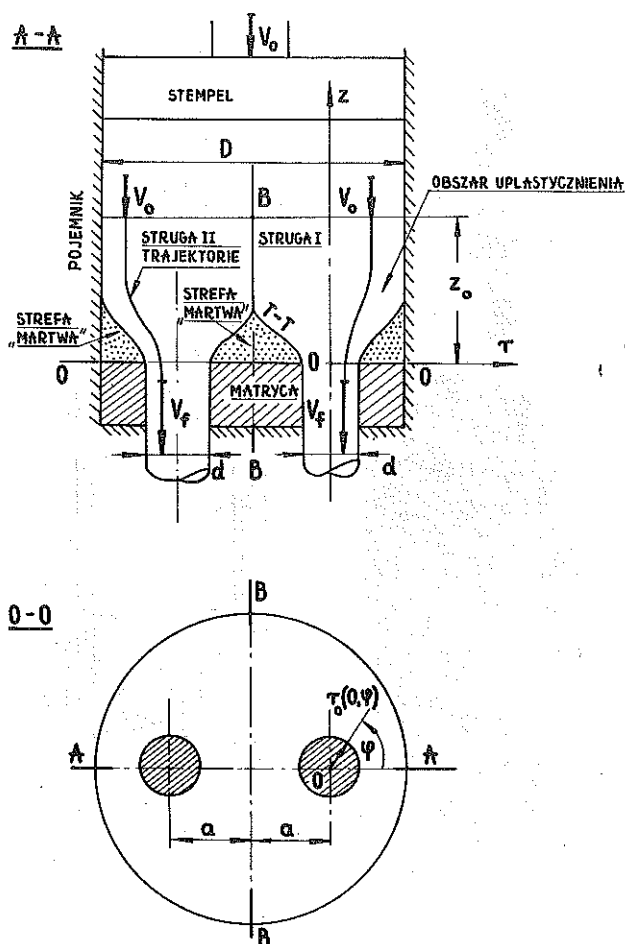
Jak dotąd proces wyciskania dwuotworowego był przedmiotem nielicznych analiz teoretycznych opartych na teorii plastyczności [2, 4 i 5]. W pracach [4 i 5] proponowano metodę obliczeń oceny górnej dla procesów wyciskania wielokanałowego. Za punkt wyjścia brano tam dopuszczalne pola kinematyczne, które są superpozycją rozwiązań kilku podstawowych przepływów potencjalnych płynu nieściśliwego.

W niniejszej pracy pokazano nowe wzory na kinematycznie dopuszczalne składowe prędkości przemieszczeń w obszarze uplastycznienia materiału wyciskanego z cylindrycznego pojemnika do matrycy z symetrycznie rozmieszczonymi otworami kołowymi. W odróżnieniu od prac [4 i 5] do opisu pól prędkości nie stosowano funkcji zmiennej zespolonej. Wzory na prędkości otrzymano wprowadzając dwie funkcje  $\phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi)$  zmiennych rzeczywistych. Obszar płynięcia plastycznego podzielono na dwie części. Metodę analizy pól prędkości oparto na własnym rozwiązaniu dla procesu wyciskania niesymetrycznego pokazanym w pracy [14]. Kierowano się przy tym, m.in. znanymi w literaturze rezultatami badań doświadczalnych jak też własnymi wynikami badań modelowych [15], które zamieszczono jako materiał pomocniczy.

## 2. ZAŁOŻENIA I ZALEŻNOŚCI PODSTAWOWE

### 2.1. Wnioski z doświadczeń i podział obszaru płynięcia na dwie strugi

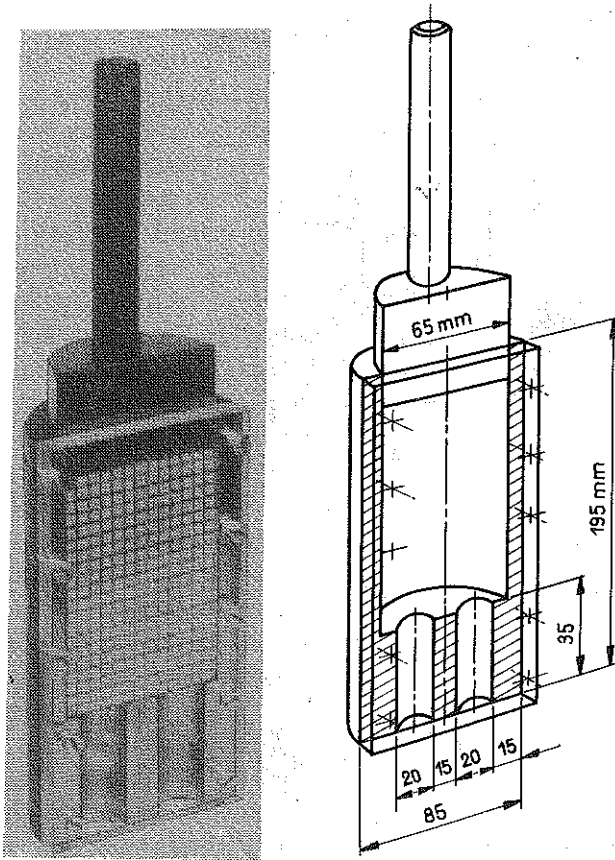
Schemat procesu wyciskania dwuotworowego pokazano na rys. 1. Płaszczyzna wzdłużna próbki  $A-A$  z rys. 1 przecina symetrycznie otwory kołowe. Stąd przekrój  $A-A$  daje możliwość zbadania charakteru niejednorod-



