

MODELOWANIE WZROSTU SZCZELINY ZMĘCZENIOWEJ CZĘŚĆ I. MODEL STRUKTURALNY ELEMENTU PĘKAJĄCEGO POD WPLYWEM OBCIĄŻEŃ CYKLICZNYCH

WIKTOR G A M B I N (WARSZAWA)

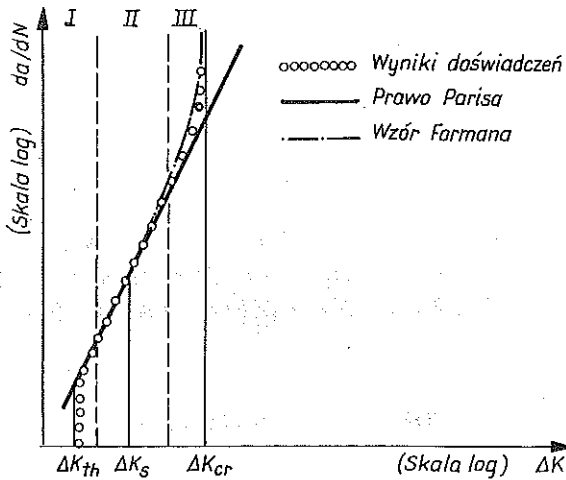
Mając na celu opis wzrostu szczeliny zmęczeniowej, zaproponowano prosty model elementu konstrukcji pękającej pod wpływem obciążeń cyklicznych. Do jego budowy wykorzystano koncepcję dwuelementowych modeli reologicznych opisanych w pracy [8] i zastosowaną do analizy przystosowania się konstrukcji sprężysto-plastycznych [10–12]. Wprowadzono pojęcie modelu strukturalnego i przedstawiono metodę geometryczną umożliwiającą badanie zachowania tego modelu. Podano zespół ograniczeń, jakie muszą spełniać parametry modelu, aby opisywał on proces stacjonarnego, zgodnego z prawem Parisa, wzrostu szczeliny. Następnie zmodyfikowano model tak, aby mógł on opisywać również początek, jak i końcową fazę całego procesu zmęczeniowego wzrostu szczeliny. Omówiono konsekwencje wprowadzonych założeń. Przeprowadzono analizę wymiarową, podając wszystkie zasadnicze wzory, zarówno w postaci wymiarowej jak i bezwymiarowej. Zaproponowano procedurę identyfikacji parametrów modelu w przypadku stacjonarnego wzrostu szczeliny.

1. WPROWADZENIE

Zagadnienie opisu procesu wzrostu szczeliny zmęczeniowej jako całości, jeśli się ma na uwadze zarówno początek jak i końcową fazę tego procesu, pozostaje zagadnieniem otwartym. Celem pracy jest zaproponowanie prostego ale ogólnego modelu zachowania się szczeliny zmęczeniowej.

Podstawowym faktem znanym z doświadczeń jest występowanie zależności pomiędzy prędkością wzrostu szczeliny da/dN , a amplitudą współczynnika intensywności naprężenia ΔK . Jej schematyczny wykres pokazany jest na rys. 1. Przyjęliśmy powszechnie używane oznaczenia: N jest liczbą cykli, a — długością szczeliny, a ΔK — różnicą pomiędzy największym i najmniejszym współczynnikiem intensywności naprężenia K_{\max} i K_{\min} , pojawiającymi się na każdym cyklu.

Patrząc na rys. 1 możemy wyróżnić trzy etapy zmęczeniowego wzrostu szczeliny: 1) inicjacja wzrostu szczeliny (I), 2) zaawansowany wzrost szczeliny z prawie stałą zmianą prędkości wzrostu (II), 3) gwałtowne przyspieszenie wzrostu zakończone zniszczeniem elementu (III).



Rys. 1. Schematyczny wykres zależności $\{da/dN; \Delta K\}$ w przypadku stałej amplitudy obciążenia

Zauważymy, że szczelina rośnie, jeżeli ΔK jest zawarte pomiędzy pewną wartością progową ΔK_{th} , a wartością krytyczną ΔK_{cr} . Dla ΔK przyjmującego wartość ΔK_s na krzywej doświadczalnej pojawia się punkt przegięcia. Punkt ten oddziela część krzywej opisującą stabilny wzrost szczeliny od części opisującej wzrost niestabilny. Wzajemne położenie punktów ΔK_{th} , ΔK_s i ΔK_{cr} na wykresie opisuje charakter procesu i będzie przedmiotem naszych rozważań.

Najlepiej zbadany jest drugi etap rozważanego procesu. W tym przypadku zastosowanie ma prawo Parisa [1]

$$(1.1) \quad \frac{da}{dN} = C (\Delta K)^m,$$

gdzie C oraz m są stałymi materiałowymi. W zastosowaniach praktycznych powyższy związek jest ekstrapolowany na zakres prędkości wzrostu szczeliny znacznie wykraczający poza ramy drugiego etapu. Na skutek tego, współczynnik C oraz wykładnik m nie są stałymi materiałowymi w ścisłym tego słowa znaczeniu, ale zależą od wielu różnych czynników. Brak pełnej informacji o charakterze tych czynników jest przyczyną niezgodności wzoru (1.1) z zasadami analizy wymiarowej. W pracy przedyskutujemy powyższe zagadnienia i zaproponujemy sposób ominięcia wspomnianych trudności.

