

MODELOWANIE WZROSTU SZCELINY ZMĘCZENIOWEJ CZEŚĆ II. WZROST SZCELINY PRZY STAŁEJ AMPLITUDZIE OBCIĄŻENIA

WIKTOR GAMBIN (WARSZAWA)

Analizując własności modelu, opisanego w pracy [1], otrzymano wzór na prędkość wzrostu szczeliny da/dN , zarówno w początkowej, jak i końcowej fazie procesu zmęczeniowego. Podano wzory na progową i krytyczną wartość ΔK oraz wzór na ΔK_s , jaką przyjmuje ΔK w punkcie krzywej $\{da/dN; \Delta K\}$, oddzielającym stateczną i niestateczną fazę procesu. Otrzymane zależności pomiędzy ΔK_{th} , ΔK_s oraz ΔK_{cr} pozwoliły wysnuć szereg wniosków dotyczących zachowania się modelu. Wnioski te porównano z doświadczalnymi obserwacjami zachowania się pęknięć zmęczeniowych.

1. WPROWADZENIE

W pracy [1] zaproponowano prosty model strukturalny elementu pękającego pod wpływem obciążeń cyklicznych. Pokazano, że przyrost jednego z dwóch parametrów wewnętrznych $\Delta\alpha_2$ modelu można związać z prędkością wzrostu szczeliny da/dN . W tym celu należy wykorzystać zależność $\Delta\alpha_2$ od amplitudy współczynnika intensywności naprężeń ΔK oraz prawo Parisa

$$(1.1) \quad \frac{da}{dN} = C (\Delta K)^m$$

Zachowanie się modelu pod wpływem monotonicznie rosnącego obciążenia σ , opisane było zależnością tego obciążenia od wartości odkształceń trwałych ε^p .

Odcinkami prostoliniowy wykres $\{\sigma; \varepsilon^p\}$ określony był przez trzy wartości obciążenia: σ_0 , przy której model ulegał uplastycznieniu, σ_t odpowiadającej początkowi wzrostu szczeliny oraz σ_c , przy której model uległ zniszczeniu. Ponadto, określone były nachylenia odcinków krzywej: H_1 opisujące odkształcenia plastyczne bez wzrostu szczeliny oraz H_2 — podczas wzrostu szczeliny (rys. 9 w pracy [1]).

Następnie przyjęto założenie, że graniczna siła wewnętrzna S_2 potrzebna na zapoczątkowanie wzrostu szczeliny, maleje w procesie cyklicznego obciążenia. Okazało się, że powoduje to zmniejszanie się wartości σ_t i σ_c na

każdym cyklu obciążenia. Zjawisko to umożliwi nam obecnie otrzymanie zależności $\{da/dN; \Delta K\}$, opisującej zarówno początek wzrostu jak i zaawansowaną propagację szczeliny zmęczeniowej (rys. 1 w [1]). Podane zostaną wzory na progową i krytyczną wartość ΔK , oznaczone w [1] odpowiednio przez ΔK_{th} oraz ΔK_{cr} . W dalszym ciągu zostanie zbadane położenie punktu przegięcia krzywej $\{da/dN; \Delta K\}$, który pojawia się, jeśli ΔK przyjmuje wartość oznaczoną przez ΔK_s . Punkt ten stanowi przejście od części krzywej opisującej stateczny wzrost szczeliny do części opisującej wzrost niestateczny.

Okaże się, że zachowanie się szczeliny zależy od stosunku $\Delta\sigma$ do σ_{max} oraz że przyłożone naprężenie ściskające stabilizują proces wzrostu szczeliny. Pokażemy, że w przyjętym modelu, spośród wielkości charakteryzujących obciążenie, tylko σ_{max} ma wpływ na progową wartość ΔK_{th} . Powyższe fakty dotyczące zachowania się modelu, porównane zostaną z wnioskami wynikającymi z obserwacji rzeczywistych elementów, które uległy zniszczeniu zmęczeniowemu. Wszystkie zasadnicze wzory podane zostaną zarówno w postaci wymiarowej jak i bezwymiarowej.

We wzorach tych występować będą trzy parametry opisujące zachowanie się modelu w warunkach obciążenia monotonicznego. Będzie to wielkość σ_0 opisująca początek uplastycznienia oraz wielkości opisujące nachylenia odcinków krzywej $\{\sigma; \varepsilon^p\}$ H_1 (przed propagacją szczeliny) i H_2 (podczas propagacji szczeliny). Do opisu początkowego statecznego wzrostu szczeliny wystarczy jeden parametr modelu — wielkość σ_0 .