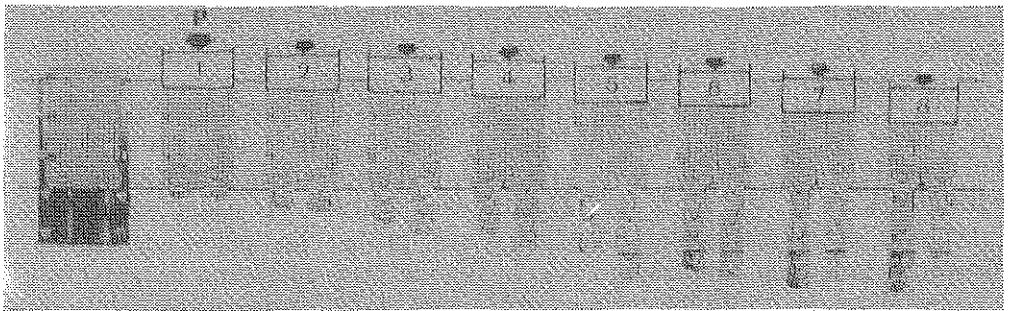
Rys. 1

ności płynięcia plastycznego w objętościach materiału przylegającego bezpośrednio do obydwu otworów matrycy. Przekrój **A-A** daje podstawową informację o sposobie płynięcia materiału. Potwierdzają to prace doświadczalne [4, 5, 8, 10, 11 i 16]. Można więc jakościowo badać charakter płynięcia przez wyciskanie półcylicydrycznej próbki do półcylicydrycznych otworów kołowych. Obrazuje to rys. 2. Metodę taką stosowano na przykład z powodzeniem do badań najkorzystniejszych profilów matryc w procesie osiowo-symetrycznego wyciskania w pracy [17].

Na płaszczyźnie czołowej próbki wykonanej z plasteliny (rys. 2) naniesiono z kontrastowej plasteliny kwadratową siatkę. Deformację tej siatki w kolejnych fazach przemieszczenia stempla obserwujemy przez przezroczystą szybkę z pleksi. Powierzchnia przylegania szybki z plasteliną była smarowana olejem rzepakowym. Obserwując, w kolejnych krokach ruchu stempla



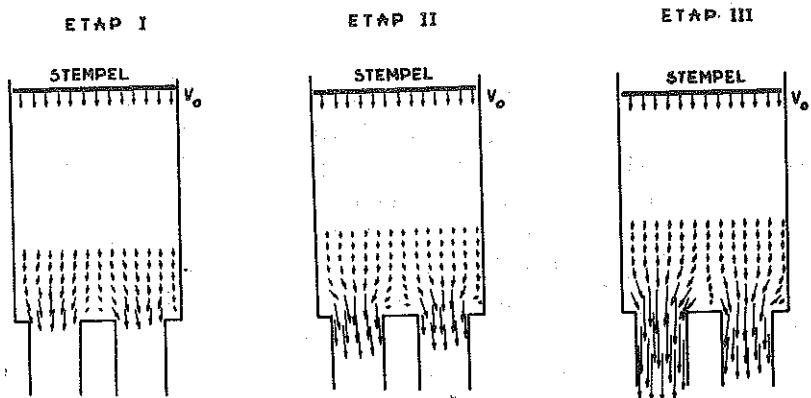
Rys. 2



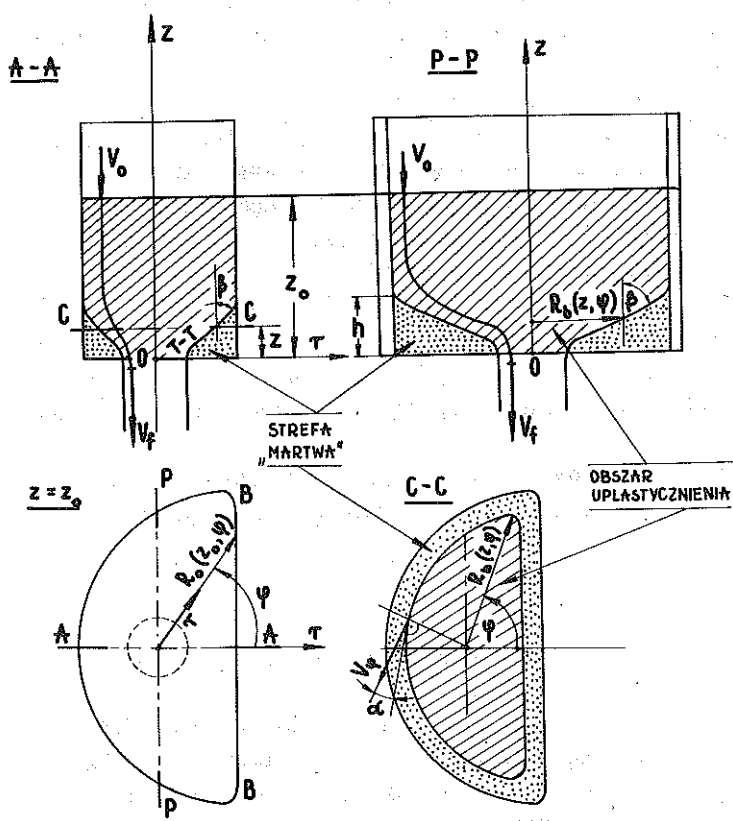
Rys. 3

przemieszczenia węzłów siatki można wyznaczyć w rozpatrywanym przekroju rozkłady prędkości przemieszczeń.