Do opisu zaawansowanego wzrostu szczeliny (etapy II i III), zamiast wzoru (1.1), często przyjmuje się wzór Formana [2]

$$(1.2) \quad \frac{da}{dN} = \frac{C (\Delta K)^m}{(1-R) K_c - \Delta K}$$

We wzorze (1.2) R jest stosunkiem K_{min} do K_{max} , a K_c krytycznym współ-

czynnikiem intensywności naprężenia, określonym w próbie monotonicznego obciążenia. Wykładnik n dla typowych stopów aluminiowych jest równy 3 (por. [2]).

Opis inicjacji wzrostu szczeliny (etap I) przysparza największej trudności. Brak jest metod określenia zależności prędkości wzrostu od ΔK na tym etapie. Progowa wartość ΔK_{th} zwykle otrzymywana jest na drodze doświadczalnej. Próby zmęczeniowego zniszczenia gładkich próbek umożliwiają znalezienie liczby cykli N_{th} , po której pojawia się szczelina.

Dla niskocyklicznych procesów zmęczenia, jako zależność pomiędzy amplitudą lokalnych odkształceń plastycznych $\Delta \epsilon_{loc}^p$ a N_{th} najczęściej przyjmuje się wzór Mansona–Coffina [3]

$$(1.3) \quad \frac{\Delta \epsilon_{loc}^p}{2} = C_e (2N_{th})^{-b}$$

W powyższym wzorze C_e oraz b są stałymi materiałowymi. Wykładnik b jest bliski wartości 0,5.

Zwróćmy uwagę, że wzór (1.3) otrzymano na drodze analizy lokalnych naprężeń i odkształceń, podczas gdy wzory (1.1) i (1.2) opierają się na wynikach liniowej mechaniki zniszczenia.

W literaturze można znaleźć zaledwie kilka prac [4–7], które badają łącznie początek wzrostu szczeliny i zaawansowaną jej propagację. Celem niniejszej pracy jest zbudowanie prostego, racjonalnego modelu, który uwzględni całą historię obciążenia i związaną z nią reakcję pękającego elementu.

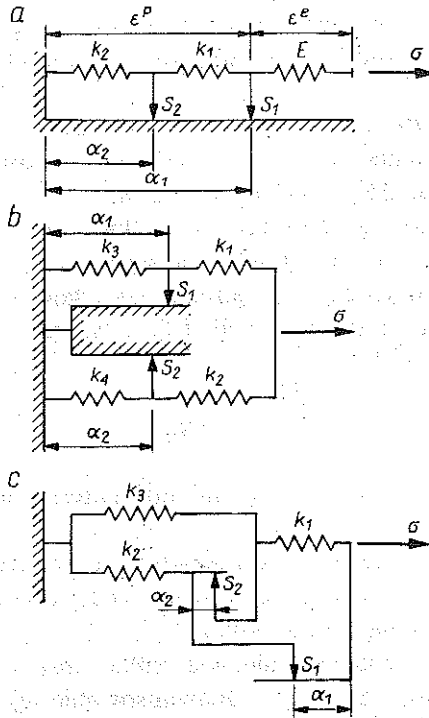
2. DWUELEMENTOWE MODELE STRUKTURALNE

Rozważmy prosty model reologiczny zbudowany z dwóch sztywnych bloków połączonych pewną liczbą sprężyn. Przykłady takich modeli pokazano na rys. 2.

Jeżeli znamy kształt połączeń, graniczne siły tarcia S_1 i S_2 oraz sztywności sprężyn k_1, k_2, \dots, k_n , to możemy znaleźć przemieszczenia bloków α_1 oraz α_2 , spowodowane przyłożonym obciążeniem σ . Zanim siły tarcia σ_1^f i σ_2^f osiągną swe graniczne wartości S_1 oraz S_2 bloki pozostaną nieruchome i tylko niektóre ze sprężyn ulegną wydłużeniu lub skróceniu. Suma sztywności tych sprężyn opisuje sprężyste zachowanie się modelu i oznaczana jest przez E .

Zgodnie z [10–12] siły tarcia mogą być obliczone z warunków równowagi poszczególnych bloków:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma_1^f &= A_1 \sigma - (B_{11} \alpha_1 + B_{12} \alpha_2), \\ \sigma_2^f &= A_2 \sigma - (B_{12} \alpha_1 + B_{22} \alpha_2). \end{aligned}$$



Rys. 2. Przykłady modeli dwuelementowych. a) połączenie szeregowe b) połączenie równoległe, c) połączenie złożone (wg pracy [11])

Stale A_1 , A_2 oraz B_{11} , B_{12} , B_{22} zależą od sposobu połączenia bloków. Ponadto zależą one od sztywności sprężyn k_1, k_2, \dots, k_n .

Tak na przykład, dla szeregowego połączenia elementów mamy

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma_1^f &= \sigma - k_1 (\alpha_1 - \alpha_2), \\ \sigma_2^f &= k_1 (\alpha_2 - \alpha_1) - k_2 \alpha_2. \end{aligned}$$

Zatem w tym przypadku

$$(2.1'') \quad \begin{aligned} A_1 &= 1, & A_2 &= 0, \\ B_{11} &= k_1, & B_{12} &= -k_1, & B_{22} &= k_1 - k_2. \end{aligned}$$

Sily tarcia powinny spełniać ograniczenia

$$(2.2) \quad |\sigma_1^f| \leq S_1, \quad |\sigma_2^f| \leq S_2.$$

Jeżeli przemieszczenia α_1 i α_2 odniesiemy do pewnej charakterystycznej długości, to mogą być one uważane za miary deformacji układu.