2. CHARAKTERYSTYCZNE WARTOŚCI ΔK I ZWIĄZANE Z NIMI DŁUGOŚCI SZCELINY

Jak już wspomniano w I części pracy, wzrost szczeliny zmęczeniowej jest możliwy, jeżeli ΔK przekroczy pewną wartość progową ΔK_{th} , którą można określić na drodze doświadczalnej lub uzyskać z przyjętego modelu. W punkcie 4 pokażemy ten drugi sposób. Dla danych wartości $\Delta\sigma$ i ΔK_{th} można obliczyć progową wartość długości szczeliny a_{th} , korzystając ze wzoru

$$(2.1) \quad \Delta K_{th} = \Delta\sigma \sqrt{a_{th} f\left(\frac{a_{th}}{a_1}\right)},$$

gdzie $f\left(\frac{a_{th}}{a_1}\right)$ jest współczynnikiem korygującym ΔK_{th} w zależności od stosunku a_{th} do szerokości elementu a_1 (rys. 5 w pracy [1]).

Oczywiście szczelina może się propagować, jeżeli

$$(2.2) \quad a_{th} \leq a_0.$$

W przeciwnym przypadku mamy do czynienia z tzw. szczeliną „niepropagującą się” (por. np. [2], str. 255). Jeżeli a_{th} jest równe a_0 , to można obserwować krzywą da/dN od początku, jeśli zaś a_{th} jest mniejsze od a_0 ,

to tylko od wartości ΔK odpowiadającej szczelinie o długości a_0 (rys. 1 w [1]).

Proces wzrostu szczeliny kończy się, gdy ΔK osiąga wartość krytyczną ΔK_{cr} . Odpowiadająca jej długość szczeliny a_{cr} jest długością szczeliny na początku ostatniego cyklu poprzedzającego zniszczenie.

Zniszczenie poprzedzone gwałtownym przyspieszeniem propagacji pojawi się, gdy krytyczna długość szczeliny jest mniejsza od grubości pękającego elementu (rys. 5 w [1]):

$$(2.3) \quad a_{cr} < a_1.$$

Podczas ostatniego cyklu σ_c osiąga ustaloną wartość σ_{max} (por. (6.6) w [1]), a związany z nią współczynnik intensywności naprężeń równy jest odporności na pękanie K_c . Można napisać więc

$$(2.4) \quad K_c = \sigma_{max} \sqrt{a_{cr} f\left(\frac{a_{cr}}{a_1}\right)}.$$

Powyższy wzór umożliwia obliczenie krytycznej długości szczeliny a_{cr} . Może się zdarzyć dla odpowiednio małych σ_{max} , że

$$(2.5) \quad a_{cr} > a_1.$$

Wówczas σ_c nie osiąga wartości σ_{max} i mamy do czynienia tylko ze statycznym wzrostem szczeliny.

Dla danej wartości $\Delta\sigma$

$$(2.6) \quad \Delta K_{cr} = \Delta\sigma \sqrt{a_{cr} f\left(\frac{a_{cr}}{a_1}\right)},$$

lub korzystając ze wzoru (2.4)

$$(2.7) \quad \Delta K_{cr} = \frac{\Delta\sigma}{\sigma_{max}} K_c.$$

Ponieważ

$$(2.8) \quad \frac{\Delta\sigma}{\sigma_{max}} \equiv 1 - R,$$

gdzie R jest stosunkiem σ_{min} do σ_{max} , przeto

$$(2.9) \quad \Delta K_{cr} = (1 - R) K_c.$$

Ten sam wynik można otrzymać ze wzoru Formana

$$(2.10) \quad \frac{da}{dN} = \frac{C (\Delta K)^N}{(1 - R) K_c - \Delta K},$$

jeżeli założymy, że da/dN dąży do nieskończoności.

Koniec statecznego wzrostu szczeliny i początek niestatecznego pojawia się, gdy ΔK osiąga wartość ΔK_s . Jeżeli znamy tę wartość, to dla danego $\Delta\sigma$

związana z ΔK_s długość szczeliny a_s może być obliczona ze wzoru

$$(2.11) \quad \Delta K_s = \Delta \sigma \sqrt{a_s f\left(\frac{a_s}{a_1}\right)}$$

W wyniku obliczeń możemy otrzymać jeden z następujących przypadków:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} a_s &\leq a_{th}, \\ a_{th} &< a_s < a_{cr}, \\ a_{cr} &\leq a_s. \end{aligned}$$

Pierwszy z nich oznacza możliwość niestatecznej propagacji szczeliny, natychmiast po osiągnięciu przez ΔK wartości progowej. Drugi przypadek opisuje standardową krzywą pokazaną na rys. 1 w pracy [1]. Trzeci z nich wskazuje na stateczny wzrost szczeliny, aż do zniszczenia.

W punkcie 4 pokażemy jak można określić ΔK_s oraz a_s .