Obrazy zdeformowanych siatek w kolejnych małych etapach deformacji zestawiono na rys. 3. Odpowiadające pierwszym trzem etapom deformacji



Rys. 4



Rys. 5

rozkłady prędkości przemieszczeń pokazano w postaci graficznej na rys. 4. Wyniki tego doświadczenia mają z konieczności charakter jakościowy, ale potwierdzają rezultaty badań otrzymane w pracach [5, 8, 11 i 16], gdzie wyciskano pełne próbki wykonane z aluminium i ołowiu.

Opierając się na wynikach badań własnych [15] pokazanych na rysunkach [3 i 4] jak też wspomnianych pracach [5, 8, 11 i 16], zakładamy dalej, że materiał w pojemniku w trakcie płynięcia plastycznego rozdziela się na dwie strugi. Są one wyciskane stemplem poruszającym się z prędkością  $V_0$ . Obrazuje to rys. 5. W przypadku otworów kołowych, symetrycznych i symetrycznie rozmieszczonych względem osi wzdłużnej próbki, strugi te są symetrycznie usytuowane względem siebie i rozłączają się dopiero w bliskim otoczeniu otworów. W pozostałym obszarze strugi materiału łączą się ze sobą (rys. 1). Zakłada się przy tym kształt obszaru strefy „martwej” w pojedynczej strudze. W strefie tej nie występuje z założenia płynięcie plastyczne, a na powierzchni jej styku z powierzchnią obszaru uplastycznienia występują nieciągłości prędkości.

Na powierzchni styku strug  $B-B$  (rys. 1) zakładamy zerową wartość składowej normalnej prędkości przemieszczeń. Wartości składowej stycznej prędkości przemieszczeń na powierzchni kontaktu strug mogą być inne dla każdej strugi i wtedy powierzchnia podziału będzie powierzchnią nieciągłości prędkości. Wystąpi to wtedy, gdy otwory matrycy są rozstawione niesymetrycznie lub gdy będą miały różne kształty.

W przypadku matrycy z jednakowymi otworami rozstawionymi symetrycznie względem wzdłużnej osi próbki, na powierzchni rozdziału  $B-B$  zakładamy brak nieciągłości prędkości przemieszczeń. Warunki tarcia między materiałem i pojemnikiem muszą być przy tym jednakowe na całej powierzchni kontaktu.

Zatem rozpatrzmy najpierw opis pól prędkości w pojedynczej strudze, a następnie przeanalizujemy możliwości użycia otrzymanego rozwiązania do optymalizacji procesu.

## 2.2. Opis pól prędkości plastycznego płynięcia w pojedynczej strudze

Opis pól prędkości płynięcia plastycznego w pojedynczej strudze realizujemy w układzie współrzędnych  $r, z, \varphi$ . Ilustruje to rys. 5, na którym pokazano kształt strugi i kształt obszaru uplastycznienia.

Obszar uplastycznienia strugi jest ograniczony z boku powierzchnią półcylindrycznego pojemnika, powierzchnią płaszczyzny rozdziału  $B-B$  oraz powierzchnią stożkową określoną tworzącymi  $T-T$  (rys. 1 i 5). Powierzchnia stożkowa  $T-T$  jest geometrycznym modelem strefy „martwej”. Od dołu obszar płynięcia plastycznego wyznacza powierzchnia  $z=0$ , natomiast od góry powierzchnia  $z=z_0$ . Kształt powierzchni bocznej musi być z założenia

określony jednoznacznie, ciągłą i  $n$ -krotnie różniczkowalną funkcją  $R_b(z, \varphi)$  (rys. 5). Oś współrzędnych  $z$  prowadzimy przez środek otworu kołowego, prostopadłe do płaszczyzn  $z = 0$  i  $z = z_0$ , które są równoległe do płaszczyzny czołowej stempla. Kąt  $\varphi$  określający położenie promienia  $r$ , w płaszczyznach prostopadłych do osi  $z$ , odmierzano w kierunku zaznaczonym na przekrojach poprzecznych  $C-C$  i  $z = 0$ , które są prostopadłe do osi  $z$  (rys. 5).

Wektor prędkości przemieszczeń ma trzy składowe  $V_r$ ,  $V_z$ ,  $V_\varphi$ . Składowe te wyznacza się następująco przez funkcje  $\phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi)$  [3, 14]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} V_r(r, z, \varphi) &= \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \phi_1(r, z, \varphi)}{\partial z} + \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \phi_2(r, z, \varphi)}{\partial \varphi}, \\ V_z(r, z, \varphi) &= -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \phi_1(r, z, \varphi)}{\partial r}, \\ V_\varphi(r, z, \varphi) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \phi_2(r, z, \varphi)}{\partial r}. \end{aligned}$$

Funkcje  $\phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi)$  są ciągłe i  $n$ -krotnie różniczkowalne w obszarze uplastycznienia, który jest dziedziną tych funkcji.