Całkowita deformacja może być rozłożona na jej część sprężystą i plastyczną:

$$(2.3) \quad \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p,$$

gdzie

$$(2.4) \quad \varepsilon^e = \frac{\sigma}{E}.$$

Analiza tych dowolnych modeli dwuelementowych daje następujący wynik [10]:

$$(2.5) \quad \varepsilon^p = A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2.$$

Zauważmy, że różne modele mechaniczne opisane przez $n+2$ parametrów $S_1, S_2, k_1, k_2, \dots, k_n$ mogą zachowywać się w ten sam sposób. Wówczas da się je opisać przez te same siedem parametrów: $S_1, S_2, A_1, A_2, B_{11}, B_{12}, B_{22}$. Klasę takich modeli będziemy nazywali dwuelementowym modelem strukturalnym. Postacią analityczną tego modelu jest układ równań i nierówności (2.1)–(2.5). Układ ten może być napisany w postaci

$$(2.6) \quad \sigma^f = \mathbf{A}\sigma - \hat{\alpha}, \quad |\hat{\alpha} - \mathbf{A}\sigma| \leq \mathbf{S},$$

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p, \quad \varepsilon^e = \frac{\sigma}{E}, \quad \varepsilon^p = \mathbf{A}^T \cdot \alpha,$$

gdzie

$$(2.7) \quad \hat{\alpha} \equiv \mathbf{B} \cdot \alpha,$$

oraz

$$(2.8) \quad \sigma^f \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_1^f \\ \sigma_2^f \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A} \equiv \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{S} \equiv \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix},$$

$$\alpha \equiv \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}, \quad \hat{\alpha} \equiv \begin{Bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix}.$$

Wektor α nazywany jest wektorem parametrów wewnętrznych, a $\hat{\alpha}$ jest wektorem sił uogólnionych sprzężonym z α . Macierz \mathbf{B} jest macierzą określoną nieujemnie (osobliwą lub określoną dodatnio) oraz symetryczną.

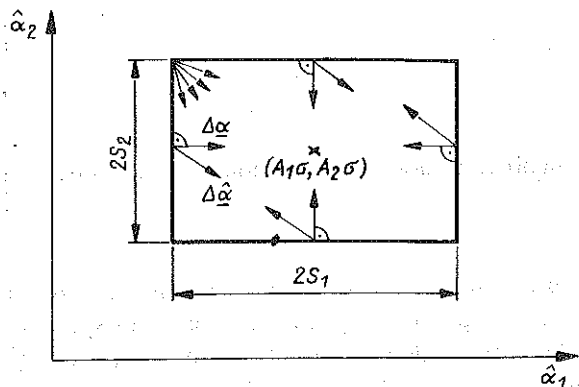
W pracy [8] pokazano, że powyższy model mieści się w formalizmie teorii „materiałów standardowych uogólnionych” [9].

Wielkości σ_1^f mogą być interpretowane jako siły wewnętrzne wywołane obciążeniem zewnętrznym σ .

Ponieważ

$$(2.9) \quad \hat{\alpha}|_{\sigma=0} = -\sigma^f|_{\sigma=0},$$

przeto wektor sił uogólnionych $\hat{\alpha}$ przy braku obciążenia zewnętrznego może być interpretowany jako wektor przeciwny do wektora resztkowych sił tarcia, pozostających po odciążeniu. Nierówności (2.6)₂ na płaszczyźnie $\hat{\alpha}_1$ $\hat{\alpha}_2$ opisują obszar sprężysty $\mathcal{C}_\sigma(\hat{\alpha})$, dla którego $\Delta\alpha_1$ oraz $\Delta\alpha_2$ są równe zeru. Obszar ten jest prostokątem w ośrodku $(A_1\sigma, A_2\sigma)$ i wymiarach $2S_1$ oraz $2S_2$ (rys. 3).



Rys. 3. Przyrosty $\Delta\alpha$ i $\Delta\hat{\alpha}$ na płaszczyźnie $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$

Dla σ zmieniającego się od σ_{\min} do σ_{\max} środek prostokąta przesuwa się wzdłuż linii prostej \mathcal{M} określonej równaniem (rys. 4):

$$(2.10) \quad \hat{\alpha}_2 = \frac{A_2}{A_1} \hat{\alpha}_1.$$

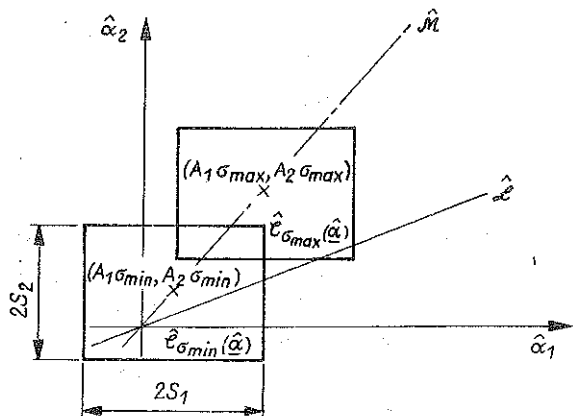
Jeżeli macierz \mathbf{B} jest macierzą osobliwą, to układ równań (2.7) nie może być rozwiązany względem α_1 i α_2 , ponieważ składowe wektora $\hat{\alpha}$ spełniają warunek

$$(2.11) \quad \hat{\alpha}_2 = \frac{B_{12}}{B_{11}} \hat{\alpha}_1.$$

Warunek ten na płaszczyźnie α_1, α_2 jest równaniem prostej \mathcal{L} . Ponadto, ponieważ wyznacznik macierzy \mathbf{B} znika, więc