3. ZALEŻNOŚĆ PRĘDKOŚCI WZROSTU SZCELINY OD ΔK

Pokażemy z kolei w jaki sposób można związać przyrost parametru $\Delta \alpha_2$ z prędkością wzrostu szczeliny da/dN . Założymy przy tym zmienność parametru S_2 . Przypomnijmy, że dla danego $\Delta \sigma$ wektor przyrostu sił uogólnionych $\Delta \hat{\alpha}$ oscyluje pomiędzy punktami K i L , pokazanymi na rys. 8 w I części pracy. Analizując ten rysunek możemy obliczyć składowe wektora $\Delta \hat{\alpha}$:

$$(3.1) \quad \Delta \hat{\alpha}_1 = [(A_1 \sigma_{\max} + S_1) - (A_1 \sigma_{\min} + S_1)] - \frac{B_{11}}{B_{12}} \left[\frac{B_{12}}{B_{11}} (A_1 \sigma_{\max} + S_1) - (A_2 \sigma_{\max} - S_2) \right],$$

oraz

$$(3.2) \quad \Delta \hat{\alpha}_2 = [(A_2 \sigma_{\max} - S_2) - (A_2 \sigma_{\min} - S_2)] - \left[\frac{B_{12}}{B_{11}} (A_1 \sigma_{\min} + S_1) - (A_2 \sigma_{\min} - S_2) \right].$$

Ponieważ (por. (2.11) w [1])

$$(3.3) \quad \Delta \hat{\alpha}_2 = \frac{B_{12}}{B_{11}} \Delta \hat{\alpha}_1,$$

więc wzory (3.1)–(3.2) dają

$$(3.4) \quad \Delta \hat{\alpha}_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{B_{11}}{B_{12}} A_2 + A_1 \right) \Delta \sigma + \left(\frac{B_{11}}{B_{12}} A_2 - A_1 \right) \sigma_{sr} - \left(\frac{B_{11}}{B_{12}} S_2 + S_1 \right),$$

gdzie

$$(3.5) \quad \sigma_{\text{sr}} \equiv \frac{1}{2} (\sigma_{\text{max}} + \sigma_{\text{min}}).$$

Ze wzoru (2.13) w [1] mamy

$$(3.6) \quad \Delta \hat{\alpha}_1 = B_{11} \Delta \alpha_1 + B_{12} \Delta \alpha_2.$$

Aby wyznaczyć obie składowe $\Delta \alpha$, a następnie wyrazić $\Delta \alpha_2$ przez ΔK oraz da/dN , należy rozpatrzyć trzy następujące przypadki.

A. Przypadek statecznego wzrostu szczeliny, opisany jako przypadek 2) w punkcie 5 pracy [1]

Ze wzoru (5.20) w [1] mamy

$$(3.7) \quad \Delta \alpha_1 = \frac{\Delta \sigma - 2\sigma_0 - H_2 A_2 \Delta \alpha_2}{H_1 A_1}.$$

Podstawiając (3.7) do (3.6) a następnie do (3.4), otrzymujemy

$$(3.8) \quad \frac{B_{12}^2}{B_{11} A_2} \Delta \alpha_2 + 2\sigma_0 = \Delta \sigma + (\sigma_{\text{min}} + 2\sigma_0 - \sigma_t).$$

B. Przypadek niestatecznego wzrostu szczeliny opisany jako przypadek 3) w punkcie 5 pracy [1]

Mamy wówczas

$$(3.9) \quad \Delta \alpha_1 = 0.$$

Podstawiając (3.9) do (3.6) a następnie do (3.4), otrzymujemy

$$(3.10) \quad \frac{B_{12}^2}{B_{11} A_2} \Delta \alpha_2 + 2\sigma_0 = \Delta \sigma + \frac{\kappa}{\kappa_1} (\sigma_{\text{min}} + 2\sigma_0 - \sigma_t),$$

gdzie κ oraz κ_1 określone wzorami (6.7) w [1].

C. Sytuacja przejściowa, która pojawia się po N_s cyklach obciążenia, gdy długość szczeliny osiąga wartość a_s

Wówczas

$$(3.11) \quad \sigma_t = \sigma_{\text{min}} + 2\sigma_0.$$

Wzory (3.8) oraz (3.10) redukują się do wzoru

$$(3.12) \quad \frac{B_{12}^2}{B_{11} A_2} \Delta \alpha_2 + 2\sigma_0 = \Delta \sigma.$$

Założymy z kolei, że w sytuacji przejściowej da/dN związane jest z zachowaniem się modelu przez prawo Parisa (1.1), które przy ograniczeniu (5.8) w [1] ma postać

$$(3.13) \quad \frac{da}{dN} = C (\Delta K)^2.$$

Podstawiając

$$(3.14) \quad \Delta K = \Delta \sigma \sqrt{af \left(\frac{a}{a_1} \right)},$$

do (3.13), można wyrazić $\Delta \alpha_2$ przez ΔK , a następnie przez da/dN :

$$(3.15) \quad \left. \frac{da}{dN} \right|_{N=N_s} = C \left(\frac{B_{12}^2}{B_{11} A_2} \Delta \alpha_2 \Big|_{N=N_s} \sqrt{a_s f \left(\frac{a_s}{a_1} \right)} + \Delta K_{th} \right)^2,$$

gdzie

$$(3.16) \quad \Delta K_{th} \equiv 2\sigma_0 \sqrt{a_s f \left(\frac{a_s}{a_1} \right)}.$$

Zauważmy, że ΔK_{th} odgrywa rolę progowej wartości ΔK (por. z (2.1)). Wynika to z faktu, że $\Delta \alpha_2$ we wzorze (3.12) przyjmuje wartości dodatnie, jeżeli $\Delta \sigma$ jest większe od $2\sigma_0$.