Składowe prędkości przemieszczeń (2.1) spełniają z definicji ściśle warunek nieściśliwości:

$$(2.2) \quad \dot{\epsilon}_{ii} = 0,$$

gdzie  $\dot{\epsilon}_{ij}$  jest reprezentacją tensora małych prędkości odkształceń. Składowe  $\dot{\epsilon}_{ij}$  określają następujące wzory [1 i 3]:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \frac{\partial V_r}{\partial r}, \\ \dot{\epsilon}_\varphi &= \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \dot{\epsilon}_z &= \frac{\partial V_z}{\partial z}, \\ \dot{\gamma}_{r\varphi} &= r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi}, \\ \dot{\gamma}_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}, \\ \dot{\gamma}_{rz} &= \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r}. \end{aligned}$$

Zatem do wyznaczenia funkcji  $V_r(r, z, \varphi)$ ,  $V_z(r, z, \varphi)$ ,  $V_\varphi(r, z, \varphi)$  i funkcji  $\dot{\epsilon}_{ij}(r, z, \varphi)$  niezbędna jest znajomość funkcji  $\phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi)$ .

Materiał w strudze porusza się z prędkością stempla  $V_0$  w obszarze pomiędzy stemplem i przekrojem  $z = z_0$ , który rozdziela obszar sztywny i uplastyczniony. Składowe prędkości przemieszczeń w przekroju  $z = z_0$  są z założenia odpowiednio równe:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} V_z|_{z=z_0}(r, z, \varphi) &= V_0, \\ V_r|_{z=z_0}(r, z, \varphi) &= 0, \\ V_\varphi|_{z=z_0}(r, z, \varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Stąd na płaszczyźnie  $z = z_0$  nie występują nieciągłości prędkości przemieszczeń i prędkości odkształceń. Analogiczne założenie czynimy dla pól prędkości w płaszczyźnie  $z = 0$ . Różnica dotyczy jedynie składowej osiowej prędkości przemieszczeń  $V_z$ , której wartość wynika z bilansu przepływu i ma postać:

$$(2.5) \quad V_z|_{z=0}(r, z, \varphi) = V_f = - \frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_0^2(z_0, \varphi) d\varphi}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r_0^2(z=0, \varphi) d\varphi} V_0.$$

We wzorze (2.5) całka w liczniku jest połową pola powierzchni stempla (przekrój  $z = z_0$  na rys. 5), natomiast mianownik odpowiada polu powierzchni otworu w matrycy.

Przyjmujemy dalej, że na powierzchni kontaktu deformowanego materiału z pojemnikiem, powierzchni  $T-T$  strefy „martwej” (rys. 1 i 5) i powierzchni kontaktu  $B-B$  z sąsiednią strugą składowe prędkości przemieszczeń  $V_n$  w kierunkach normalnych są równe zero. Wynika to z założenia o nieprzenikalności deformowanego materiału przez wymienione powierzchnie boczne. Składowa normalna prędkości  $V_n$  ma postać:

$$(2.6) \quad V_n = V_r \cos \beta \cos \alpha - V_z \sin \beta \cos \alpha - V_\varphi \cos \beta \sin \alpha = 0,$$

gdzie

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{\partial R_b(z, \varphi)}{\partial \varphi}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{1}{R_b(z, \varphi)} \frac{\partial R_b(z, \varphi)}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Kąt  $\beta$  we wzorze (2.6) jest zawarty pomiędzy styczną do linii konturu powierzchni bocznych w płaszczyźnie  $z-r$  a kierunkiem osi  $z$ . Kąt  $\alpha$  jest zawarty pomiędzy styczną do linii konturu powierzchni bocznych w płaszczyźnie prostopadłej do osi  $z$  a kierunek prędkości obwodowej  $V_\varphi$ . Objasnia to rys. 5.



Po podstawieniu (2.7) do (2.6) otrzymujemy

$$(2.8) \quad V_r - V_z \frac{\partial R_b(z, \varphi)}{\partial z} - V_\varphi \frac{1}{R_b(z, \varphi)} \frac{\partial R_b(z, \varphi)}{\partial \varphi} = 0.$$

Warunek (2.8) i warunek nieściśliwości (2.2), przybierający teraz postać

$$(2.9) \quad \dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_z + \dot{\epsilon}_\varphi = 0,$$

nakładają główne ograniczenia na konstrukcję funkcji  $\phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi)$ .

Opierając się dalej na pracach [3, 13, 14, 18 i 19] postulujemy, że funkcja  $\phi_1(r, z, \varphi)$  jest sumą dwóch wyrazów. Jeden z nich ma postać:

$$(2.10) \quad \phi_1^I(r, z, \varphi) = \frac{\pi r^2}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_b^2(z, \varphi) d\varphi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_0^2(z_0, \varphi) d\varphi V_0.$$

Otrzymane tylko z  $\phi_1^I(r, z, \varphi)$  składowe  $V_r, V_z$  odpowiadają hipotezie płaskich przekrojów.

Drugi bezwymiarowo sformułowany wyraz funkcji  $\phi_1(r, z, \varphi)$  jest szeregiem trygonometrycznym:

$$(2.11) \quad \phi_1^N(r, z, \varphi) = A_1(z, \varphi) \sin \pi r_n^2 + A_2(z, \varphi) \sin 2\pi r_n^2 + \dots + A_k(z, \varphi) \sin k\pi r_n^2,$$

gdzie  $k$  należy do zbioru liczb naturalnych, a funkcja  $r_n(r, z, \varphi)$  ma formę znormalizowanego promienia:

$$(2.12) \quad r_n(r, z, \varphi) = \frac{r}{R_b(z, \varphi)}.$$

We wzorze (2.12) współrzędna  $r$  odmierzana jest na kierunku pokrywającym się z promieniem  $R_b(z, \varphi)$  (rys. 5).