$$(2.12) \quad B_{22} = \frac{B_{12}^2}{B_{11}}.$$

Ogólnie, podczas procesu obciążania — odciążania, koniec wektory $\hat{\alpha}$ znajduje się wewnątrz obszaru sprężystego, albo na jego brzegu. Ponadto w przypadku osobliwej macierzy \mathbf{B} powinien on pozostawać na linii \mathcal{L} . W tym ostatnim przypadku, znając amplitudę obciążenia zewnętrznego $\Delta\sigma$, można znaleźć przyrosty $\Delta\alpha_1$ oraz $\Delta\alpha_2$. W ogólnym jednak przypadku kierunek przyrostu $\Delta\alpha$ pozostaje nieznany. W celu ominięcia tej trudności przyjmuje się hipotezę „dysypacji normalnej”. Zgodnie z nią przyrost $\Delta\alpha$ jest równoległy do normalnej zewnętrznej brzegu obszaru sprężystego, na płaszczyźnie sił wewnętrznych σ_1^i, σ_2^i . Jeśli obszar sprężysty ma naroże, to $\Delta\alpha$ znajduje się pomiędzy dwiema normalnymi zewnętrznymi, powierzchni tworzących to naroże. Założenie powyższe zostało wprowadzone w teorii „materiałów standardowych uogólnionych”, jako specyfikacja zasady ortogonalności Zieglera [14].


 Rys. 4. Ekstremalne położenie obszaru sprężystego $\mathcal{C}_\sigma(\hat{\alpha})$

Po transformacji obszaru sprężystego na płaszczyźnie α_1, α_2 normalne zewnętrzne przechodzą na wewnętrzne, jak to pokazano na rys. 3.

Narzućcie warunku, że przyrost $\Delta\alpha$ pozostaje w procesie obciążenia prostopadły do boków prostokąta opisującego obszar sprężysty, określa zachowanie modelu strukturalnego. Patrząc na rys. 3 widzimy, że gdy $\Delta\alpha_1$ jest różne od zera, to $\Delta\alpha_2$ znika i odwrotnie: gdy $\Delta\alpha_2$ jest różne od zera, to $\Delta\alpha_1$ znika. Oznacza to, że gdy jeden z mechanizmów niesprężystych jest aktywny, to drugi zostaje zablokowany. Wyjątkiem jest sytuacja, gdy koniec wektora $\Delta\hat{\alpha}$ znajduje się w narożu rozpatrywanego prostokąta. Ponadto powyższy warunek umożliwia obliczenie przyrostu deformacji plastycznej $\Delta\varepsilon^p$.

Istotnie, ponieważ zgodnie z (2.7) mamy

$$(2.13) \quad \Delta\hat{\alpha} = \mathbf{B} \cdot \Delta\alpha,$$

to dla danego $\Delta\sigma$ można obliczyć $\Delta\hat{\alpha}$, następnie $\Delta\alpha$ i w końcu na podstawie (2.6) przyrost deformacji plastycznej $\Delta\varepsilon^p$.

Przyjęta hipoteza umożliwia użycie powyższej procedury również w przypadku osobliwej macierzy \mathbf{B} .

W ten sposób, śledząc drogę przebytą przez koniec wektora $\hat{\alpha}$, można odtworzyć zależność $\{\sigma; \varepsilon^p\}$ dla dowolnej historii przyłożonego obciążenia σ .

W pracach [10–12] podano interesujące zastosowanie dwuelementowych modeli strukturalnych do analizy przystosowania się konstrukcji sprężysto-plastycznych. Przytoczmy najważniejsze wyniki tej analizy.

i) W przypadku nieosobliwej macierzy \mathbf{B} oraz niepustego przecięcia $\mathcal{C}_{\sigma_{\max}}(\hat{\alpha})$ i $\mathcal{C}_{\sigma_{\min}}(\hat{\alpha})$ szerokość pętli histerezy redukuje się do zera. Jest to przypadek „sprężystego przystosowania się” konstrukcji.

ii) W przypadku macierzy nieosobliwej \mathbf{B} oraz pustego przecięcia granicznych obszarów sprężystych, po pewnej liczbie cykli, pojawia się zamknięta

pętla histerezy. Jest to przypadek „plastycznego przystosowania się” konstrukcji.

iii) W przypadku macierzy osobiwej \mathbf{B} koniec wektora $\hat{\alpha}$ pozostaje na linii \mathcal{L} . Jeżeli \mathcal{L} nie ma części wspólnej z jednym z granicznych obszarów sprężystych, to zniszczenie następuje w pierwszym cyklu obciążenia. Jeżeli \mathcal{L} ma część wspólną z obydwooma prostokątami, to otrzymujemy jeden z poprzednich przypadków, albo mamy do czynienia z postępującym zniszczeniem modelu. Ostatni przypadek sugeruje możliwość adaptacji dwuelementowych modeli strukturalnych do opisu zmęczeniowego wzrostu szczeliny.

Na koniec należy wspomnieć, że układ równań i nierówności (2.6)–(2.8), opisujący rozważaną klasę modeli, może by przedstawiony w postaci bezwymiarowej, tak jak to zrobiono w pracy [12].

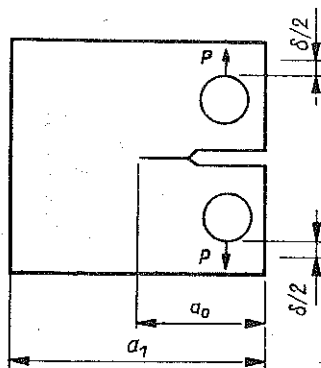
3. MODEL ELEMENTU PĘKAJĄCEGO. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

Model, który chcemy zaproponować, można będzie zastosować do opisu elementów konstrukcji zawierających karby z istniejącą od początku szczeliną. Przyjmijmy, że w chwili początkowej w elemencie nie występują żadne naprężenia resztkowe. Dobrym przykładem takiego elementu jest próbka CT pokazana na rys. 5.