Wzór (3.15) rozszerzymy na przypadek statecznego i niestatecznego wzrostu szczeliny, przyjmując następującą hipotezę.

HIPOTEZA. Dla całego procesu wzrostu szczeliny

$$(3.17) \quad \frac{da}{dN} = C \left(\frac{B_{12}^2}{B_{11} A_2} \Delta \alpha_2 \sqrt{af \left(\frac{a}{a_1} \right)} + \frac{2\sigma_0}{\Delta \sigma} \Delta K \right)^2,$$

a wielkość ΔK_{th} , określona wzorem (3.16), jest progową wartością ΔK w tym procesie.

Aby otrzymać funkcję $\{da/dN; \Delta K\}$ w jawnej postaci, należy znać σ_t w (3.8) i (3.10), jako funkcję ΔK . W tym celu przyjmujemy następujące kwadratowe przybliżenia funkcji $\sigma_t(\Delta K)$:

a) Dla statecznego wzrostu szczeliny, gdy

$$(3.18) \quad \Delta K_{th} \leq \Delta K \leq \Delta K_s,$$

wźmiemy

$$(3.19) \quad \sigma_t(\Delta K) = p_1 \left(\frac{\Delta K}{\Delta K_s} \right)^2 + p_2 \frac{\Delta K}{\Delta K_s} + p_3,$$

gdzie p_1 , p_2 i p_3 są współczynnikami, które należy obliczyć z warunków (por. (6.5) w [1])

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \sigma_t(\Delta K_{th}) &= \sigma_{max}, \\ \sigma_t(\Delta K_s) &= \sigma_{min} + 2\sigma_0, \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d\sigma_t(\Delta K)}{d(\Delta K)} \right|_{\Delta K = \Delta K_s} = 0.$$

b) Dla niestatecznego wzrostu szczeliny, gdy

$$(3.21) \quad \Delta K_s \leq \Delta K \leq \Delta K_{cr},$$

weźmiemy

$$(3.22) \quad \sigma_t(\Delta K) = q_1 \left(\frac{\Delta K}{\Delta K_s} \right)^2 + q_2 \frac{\Delta K}{\Delta K_s} + q_3,$$

gdzie q_1 , q_2 i q_3 są współczynnikami, które należy obliczyć z warunków (por. (6.5) w [1])

$$(3.23) \quad \left. \frac{d\sigma_t(\Delta K)}{d(\Delta K)} \right|_{\Delta K = \Delta K_s} = 0,$$

$$\sigma_t(\Delta K_s) = \sigma_{\min} + 2\sigma_0,$$

$$\sigma_t(\Delta K_{cr}) = \sigma_{\max} - 2 \frac{\kappa_2}{\kappa} \sigma_0,$$

wielkości κ_2 i κ dane są wzorami (6.9) w [1]. Ostatni z warunków (3.20) i pierwszy z (3.23) zapewniają gładkie połączenie obu części krzywej $\{da/dN; \Delta K\}$ w punkcie ΔK_s , a także styczność tych krzywych do prostej opisanej funkcją, w której σ_t nie zależy od ΔK .

Rozwiązując (3.19)–(3.20) oraz (3.22)–(3.23), otrzymujemy

$$(3.24) \quad p_1 = (\Delta\sigma - 2\sigma_0) \left(\frac{\Delta K_s}{\Delta K_s - \Delta K_{th}} \right)^2,$$

$$p_2 = -2p_1,$$

$$p_3 = p_1 + \sigma_{\min} + 2\sigma_0,$$

oraz

$$(3.25) \quad q_1 = \left(\Delta\sigma - 2 \frac{\kappa_1}{\kappa} \sigma_0 \right) \left(\frac{\Delta K_s}{\Delta K_{cr} - \Delta K_s} \right)^2,$$

$$q_2 = -2q_1,$$

$$q_3 = q_1 + \sigma_{\min} + 2\sigma_0.$$

Podstawiając otrzymane wyniki do (3.8) oraz (3.10), a także korzystając z hipotezy (3.17), otrzymujemy w końcu następujące wyniki:

Dla statecznego wzrostu szczeliny

$$(3.26) \quad \frac{da}{dN} = C (\Delta K)^2 \left[1 - \frac{(\Delta K_s - \Delta K)^2}{\Delta K_s (\Delta K_s - \Delta K_{th})} \right]^2,$$

Dla niestatecznego wzrostu szczeliny

$$(3.27) \quad \frac{da}{dN} = C (\Delta K)^2 \left[1 - \left(\frac{\kappa}{\kappa_1} - \frac{2\sigma_0}{\Delta\sigma} \right) \left(\frac{\Delta K - \Delta K_s}{\Delta K_{cr} - \Delta K_s} \right)^2 \right]^2,$$

gdzie (por. (6.9) w [1])

$$(3.28) \quad \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\gamma}{\gamma+1}, & \kappa_2 &= \frac{1}{\gamma+1}, \\ \kappa &= \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, & \gamma &= \sqrt{\frac{H_1}{H_2}}. \end{aligned}$$

Wzory (3.26)–(3.17) opisują dwie krzywe gładko przechodzące jedna w drugą w punkcie ΔK_s (por. rys. 2 w punkcie 5 niniejszej pracy).