Funkcje  $A_k(z, \varphi)$  mogą w (2.11) zależeć także od jednej zmiennej  $z$ . Sumując (2.10) i (2.11), znajdziemy

$$(2.13) \quad \phi_1(r, z, \varphi) = \frac{\pi r^2}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_b^2(z, \varphi) d\varphi} + \sum_{k=1}^n A_k(z, \varphi) \sin k\pi r_n^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_0^2(z_0, \varphi) d\varphi V_0.$$

Funkcję  $\phi_2(r, z, \varphi)$  przedstawiamy również za pomocą szeregu trygonometrycznego:

$$(2.14) \quad \phi_2(r, z, \varphi) = \left[ \sum_{k=1}^n B_k(z, \varphi) \sin^2 k\pi r_n^2 \right] \frac{\partial r_n}{\partial \varphi} z_0 V_0.$$

Zakładamy dalej, że funkcje  $A_k$  i  $B_k$  w (2.11) i (2.14) zależą tylko od zmiennej  $z$ .

Uwzględniając warunek nieciągłości prędkości w przekrojach  $z = z_0$  i  $z = 0$  funkcje  $A_k(z)$  i  $B_k(z)$  muszą spełniać następujące warunki [14]:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} A_k(z) \Big|_{z=0}^{z=z_0} &= \frac{dA_k}{dz} \Big|_{z=0}^{z=z_0} = \frac{d^2 A_k}{dz^2} \Big|_{z=0}^{z=z_0} = 0, \\ B_k(z) \Big|_{z=0}^{z=z_0} &= \frac{dB_k}{dz} \Big|_{z=0}^{z=z_0} = \frac{d^2 B_k}{dz^2} \Big|_{z=0}^{z=z_0} = 0. \end{aligned}$$

Nieznane funkcje  $A_k(z)$  i  $B_k(z)$  w (2.13) i (2.14) mogłyby być określone warunkami brzegowymi odnośnie tarcia i rozwiązaniem podstawowego układu równań stanu plastycznego. Jednak wobec znanych trudności przy rozwiązywaniu takich nieliniowych zadań [1, 3 i 19] funkcje  $A_k(z)$  i  $B_k(z)$  zakładamy z góry w ten sposób, żeby spełnione były warunki (2.15). Wtedy po podstawieniu ich do (2.13) i (2.14) a następnie do (2.8) i (2.9) będą ściśle spełnione wszystkie warunki kinematyczne przez pola prędkości przemieszczeń i prędkości odkształceń.

Ścisłe spełnienie warunków (2.8) i (2.9) przez pola prędkości w obszarze uplastycznienia osiąga się dzięki własnościom konstrukcji funkcji na  $\phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi)$ . Dyskusja kryteriów wyboru funkcji  $\phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi)$  znajduje się w pracach [3 i 4].

Proponuje się dalej obcięcie szeregów (2.11) i (2.14) do jednego wyrazu. Załóżmy też dla prostoty, że

$$(2.16) \quad A_1(z) = B_1(z) = R \sin^2 \pi \frac{z}{z_0}.$$

Konstrukcja  $A_1(z)$  i  $B_1(z)$  określona wzorem (2.16) spełnia ściśle warunki (2.15). Stąd otrzymane z nich wzory (2.13) i (2.14) na  $\phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi)$  spełniają ściśle warunki (2.8) i (2.9). Współczynnik  $R$  we wzorze (2.16) oznacza stopień redukcji materiału:

$$(2.17) \quad R = 1 - \frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r_0^2(z=0, \varphi) d\varphi}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_0^2(z_0, \varphi) d\varphi}.$$

Kinematycznie dopuszczalne funkcje  $\phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi)$  z uwzględnieniem (2.16) mają teraz uproszczoną postać:

$$(2.18) \quad \phi_1(r, z) = \left[ \frac{\pi r^2}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_b^2(z, \varphi) d\varphi} + \right]$$

$$(2.18) \quad + R \sin^2 \pi \frac{z}{z_0} \sin \frac{\pi r^2}{R_b^2(z, \varphi)} \Bigg] \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_0^2(z_0, \varphi) d\varphi V_0,$$

$$\phi_2(r, z) = R \sin^2 \pi \frac{z}{z_0} \sin^2 \pi \frac{r^2}{R_b^2(z, \varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{r}{R_b(z, \varphi)} \right] V_0 z_0.$$

Uprozczone wzory (2.18) na  $\phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi)$  mogą być użyte do wyznaczenia kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości w obszarze płynięcia plastycznego rozpatrywanej strugi.

### 3. WZORY NA SKŁADOWE PRĘDKOŚCI PRZEMIESZCZEŃ

Wprowadźmy pomocnicze oznaczenie:

$$(3.1) \quad \eta(z) = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_0^2(z_0, \varphi) d\varphi}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_b^2(z, \varphi) d\varphi}.$$