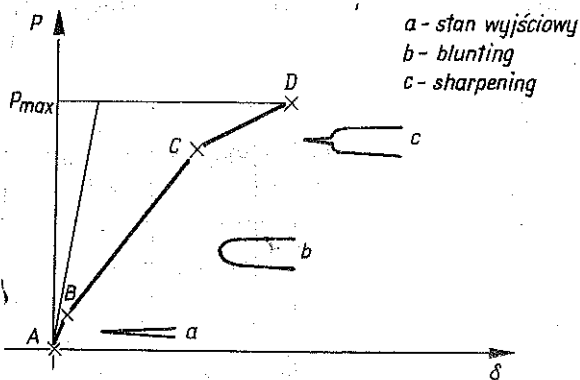
Zanim przejdziemy do opisu zachowania się tej próbki w procesie cyklicznego obciążania, rozważymy jej zachowanie pod wpływem monotonicznego obciążenia. Przyjmijmy, że początkowa długość szczeliny a_0 jest na tyle mała, że możliwa jest rejestracja na wykresie $\{P; \delta\}$ początkowego, statecznego wzrostu szczeliny. Wykres ten przedstawia rys. 6.

W początkowej fazie procesu obciążenia na wykresie pojawia się nieznaczna nieliniowość opisana łukiem AB na rys. 6 (por. rys. 3. 24 w monografii [20]). Nieliniowość ta zwykle jest zaniedbywana, ale w naszych rozważaniach odgrywa istotną rolę. Opisuje ona przejście od próbki czysto sprężystej w punkcie A , do próbki z dobrze uformowaną strefą plastyczną wokół wierzchołka szczeliny w punkcie B . Przyjmujemy, że w tym punkcie ostry początkowo wierzchołek szczeliny uległ całkowitemu zaokrągleniu. Proces tego zaokrąglenia znany jest w literaturze jako tzw. „blunting”. Następnie obserwujemy powstrzymywane plastyczne płynięcie elementu, opisane odcinkiem BC krzywej $\{P; \delta\}$. Ponieważ strefa plastyczna jest bardzo mała, przeto globalne zachowanie elementu jest prawie liniowe. W punkcie C pojawia się zmiana nachylenia krzywej spowodowana wzrostem szczeliny. Rozpoczyna się proces polegający na przejściu od szczeliny zaokrąglonej do szczeliny z ostrym końcem („sharpening”).

Zwróćmy uwagę, że o ile na odcinku BC na całkowite przemieszczenie δ wpływała deformacja sprężysta i plastyczna próbki, to na odcinku CD dochodzi wpływ wzrostu szczeliny. W dalszym ciągu przyjmijmy, że wpływ



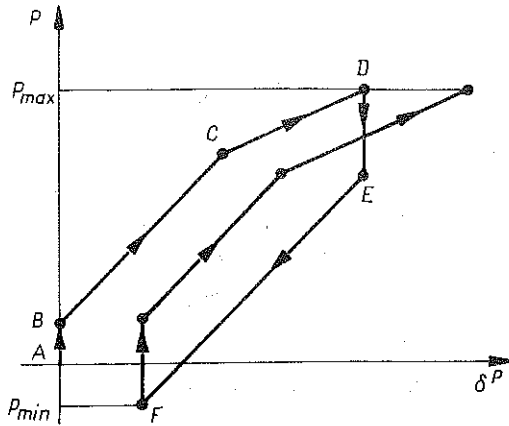
Rys. 5. Standardowa próbka CT



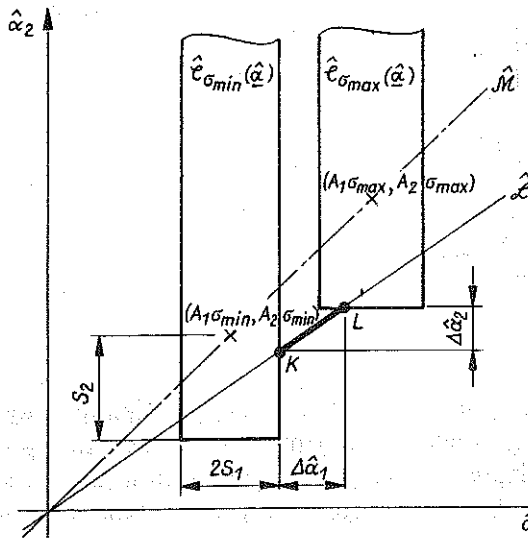
Rys. 6. Wykres $\{P; \delta\}$ dla próbki CT

plastycznej deformacji na odcinku CD jest pomijalnie mały w porównaniu z wpływem wzrostu szczeliny. Umożliwi to modelowanie procesu zmęczenia przez dwa mechanizmy niesprężyste; pierwszy związany tylko z deformacją plastyczną na odcinku BC i drugi związany tylko ze wzrostem szczeliny na odcinku CD .

Rozważając proces odciążania musimy pamiętać, że na skutek wzrostu szczeliny początkowa podatność próbki maleje. Należy też wziąć pod uwagę fakt, że zachowanie próbki podczas procesu odciążania komplikuje się z powodu efektu zamknięcia szczeliny, opisanego w pracy [15]. Jednakże do dalszej analizy wystarczy założenie, że wzmocnienie plastyczne przy obciążeniach ściskających jest opisane odcinkiem linii prostej (np. odcinek EF na rys. 7). Ponadto założymy, że początkowa granica liniowego zachowania się próbki jest taka sama przy ściskaniu jak przy rozciąganiu. Oznaczając przez δ^p tę część przemieszczenia δ , która nie zależy od deformacji sprężystych próbki, do dalszych rozważań przyjmiemy funkcję $\{P; \delta^p\}$ przedstawioną na rys. 7.