Dla N przyjmującego wartości N_{th} , N_s oraz N_{cr} otrzymujemy odpowiednio

$$(3.29) \quad \begin{aligned} v_{th} &\equiv \left. \frac{da}{dN} \right|_{N=N_{th}} = C \left(\frac{2\sigma_0}{\Delta\sigma} \Delta K_{th} \right)^2, \\ v_s &\equiv \left. \frac{da}{dN} \right|_{N=N_s} = C (\Delta K_s)^2, \\ v_{cr} &= \left. \frac{da}{dN} \right|_{N=N_{cr}} = C \left[\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} + \frac{2\sigma_0}{\Delta\sigma} \right) \Delta K_{cr} \right]^2. \end{aligned}$$

Te same charakterystyczne prędkości propagacji można otrzymać podstawiając (por. (6.5) w [1])

$$(3.30) \quad \begin{aligned} \sigma_t^{N_{th}} &= \sigma_{\max}, \\ \sigma_t^{N_s} &= \sigma_{\min} + 2\sigma_0, \\ \sigma_t^{N_{cr}} &= \sigma_{\max} - 2 \frac{\kappa_2}{\kappa} \sigma_0, \end{aligned}$$

do (3.8) i (3.10), a następnie do (3.17). Zauważmy, że v_{th} jest zawsze mniejsza niż prędkość progowa obliczona na podstawie prawa Parisa (3.13). Ponadto v_{cr} przyjmuje skończoną wartość, która jest zwykle większa niż wartość krytyczna obliczona według (3.13). Jednakże dla $\Delta\sigma$ wielokrotnie większego niż $2\sigma_0$, mamy odwrotną sytuację. Jest to przypadek dużych obciążeń ściskających, który omówimy później. Przypominamy, że v_{cr} wprowadziliśmy jako prędkość propagacji na początku ostatniego kroku poprzedzającego zniszczenie.

Wprowadzając bezwymiarowe wielkości

$$(3.31) \quad \begin{aligned} \Delta \bar{\sigma} &= \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0}, \\ \bar{a} &= \frac{a}{a_1}, \\ \Delta \bar{K} &= \Delta \bar{\sigma} \sqrt{\bar{a} f(\bar{a})}, \end{aligned}$$

wzory (3.26)–(3.27) mogą być napisane w następującej postaci:

$$(3.32) \quad \frac{d\bar{a}}{dN} = \bar{C} (\Delta\bar{K})^2 \left[1 - \frac{(\Delta\bar{K}_s - \Delta\bar{K})^2}{\Delta\bar{K}_s (\Delta\bar{K}_s - \Delta\bar{K}_{th})} \right]^2, \quad \text{dla} \quad \Delta\bar{K} \leq \Delta\bar{K}_s$$

oraz

$$\frac{d\bar{a}}{dN} = \bar{C} (\Delta\bar{K})^2 \left[1 - \left(\frac{\kappa}{\kappa_1} - \frac{2}{\Delta\sigma} \right) \left(\frac{\Delta\bar{K} - \Delta\bar{K}_s}{\Delta\bar{K}_{cr} - \Delta\bar{K}_s} \right)^2 \right]^2, \quad \text{dla} \quad \Delta\bar{K} \geq \Delta\bar{K}_s,$$

gdzie

$$(3.33) \quad \bar{C} \equiv C\sigma_0^2,$$

jest stałą bezwymiarową.

Praktyczne wykorzystanie wzorów (3.26)–(3.27) będzie możliwe po określeniu wartości ΔK_{th} i ΔK_s oraz związanych z nimi długości szczeliny.

4. OKREŚLENIE CHARAKTERYSTYCZNYCH WARTOŚCI ΔK I ZWIĄZANYCH Z NIMI DŁUGOŚCI SZCZELINY ORAZ PROCEDURA OBLICZANIA WARTOŚCI FUNKCJI $a(N)$

W punkcie 2 pokazaliśmy, że (por. (2.6)–(2.7) i (2.9))

$$(4.1) \quad \Delta K_{cr} = (1-R) K_c, \\ \sqrt{a_{cr} f \left(\frac{a_{cr}}{a_1} \right)} = \frac{K_c}{\sigma_{max}}$$

Z rozważań punktu 3 wynika, że (por. (2.1) i (3.16))

$$(4.2) \quad \Delta K_{th} = 2\sigma_0 \sqrt{a_s f \left(\frac{a_s}{a_1} \right)}, \\ \sqrt{a_{th} f \left(\frac{a_{th}}{a_1} \right)} = \frac{2\sigma_0}{\Delta\sigma} \sqrt{a_s f \left(\frac{a_s}{a_1} \right)}.$$

Pozostały do określenia wartości ΔK_s i a_s .