Funkcja (3.1) jest ilorazem połowy pola powierzchni stempla przez pole poprzecznego przekroju strugi, które zależy tylko od współrzędnej  $z$ , stąd  $\eta = \eta(z)$ . Wyznamy dla określonych wzorami (2.18) funkcji  $\phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi)$  wyrażenia na kinematycznie dopuszczalne składowe prędkości przemieszczeń  $V_r$ ,  $V_z$ ,  $V_\varphi$ , w obszarze płynięcia plastycznego pojedynczej strugi. Składowe te mają następującą postać:

$$\begin{aligned} V_r(r, z, \varphi) = & \frac{r}{2} \frac{d\eta(z)}{dz} V_0 + \frac{1}{2\pi r} \left[ 2R \sin \pi \frac{z}{z_0} \cos \pi \frac{z}{z_0} \frac{\pi}{z_0} \sin \pi r_n^2 + \right. \\ & \left. + R \sin^2 \pi \frac{z}{z_0} \cos \pi r_n^2 2\pi r_n \frac{\partial r_n}{\partial z} \right] \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R_0^2(z_0, \varphi) d\varphi V_0 + \\ & + \frac{1}{2\pi r} \left[ R \sin^2 \pi \frac{z}{z_0} \sin^2 \pi r_n^2 \frac{\partial^2 r_n}{\partial \varphi^2} + \right. \\ & \left. + R \sin^2 \pi \frac{z}{z_0} 2 \sin \pi r_n^2 \cos \pi r_n^2 2\pi r_n \left( \frac{\partial r_n}{\partial \varphi} \right)^2 \right] z_0 V_0, \end{aligned}$$

$$(3.2) \quad V_z(r, z, \varphi) = -\eta(z) V_0 - \frac{1}{2\pi r} \times \\ \times \left[ R \sin^2 \pi \frac{z}{z_0} \cos \pi r_n^2 2\pi r_n \frac{\partial r_n}{\partial r} \right] \int_0^{2\pi} R_0^2(z_0, \varphi) d\varphi V_0,$$

$$V_\varphi = -\frac{R}{2\pi} \sin^2 z \frac{z}{z_0} V_0 \left[ \sin 2\pi r_n^2 \cdot 2\pi r_n \frac{\partial r_n}{\partial \varphi} \frac{\partial r_n}{\partial r} + \sin^2 \pi r_n^2 \frac{\partial^2 r_n}{\partial \varphi \partial r} \right].$$

Funkcje  $V_r(r, z, \varphi)$ ,  $V_z(r, z, \varphi)$  i  $V_\varphi(r, z, \varphi)$  spełniają ściśle wszystkie kinematyczne warunki brzegowe (2.4), (2.5) i (2.8) i warunek nieściśliwości (2.9) w obszarze uplastycznienia rozpatrywanej strugi. W przekrojach ograniczających obszar uplastycznienia, tj.  $z = 0$  i  $z = z_0$  nie występują nieciągłości prędkości.

Funkcja  $R_b(z, \varphi)$  określa w istocie kształt zastępczej matrycy. Uważa się ją za daną. Dotyczy to również wielkości  $z_0$  (rys. 5) wyznaczającej zasięg obszaru uplastycznienia. W ogólnym przypadku istnieje jednak możliwość obliczeń wielkości  $z_0$ , jak też dobór kształtu funkcji  $R_b(z, \varphi)$  na drodze minimalizacji funkcjonału na moc odkształcenia plastycznego. Wzory (3.2) można uprościć do krótszej postaci:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} V_r(r, z) &= \frac{r}{2} \frac{d\eta(z)}{dz} V_0, \\ V_z(z) &= -\eta(z) V_0. \end{aligned}$$

Prędkościom (3.3) przyporządkowane są funkcje  $\phi_1^i(r, z, \varphi)$  w postaci (2.10) oraz  $\phi_2(r, z, \varphi) = 0$ . Składowe prędkości (3.3) odpowiadają przepływowi umownie jednorodnemu.

Dodajmy, że wyrażenia (3.2) na składowe prędkości przemieszczeń są poprawne także w osiowej symetrii. Wtedy  $\phi_1(r, z, \varphi) = \phi(r, z)$ , a  $\phi_2(r, z, \varphi) = 0$ . Funkcja  $\phi(r, z)$  w osiowej symetrii ma interpretację wydatku przepływu i jest wielkością mierzalną w doświadczeniu. Funkcja  $\phi(r, z)$  jest wtedy stała wzdłuż prądu [18 i 19].

#### 4. MOŻLIWOŚCI OPTIMALIZACJI PROCESU

Uwzględniając wzory na składowe prędkości (3.2) lub w uproszczonej postaci (3.3), można sformułować wzory na moc odkształcenia wewnątrz obszaru płynięcia plastycznego strugi oraz na moc wynikającą ze strat tarcia na powierzchni kontaktu powierzchni zastępczej matrycy  $R_b(z, \varphi)$  z deformowanym materiałem. Moc całkowitą należy podwoić, ponieważ z założenia obszar deformacji plastycznej rozdzieliliśmy na dwie równe części.

Obieramy więc kształt i wymiary zastępczej matrycy  $R_b(z, \varphi)$ . Wybór ten ma podstawowe znaczenie ponieważ związany jest z kształtem stref „martwych”. Kształt ten w rzeczywistości jest bardzo złożony i dotychczas nieznany. Przyjmijmy więc, że będzie to powierzchnia nieregularnego stożka o wysokości  $h$  (rys. 5). Pozostałą część  $R_b(z, \varphi)$  stanowią powierzchnie półcyindra pojemnika i powierzchnia podziału B-B. Tworząca stożka jest

nachylona pod kątem  $\beta$  do osi  $z$ . Powierzchnia  $R_b(z, \varphi)$  nie może przy tym posiadać ostrych naroży. Jej kształt objaśnia dodatkowo rys. 5. Do obliczeń kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości-dobór kształtu i wymiarów zastępczej matrycy  $R_b(z, \varphi)$  charakteryzuje się pewną dowolnością w ramach najprostszego, możliwego do realizacji schematu płynięcia plastycznego.