Rys. 7. Przyjęty wykres $\{P; \delta^p\}$ dla próbki CT pod obciążeniem cyklicznym.



Rys. 8. Sytuacja na płaszczyźnie $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ dla modelu strukturalnego próbki CT.

Jak już powiedzieliśmy, do opisu cyklicznego obciążenia próbki zastosujemy model strukturalny z dwoma niesprężystymi mechanizmami (2.6)–(2.8). Pierwszy z nich opíše plastyczne zachowanie się próbki poprzedzające wzrost szczeliny (odcinek BC krzywej $\{P; \delta^p\}$). Tworzyć go będzie sztywny blok przenoszący siły tarcia

$$(3.1) \quad -S_1 \leq \sigma_1^f \leq S_1,$$

gdzie siła S_1 odpowiada granicy sprężystego zachowania się modelu pod wpływem monotonicznego obciążenia (punkt B na rys. 8). Drugi mechanizm

opisuje plastyczne zachowanie się próbki podczas wzrostu szczeliny (odcinek CD na rys. 7). Tworzyć go będzie sztywny blok, który przenosi siły tarcia

$$(3.2) \quad \sigma_2^f \leq S_2.$$

Zgodnie z jednostronną nierównością (3.2) drugi blok podczas odciążenia pozostaje nieruchomy.

Siła S_2 odpowiada sile potrzebnej na zapoczątkowanie wzrostu szczeliny w próbie rozciągania próbki CT . W ten sposób drugi parametr wewnętrzny α_2 w układzie (2.6)–(2.8) określa wzrost szczeliny. Wykres $\{\sigma; \varepsilon^p\}$ dla przyjętego modelu jest analogiczny do wykresu $\{P; \delta^p\}$ pokazanego na rys. 7.

Rozważmy zachowanie się opisanego modelu na płaszczyźnie $\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2$ (rys. 8).

Obecnie obszary sprężyste mają postać półnieskończonych pasm. Możemy wyróżnić dwa przypadki.

1. **B jest macierzą nieosobliwą.** Wówczas zgodnie z poprzednim punktem pracy po pewnej skończonej lub nieskończonej liczbie cykli zawsze pojawia się „sprężyste” lub „plastyczne” przystosowanie się modelu. Oznacza to zatrzymanie się wzrostu szczeliny w procesie cyklicznego obciążenia. Tego rodzaju model może służyć do opisu „niepropagujących się” szczelin zmęczeniowych, szczególnie zbadanych przez C. E. PHILLIPSA ([16] str. 20). W niniejszej pracy nie podejmujemy tego tematu.

2. **B jest macierzą osobliwą.** W tym przypadku możliwe jest postępujące zniszczenie modelu, opisujące nieograniczony wzrost szczeliny. Zachodzi to, jeżeli drugi mechanizm jest aktywny na każdym cyklu obciążenia. W przypadku osobliwej macierzy **B** koniec wektora $\hat{\alpha}$ musi pozostawać na prostej $\hat{\mathcal{L}}$. Rozważając wszystkie możliwe wzajemne położenie linii $\hat{\mathcal{N}}$ i $\hat{\mathcal{L}}$ widzimy, że drugi mechanizm może być aktywny, jeżeli nachylenie linii $\hat{\mathcal{L}}$ do osi $\hat{\alpha}_1$ jest mniejsze od nachylenia linii $\hat{\mathcal{N}}$.

Oznacza to, że

$$(3.3) \quad \frac{B_{12}}{B_{11}} < \frac{A_2}{A_1}.$$

Ponadto drugi mechanizm powinien być aktywny tylko podczas obciążenia. Ograniczenie to daje warunek

$$(3.4) \quad \frac{B_{12}}{B_{11}} > 0.$$

Ze wzorów (3.3)–(3.4) wynika, że

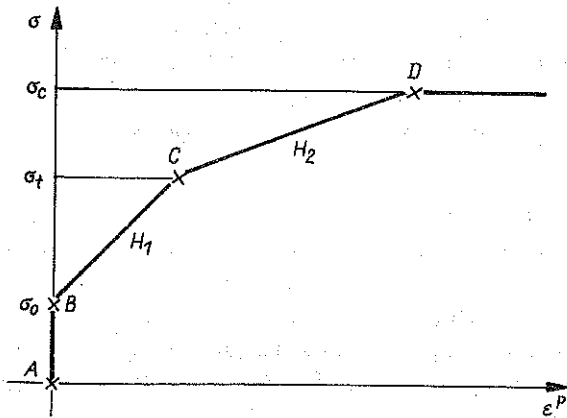
$$(3.5) \quad \frac{A_2}{A_1} > 0.$$

Powyższy przypadek będzie przedmiotem dalszych rozważań.

4. WŁASNOŚCI PRZEDSTAWIONEGO MODELU

Dwuelementowe modele strukturalne poddane ograniczeniom (3.3)–(3.5), zostały opisane szczegółowo w pracy [12]. Przytoczymy zasadnicze wyniki.

Krzywa $\{\sigma; \varepsilon^p\}$ modelu dla próby monotonicznego obciążenia pokazana została na rys. 9.