W dalszym ciągu ograniczymy się do rozważenia sytuacji, gdy zniszczenie poprzedzone jest gwałtownym wzrostem prędkości powstawania szczeliny. Takie przypadki dość dobrze opisane są przez wzór Formana (wzór (1.2) w pracy [1]), który przy ograniczeniu (5.9) podanym w [1], ma postać

$$(4.3) \quad \frac{da}{dN} = \frac{C (\Delta K)^3}{(1-R) K_c - \Delta K}$$

Wzór ten wyprowadzono zakładając, że dla K_{max} bliskiego wartości K_c , prędkość wzrostu szczeliny dąży do nieskończoności.

Zwróćmy uwagę, że dla ΔK równego

$$(4.4) \quad \Delta K_s = \frac{1}{2} (1-R) K_c,$$

wzór Formana daje tę samą wartość da/dN co prawo Parisa. Zatem (4.4) możemy uznać za poszukiwany wzór na wartość ΔK_s . Biorąc pod uwagę tożsamość

$$(4.5) \quad \Delta K \equiv (1-R) K_{\max},$$

widzimy, że dla ΔK równego ΔK_s , K_{\max} przyjmuje wartość

$$(4.6) \quad K_{\max}^s = \frac{1}{2} K_c.$$

Biorąc to pod uwagę oraz podstawiając (4.5) do (4.4), a także uwzględniając, że

$$(4.6) \quad K_{\max}^s = \sigma_{\max} \sqrt{a_s f \left(\frac{a_s}{a_1} \right)},$$

otrzymujemy w końcu

$$(4.7) \quad \Delta K_s = \frac{1}{2} \frac{\Delta \sigma}{\sigma_{\max}} K_c,$$

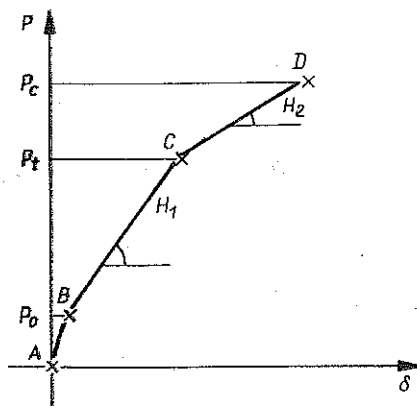
oraz

$$(4.8) \quad \sqrt{a_s f \left(\frac{a_s}{a_1} \right)} = \frac{1}{2} \frac{K_c}{\sigma_{\max}}.$$

W ten sposób wzory opisujące prędkość propagacji szczeliny (3.26)–(3.27) są w pełni określone. Zauważmy, że da/dN zależy nie tylko od ΔK , ale również od $\Delta \sigma$, σ_{\max} oraz kształtu pękającego elementu poprzez parametry H_1 i H_2 . Aby wzory te zastosować w praktyce, wystarczy dysponować wykresem $\{P; \delta\}$ dla rzeczywistego elementu konstrukcyjnego pękającego pod wpływem monotonicznie rosnącego obciążenia zewnętrznego (rys. 1). Na wykresie tym oznaczono przez P_0 siłę, przy której następuje pełne uplastycznienie wierzchołka szczeliny (por. uwagi punktu 3 w I cz. pracy), P_1 — siłę, przy której pojawia się wzrost szczeliny oraz P_0 — siłę, przy której następuje zniszczenie elementu.

Z wykresu tego, analogicznego do podanego na rys. 9 w I części pracy, trzeba będzie określić wartość P_0 (odpowiadającą σ_0) oraz nachylenie odcinków BC i CD przybierające wartości H_1 i H_2 . Do opisu początkowego, statecznego wzrostu szczeliny (wzór (3.26)), wystarczy znajomość wyłącznie jednego parametru wykresu — siły $P_0^{(1)}$.

⁽¹⁾ Wystarczy on również do określenia wzajemnego położenia punktów ΔK_{th} , ΔK_s , ΔK_{cr} , opisujących charakter badanego procesu (por. wnioski następnego punktu pracy).