Moc odkształcenia wewnątrz strugi obliczamy następująco:

$$(4.1) \quad \dot{W}_i = \int_{V(\text{objętość})} \sigma_0 \dot{\epsilon}_i dV = \sigma_0 \iiint \left[ \frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_\varphi^2 + \dot{\epsilon}_z^2 + 2\dot{\gamma}_{r\varphi}^2 + 2\dot{\gamma}_{\varphi z}^2 + 2\dot{\gamma}_{rz}^2) \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times r dr dz d\varphi.$$

Moc zużyta przez siły tarcia na powierzchni zastępczej matrycy  $R_b(z, \varphi)$  określa całka

$$(4.2) \quad \dot{W}_f = \int_S \frac{\mu}{\sqrt{3}} \sigma_0 V_p dS,$$

gdzie  $S$  oznacza pole powierzchni kontaktu materiału z zastępczą matrycą  $R_b(z, \varphi)$  pomniejszona o pole powierzchni bocznej  $B-B$  (rys. 1 i 5),  $\mu$  współczynnik tarcia,  $V_p$  prędkość poślizgu materiału na powierzchni  $S$  obliczoną następująco przy  $r = R_b(z, \varphi)$ :

$$(4.3) \quad V_p = \sqrt{V_z^2 + V_r^2 + V_\varphi^2};$$

$\sigma_0$  oznacza granicę plastyczności wyznaczoną przy jednoosiowym rozciąganiu lub ścisnaniu materiału.

Całkowitą moc odkształcenia określa wzór

$$(4.4) \quad \dot{F} = 2\dot{W}_i + 2\dot{W}_f.$$

Przedstawione rozwiązanie dla prędkości przemieszczeń określonych funkcjami (3.2) cechuje brak nieciągłości prędkości na powierzchniach  $z = 0$  i  $z = z_0$ , ograniczających obszar uplastycznienia i powierzchni podziału  $B-B$ . Stąd we wzorze na całkowitą moc odkształcenia w procesie wyciskania dwuotworowego nie występują wyrazy określające straty ścinania na tych powierzchniach.

Wzór (4.4) na całkowitą moc odkształcenia  $\dot{F}$  jest funkcjonałem.

Poszukując minimum tego funkcjonału względem parametru geometrycznego  $a$  (rys. 1), można obliczyć najkorzystniejsze rozstawienie otworów w matrycy. Wielkość  $a$  (rys. 1) przybiera wtedy wartość odpowiadającą minimum mocy  $\dot{F}$ . Można przypuszczać, że tak znalezione rozmieszczenie otworów w matrycy wywoła najmniejszą niejednorodność odkształceń w

rzeczywistym obszarze uplastycznienia. Ma to związek z końcową niejednorodnością własności mechanicznych wyrobu, tj. wyciśniętych dwóch prętów.

Realizację numeryczną obliczeń przy założonej funkcji  $R_b(z, \varphi)$  ułatwia postać wzorów na składowe prędkości, otrzymane z funkcji  $\phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi)$  przedstawionych szeregami (2.13) i (2.14).

## 5. PODSUMOWANIE

Pokazany sposób konstruowania pól kinematycznych w procesie wyciskania dwuotworowego cechuje geometryczna poglądowość. Wzory na kinematycznie dopuszczalne składowe prędkości mają formę superpozycji rozwiązań dla przepływu jednorodnego i pozostałej części. Niejednorodność przepływu plastycznego reprezentują wyrazy wzorów na prędkości otrzymane z funkcji  $\phi_1^N(r, z, \varphi)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi)$ . Przepływ plastyczny uważa się za ustalony w czasie.

Podany opis pól prędkości można rozszerzyć na wyciskanie wielootworowe z niesymetrycznym rozstawieniem otworów matrycy. Forma pól prędkości ma cechy uogólnienia przepływu osiowo-symetrycznego.

Największą trudność sprawia podział na strefy odkształcenia, tj. wybór kształtów niezależnych strug materiału. Odpowiedzi na to pytanie należy szukać, analizując wnikliwie doświadczenia. Obrany kształt obszaru uplastycznienia nie powinien mieć naroży. Wtedy nie wystąpią nieciągłości prędkości.

Konstrukcja funkcji  $\phi_1(r, z, \varphi)$  i  $\phi_2(r, z, \varphi)$  umożliwia wprowadzenie do nich parametrów skalarnych, które można wyznaczyć, rozwiązując w sposób przybliżony podstawowy układ równań stanu plastycznego dla modelu ciała idealnie-plastycznego.

Przedstawione wzory na składowe prędkości pozwalają sformułować w prostej postaci funkcjonal całkowitej mocy odkształcenia. Funkcjonal ten można wykorzystać do obliczeń sił wyciskania i optymalizacji procesu. Można np. wyznaczyć najkorzystniejsze rozstawienie otworów w matrycy, albo dobierać najkorzystniejszy kształt i wymiary matrycy.

Analiza teoretyczna rozpatrywanego procesu, oparta na teorii plastyczności, znajduje się obecnie we wczesnym etapie formułowania kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości w obszarze uplastycznienia.