Rys. 9. Wykres $\{\sigma; \varepsilon^p\}$ rozważanego modelu dla próby monotonicznego obciążenia (wg [12])

Pierwszy mechanizm jest aktywny, jeżeli

$$(4.1) \quad \sigma_0 \leq \sigma < \sigma_t.$$

W (4.1) wprowadziliśmy oznaczenia

$$(4.2) \quad \sigma_0 = \frac{S_1}{A_1},$$

oraz

$$(4.3) \quad \sigma_t = \frac{B_{11} S_2 - B_{12} S_1}{B_{11} A_2 - B_{12} A_1}.$$

Wzór (4.2) otrzymujemy z równań równowagi (2.1) odniesionych do punktu B krzywej $\{P; \delta^p\}$:

$$(4.2) \quad S_1 = A_1 \sigma_0,$$

a wzór (4.3) z równań (2.1) odniesionych do punktu C tej krzywej:

$$(4.3') \quad S_1 = A_1 \sigma_t - B_{11} \alpha_1,$$

$$S_2 = A_2 \sigma_t - B_{12} \alpha_1.$$

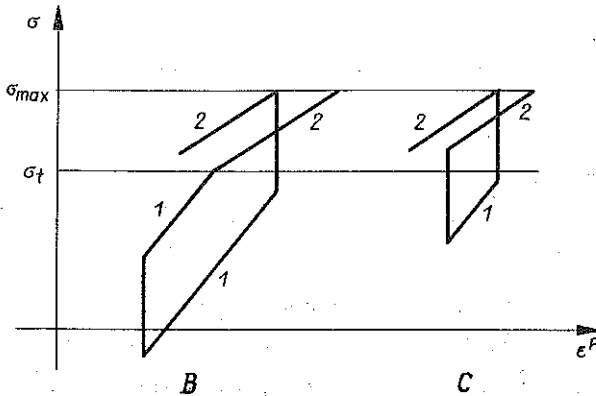
Dla

$$(4.4) \quad \sigma_t \leq \sigma < \sigma_c,$$

gdzie

$$(4.5) \quad \sigma_c = \frac{B_{11} S_2 + B_{12} S_1}{B_{11} A_2 - B_{12} A_1},$$

pierwszy mechanizm jest zablokowany, a drugi staje się aktywny. Wzór (4.5) otrzymujemy z równań równowagi (2.1) odniesionych do punktu D :



Rys. 10. Dwa przypadki postępującego zniszczenia modelu: B — zgodnie z (4.9), C — zgodnie z (4.10); 1 — mechanizm pierwszy, 2 — mechanizm drugi (wg [12])

$$(4.5') \quad \begin{aligned} -S_1 &= A_1 \sigma_c - B_{11} \alpha_1 - B_{12} \alpha_2, \\ S_2 &= A_2 \sigma_c - B_{12} \alpha_1 - B_{22} \alpha_2, \end{aligned}$$

po uwzględnieniu warunku (2.12). Jeśli σ jest równe σ_c , to pojawia się nieograniczone plastyczne płynięcie modelu. Nachylenie odcinków BC i CD są następujące:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} H_1 &= \frac{B_{11}}{A_1^2}, \\ H_2 &= \frac{1}{B_{11}} \left(\frac{B_{12}}{A_2} \right)^2. \end{aligned}$$

Na podstawie (4.6) otrzymujemy stosunek

$$(4.7) \quad \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{B_{12}}{B_{11}} = \sqrt{\frac{H_1}{H_2}},$$

między nachyleniem linii \hat{M} i \hat{L} dla danych H_1 oraz H_2 .

Przypadek postępującego zniszczenia modelu ma miejsce, jeżeli

$$(4.8) \quad \sigma_{\max} > \sigma_t.$$

Podczas obciążenia jeżeli

$$(4.9) \quad \sigma_{\min} < \sigma_t - 2\sigma_0,$$

to oba niesprężyste mechanizmy są kolejno aktywne (przypadek B na rys. 10).

Natomiast jeżeli

$$(4.10) \quad \sigma_{\min} \geq \sigma_t - 2\sigma_0,$$

to aktywny jest tylko drugi mechanizm (przypadek C na rys. 10). Podczas obciążenia w obu przypadkach aktywny jest tylko pierwszy mechanizm.

5. ZAGADNIENIE STACJONARNEGO WZROSTU SZCELINY I MODYFIKACJA MODELU

Załóżmy, że model pracuje w warunkach stałej amplitudy przyłożonych obciążeń:

$$(5.1) \quad \Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}.$$

Dla i -tego cyklu obciążenia — odciażenia, można wprowadzić przyrost współczynnika intensywności naprężenia:

$$(5.2) \quad \Delta K_i = \Delta\sigma \sqrt{a_i f\left(\frac{a_i}{a_1}\right)},$$

gdzie a_i jest długością szczeliny na początku cyklu, a $f\left(\frac{a_i}{a_1}\right)$ jest współczynnikiem korygującym wartość ΔK_i w zależności od stosunku a_i do szerokości elementu a_1 . W dalszym ciągu będziemy pomijać indeks i .

Dla danego $\Delta\sigma$ koniec wektora $\hat{\alpha}$ oscyluje pomiędzy punktami K i L , pokazanymi na rys. 8.

Zakładając, że zachodzi jeden z dwóch przypadków przedstawionych na rys. 10, można obliczyć przyrost tego wektora $\Delta\hat{\alpha}$ dla i -tego półcyklu obciążenia. Z drugiej strony mając na uwadze, że tylko jeden z dwóch mechanizmów aktywizuje się podczas obciążenia, możemy obliczyć $\Delta\alpha$ jako funkcję $\Delta\sigma$.

Dzięki wzorom (2.13) i (5.2), $\Delta\alpha_2$ może być wyrażone przez ΔK . Porównując otrzymany wynik z prawem Parisa (1.1) można ustalić związek pomiędzy przyrostem $\Delta\alpha_2$ a prędkością wzrostu szczeliny da/dN .