 Rys. 1. Wykres $\{P; \delta\}$ dla rzeczywistego elementu konstrukcyjnego

Procedura obliczeń długości szczeliny dla danych $\Delta\sigma$ i σ_{\max} jako funkcji liczby cykli jest następująca: 1) Korzystając ze wzoru (6.3) w I części pracy obliczamy N_{th} . 2) Na podstawie (4.1) obliczamy ΔK_{cr} oraz a_{cr} . 3) Ze wzorów (4.7)–(4.8) otrzymujemy ΔK_s oraz a_s . 4) Wzory (4.2) umożliwiają obliczenie ΔK_{th} oraz a_{th} . 5) Dla danej funkcji $f(a/a_1)$ i stałej materiałowej C , rozwiązujemy równania (3.26)–(3.27) przy warunkach początkowych

$$(4.9) \quad \begin{aligned} a|_{N=N_{th}} &= a_{th}, \\ a|_{N=N_s} &= a_s. \end{aligned}$$

Na koniec zauważmy, że z (4.1) i (4.7) wynika interesujący wniosek

$$(4.10) \quad \frac{\Delta K_s}{\Delta K_{cr}} = \frac{\sqrt{a_s f\left(\frac{a_s}{a_1}\right)}}{\sqrt{a_{cr} f\left(\frac{a_{cr}}{a_1}\right)}} = \frac{1}{2}.$$

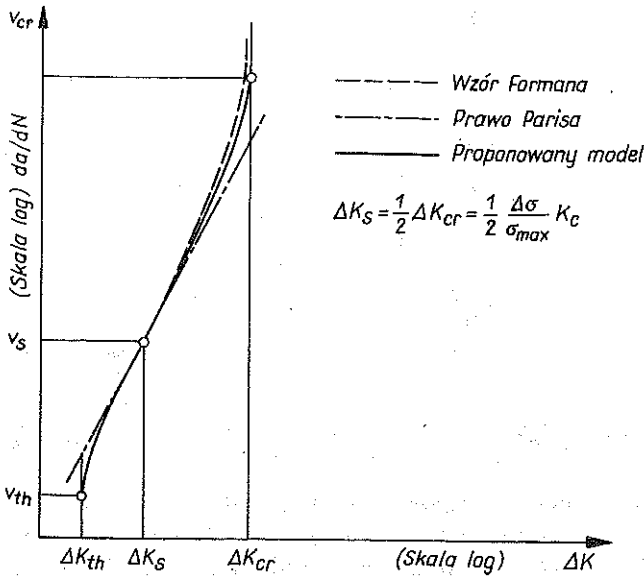
Sugeruje on, że jeżeli zniszczenie poprzedzone jest gwałtownym wzrostem szczeliny, to

$$(4.11) \quad a_{cr} \approx 4a_s.$$

5. Dyskusja wyników

Porównanie otrzymanej krzywej da/dN z wykresami wynikającymi ze wzoru Formana i prawa Parisa, przedstawiono schematycznie na rys. 2.

W fazie przyspieszonego wzrostu szczeliny wynik jest bardzo bliski krzywej proponowanej przez Formana. Wartość krytyczna ΔK jest taka sama



Rys. 2. Porównanie otrzymanego wykresu da/dN ze wzorem Formana i prawem Parisa

w obu przypadkach

$$(5.1) \quad \Delta K_{cr} = (1-R) K_c,$$

ale krytyczna prędkość da/dN w proponowanym modelu przyjmuje wartość skończoną.

Model nasz umożliwia obliczenie progowej wartości ΔK . Podstawiając (4.4) do (4.2) mamy

$$(5.3) \quad \Delta K_{th} = \frac{\sigma_0}{\Delta\sigma} (1-R) K_c.$$

Oznaczając przez

$$(5.4) \quad \Delta K_{th0} \equiv \frac{\sigma_0}{\Delta\sigma} K_c,$$

progową wartość ΔK dla R równego zero, otrzymujemy związek

$$(5.5) \quad \Delta K_{th} = \Delta K_{th0} (1-R),$$

potwierdzony w wielu badaniach doświadczalnych (por. np. [5]). Pisząc (5.5) w postaci

$$(5.6) \quad \Delta K_{th} = \frac{\sigma_0}{\sigma_{max}} K_c,$$

widzimy, że ΔK_{th} jest odwrotnie proporcjonalne do σ_{max} . Zauważmy, że jeżeli początkowa długość szczeliny jest wystarczająco duża, to σ_{max} jest jedyną wielkością charakteryzującą obciążenia, które ma wpływ na ΔK_{th} .

Z (4.4), (4.10) i (5.3) wynika relacja pomiędzy ΔK_{th} , ΔK_s oraz ΔK_{cr} :

$$(5.7) \quad \Delta K_{th} = \frac{2\sigma_0}{\Delta\sigma} \Delta K_s = \frac{\sigma_0}{\Delta\sigma} \Delta K_{cr}.$$

Położenie punktu ΔK_s na osi ΔK ma bardzo istotne znaczenie dla zachowania się szczeliny. Zgodnie z (5.7) wzajemne usytuowanie ΔK_s i ΔK_{cr} jest ustalone

$$(5.8) \quad \Delta K_s = \frac{1}{2} \Delta K_{cr} = \frac{1}{2} \frac{\Delta\sigma}{\sigma_{max}} K_c.$$

Porównując (5.8) z (5.6) widzimy, że charakter procesu wzrostu szczeliny zależy od wartości σ_{max} i stosunku $\Delta\sigma$ do σ_{max} . Jeśli ten ostatni jest duży, to proces jest stateczny prawie do zniszczenia. Sytuacja taka odpowiada przypadkowi B przedstawionemu na rys. 10 w pracy [1].