Wydaje się, że rozwój metod teoretycznej analizy wyciskania dwuotworowego powinien mieć taką samą kolejność jak w teorii procesów obróbki plastycznej, przebiegających w płaskim stanie odkształcenia i osiowej symetrii, dla których opracowywano na początku wiele konkurencyjnych schematów dopuszczalnego płynięcia plastycznego. Stąd proponowany w pracy kierunek badań procesu wyciskania dwuotworowego jest realizacją takiej koncepcji.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. SZCZEPIŃSKI, *Introduction to the mechanics of plastic forming of metals*, PWN, Warszawa 1979.
2. L. C. DODEJA, W. JOHNSON, *On the multiple hole extrusion of sheets of equal thickness*, J. Mech. and Phys. of Solids, 5, 1957.
3. Л. Г. СТЕПАНСКИЙ, *Расчёты процессов обработки металлов давлением*, Машиностроение, Москва 1979.
4. Г. Я. Гун, *Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением*, Metallurgia, Москва 1983.
5. *Прессование алюминиевых сплавов*, под ред. П. И. Полухина, Metallurgia, Москва 1974.
6. M. KUCHI, H. KISHI, M. ISHIKAWA, *Study on non-symmetric extrusion and drawing*, Metallurgia i Odlewnictwo, 8, 2, 1982.
7. Е. П. Унков, У. Джонсон, В. Л. Колмогоров, *Теория пластических деформаций металлов*, Машиностроение, Москва 1983.
8. И. Л. ПЕРЛИН, Л. Х. РАЙТБЕРГ, *Теория прессования металлов*, Metallurgia, Москва 1975.
9. М. З. ЕРМАНОВ, В. И. ФЕЙГИН, Н. А. СУХОРИКОВ, *Прессование профилей из алюминиевых сплавов*, Metallurgia, Москва 1977.
10. А. Н. МОГУЧИЙ, *Обработка давлением труднодеформируемых материалов*, Машиностроение, Москва 1976.
11. P. ŚLIWA, J. ZASADZIŃSKI, *Wyciskanie metali z wykorzystaniem matryc wielootworowych*, Cz. I i Cz. II, Arch. Hutn., 30, 3, 1985.
12. E. SIEBEL, *The plastic forming of metals*, Steel, 112, April, 193, 1934.
13. A. H. ШАВАИК, E. G. THOMSEN, *Computer aided viscoplasticity solution of some deformation problems*, Proc. Symp. on Foundations of Plasticity, Warsaw 1972.
14. J. PIWNIK, *Teoretyczna analiza kinematyki procesu wyciskania profili złożonych*, Rozpr. Inżyn., 34, 3, 1986.
15. J. PIWNIK, *Modelowanie procesów wyciskania promieniowego*, Materiały XI Sympozium Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, Warszawa, 6-8 września 1984.
16. Ю. Ф. ШЕВАКИН, М. М. ДОРОФЕЕВ, *Многоканальное прессование цилиндрических труб*, Сборник Обработка Легких и Жаропрочных Сплавов, Наука, Москва 1976.
17. И. А. НОРИЦЫН, И. Л. АКАРОВА, В. И. ПЕРФИЛОВ, *Влияние профиля матричной воронки на параметры процесса прямого прессования*, Кузнечно Штамповочное Производство, 12, 1971.
18. J. PIWNIK, *Mechanika procesu wyciskania osiowo-symetrycznego*, Obróbka Plastyczna 34, z. 2, 1985.
19. J. PIWNIK, *Analiza osiowo-symetrycznych procesów obróbki plastycznej*, Prace IPPT PAN, Warszawa 44, 1985.

## РЕЗЮМЕ

KINEMATYKA PROCESU PRAWEGO WYDAWLIWANIA  
CZESZ DWA OTWERTSIA

В работе представлено новое решение для полей скорости в области перехода в пластическое состояние материала, выдавливаемого из цилиндрического контейнера в матрицу с симметрически распределенными круговыми отверстиями. Полученные

формулы для составляющих скорости перемещений точно удовлетворяют всем кинематическим условиям и условию несжимаемости материала. Распределение скорости перемещений и составляющих скорости деформаций непрерывно в целой области пластического течения. Формулы для составляющих скорости перемещений получены, вводя две функции действительных переменных  $\phi_1(r, z, \varphi)$  и  $\phi_2(r, z, \varphi)$ . Представленное решение для полей скорости является расширением концепции функции тока на процессы несимметрического выдавливания. Область пластического течения разделена на две равные, соседствующие струи материала. При этом руководились результатами экспериментальных исследований. Проанализирована возможность использования функционала полной мощности деформаций для оптимизации процесса.

#### SUMMARY

### KINEMATICS OF PARALLEL EXTRUSION THROUGH TWO HOLES

A new solution for the velocity fields is derived for the case of plastic material extruded from a cylindrical container into a die with symmetrically located circular holes. The velocity components satisfy all the kinematic and incompressibility conditions. The displacement and strain rate distributions are continuous in the whole plastic flow region. The displacement rate velocities are obtained by introducing two functions  $\phi_1(r, z, \varphi)$  and  $\phi_2(r, z, \varphi)$ . The velocity field derived represents a generalisation of the stream function concept to the asymmetric extrusion processes. The plastic yielding region is divided into two equal, neighbouring material streams. The form of solution was suggested by experimental results. Possibility of utilizing the full strain power functional in the process optimisation procedure is analyzed.

UNIWERSYTET WARSZAWSKI  
FILIA W BIAŁYMSTOKU  
WYDZIAŁ MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZY, BIAŁYSTOK

*Praca została złożona w Redakcji dnia 2 grudnia 1985 r.*