Przeciwnie, jeśli stosunek $\Delta\sigma$ do σ_{max} jest mały, to wzrost szczeliny jest niestateczny prawie od początku. Sytuacja ta odpowiada przypadkowi C na wspomnianym rysunku.

Powyższe uwagi potwierdzają liczne obserwacje powierzchni elementów powstałych na skutek zniszczenia pod wpływem obciążeń cyklicznych (por. np. [3]). Na takiej powierzchni można wyróżnić obszar zniszczenia zmęczeniowego o gładkiej prążkowanej fakturze oraz obszar końcowego pęknięcia charakteryzujący się fakturą szorstką o ziarnistej lub włóknistej strukturze. Oba te obszary oddzielone są zwykle obszarem przejściowym, o fakturze ze strukturą zdeterminowaną przez gwałtownie rosnącą prędkość propagacji szczeliny.

Stosunek obszaru rzeczywistego zniszczenia zmęczeniowego do pola obszaru końcowego pęknięcia daje pewne pojęcie o przebiegu procesu pęknięcia. Stwierdzono, że jeżeli ten stosunek jest mały, proces od początku przebiega bardzo szybko i wywołany jest wysokim przeciążeniem (dużym σ_{max}). Przeciwnie, duży stosunek pól tych powierzchni odpowiada wzrostowi szczeliny, który przebiega wolno prawie do zniszczenia i jest wywołany przez małe obciążenia rozciągające (małe σ_{max}).

Na koniec uwaga dotycząca wpływu obciążenia ściskającego na proces wzrostu szczeliny. Jeżeli będziemy zmniejszać σ_{min} , to $\Delta\sigma$ będzie wzrastać. Zgodnie ze wzorem (5.7) spowoduje to zwiększanie się odległości pomiędzy ΔK_{th} i ΔK_s na osi ΔK . Oznacza to, że kolejne procesy odpowiadające coraz mniejszym σ_{min} , będą wydłużać się w czasie. Fakt stabilizacji wzrostu szczeliny na skutek przyłożonego obciążenia ściskającego jest również obserwowany w praktyce (por. rys. 4.19 w pracy [3]).

Przedstawiony w niniejszej pracy model wzrostu szczeliny miał na celu przede wszystkim jakościową analizę badanego procesu. Zasadnicze korzyści takiego postępowania uwidocznione będą przy opisie zjawisk zachodzących podczas propagacji szczeliny pod wpływem zmiennej amplitudy obciążeń. Zagadnienie to będzie przedmiotem rozważań osobnej pracy.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. GAMBIN, *Modelowanie wzrostu szczeliny zmęczeniowej. Część I. Model strukturalny elementu pękającego pod wpływem obciążeń cyklicznych*, *Rozpr. Inż.*, 35, 1, 1987.
2. S. KOCANĀDA, *Fatigue failure of metals*, Sijthoff and Nordhoff Intern. Publ., Warsaw 1978.
3. ST. ROLFE, J. M. BARSOM, *Fracture and fatigue control in structures*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1977.

РЕЗЮМЕ

МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА УСТАЛОСТНОЙ ТРЕЩИНЫ
 ЧАСТЬ II. РОСТ ТРЕЩИНЫ ПРИ ПОСТОЯННОЙ АМПЛИТУДЕ НАГРУЗКИ

Анализируя свойства модели описанной в работе [1], получена формула для скорости роста трещины da/dN , так в начальной, как и в заключительной фазах усталостного процесса. Приведены формулы для порогового и критического значений ΔK , а также формула ΔK_s , которую принимает ΔK в точке кривой $\{da/dN; \Delta K\}$, разделяющей устойчивую и неустойчивую фазы процесса. Полученные зависимости между ΔK_{th} , ΔK_s и ΔK_{cr} позволили сделать ряд выводов, касающихся поведения модели. Эти следствия сравнены с экспериментальными наблюдениями поведения усталостных трещин.

SUMMARY

MODELING OF A FATIGUE CRACK GROWTH
 PART II. CRACK GROWTH UNDER CONSTANT LOADING AMPLITUDE

Analysis of the model described in paper [1] yields the formula for crack growth speed da/dN holding true for both the initial and final stages of the fatigue process. The threshold and critical values of ΔK are given as well as the value ΔK_s assumed by ΔK at the point of the curve $\{da/dN; \Delta K\}$ separating the stable and unstable stages of the process. The obtained relations between ΔK_{th} , ΔK_s and ΔK_{cr} allow for drawing certain conclusions concerning the behaviour of the model. The conclusions are then compared with the experimental observations concerning the behaviour of fatigue cracks.

POLSKA AKADEMIA NAUK
 INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 kwietnia 1985 r.