Przyjmując do opisu prędkości wzrostu szczeliny klasyczne prawo Parisa (1.1) widzimy, że wymiar stałej C zależy od wartości wykładnika m . Powoduje to pewne trudności w zdefiniowaniu stałej C . W celu uniknięcia tych trudności, napiszemy (1.1) w postaci bezwymiarowej. Wprowadzając unormowane wartości dla

długości szczeliny względem szerokości elementu a_1 ,

$$(5.3) \quad \bar{a} = \frac{a}{a_1},$$

oraz amplitudy obciążenia względem granicy plastyczności materiału σ_y ,

$$(5.4) \quad \Delta\Sigma = \frac{\Delta\sigma}{\sigma_y},$$

możemy zdefiniować bezwymiarowy przyrost współczynnika intensywności naprężenia:

$$(5.5) \quad \Delta \mathcal{K} = \Delta \Sigma \sqrt{af(\bar{a})}.$$

Wówczas prawo Parisa przyjmuje następującą równoważną (1.1), postać bezwymiarową:

$$(5.6) \quad \frac{d\bar{a}}{dN} = \mathcal{C} (\Delta \mathcal{K})^m,$$

gdzie

$$(5.7) \quad \mathcal{C} = C \sigma_y^m a_1^{m/2-1},$$

jest nową stałą bezwymiarową.

Wzór (5.6) jest poprawny w sensie analizy wymiarowej, jeżeli wielkość \mathcal{C} jest rzeczywiście stałą materiałową. Ma to miejsce, gdy \mathcal{C} nie zależy od a_1 , a więc gdy

$$(5.8) \quad m = 2.$$

Powszechnie wiadomo, że średnia wartość wykładnika m wzięta dla szerokiego zakresu prędkości wzrostu jest bliska 4 dla prawie wszystkich materiałów. Tym niemniej, dla drugiego etapu procesu zmęczenia m jest bliskie 2 (por. rys. 9, 10 w [17]). Ponieważ w naszych rozważaniach zastosowanie prawa Parisa będzie ograniczone do tego przypadku, więc możemy przyjąć założenie (5.8). Przyjęcie tego założenia pociąga za sobą warunek

$$(5.9) \quad n = 3,$$

we wzorze Formana (1.2), co jest zgodne z wynikami doświadczeń [2]. W dalszym ciągu przyjmiemy w (5.4)–(5.7) wartość

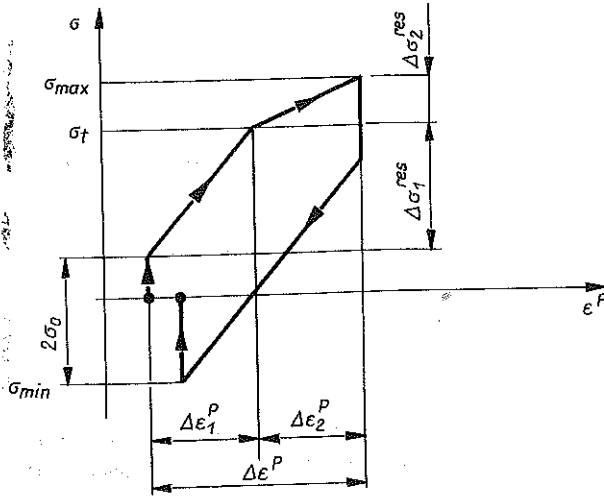
$$(5.10) \quad \sigma_0 = \frac{S_1}{A_1},$$

zamiast σ_y , co w niczym nie zmienia przytoczonego wyżej rozumowania.

Zaproponowany model będzie zachowywał się dokładnie w sposób opisany prawem Parisa. Oznacza to, że może on opisywać tylko proces ustalonego wzrostu szczeliny.

Aby opisać cały proces wzrostu szczeliny w sposób zgodny z krzywą doświadczalną pokazaną na rys. 1, wprowadzimy modyfikację powyższego modelu polegającą na uzmiennieniu niektórych opisujących go parametrów.

Zgodnie z ustaleniami punktu 3 siła graniczna S_2 odpowiada początkowi wzrostu szczeliny w próbie rozciągania. Zakładamy, że przyjęta jako stała w dotychczas rozpatrywanym modelu siła S_2 teraz maleje w trakcie procesu zmęczenia. Analiza zjawiska zmęczenia (por. [18]) sugeruje, że S_2 powinno być malejącą funkcją przyrostu niesprężystej deformacji $\Delta \varepsilon^p$ na rozciągających półcyklach obciążenia. Zgodnie z rys. 11 wzór na $\Delta \varepsilon^p$ może być przedstawiony w postaci



Rys. 11. Podział deformacji niesprężystej podczas rozciągającego półcyklu obciążenia

$$(5.11) \quad \Delta \varepsilon^P = \Delta \varepsilon_1^P + \Delta \varepsilon_2^P,$$

gdzie

$$(5.12) \quad \Delta \varepsilon_1^P = A_1 \Delta \alpha_1,$$

opisuje plastyczną deformację przed początkiem wzrostu szczeliny, natomiast

$$(5.13) \quad \Delta \varepsilon_2^P = A_2 \Delta \alpha_2,$$

opisuje niesprężystą deformację wywołaną wzrostem szczeliny.

Początek wzrostu szczeliny na każdym cyklu obciążenia pojawia się, gdy σ_t osiąga wartość σ_t . Z (4.3) wynika, że wartość ta maleje proporcjonalnie do S_2 , a przyrost jej jest następujący:

$$(5.14) \quad \Delta \sigma_t = \frac{B_{11}}{B_{11} A_2 - B_{12} A_1} \Delta S_2.$$

Rozpatrując położenie σ_t względem σ_{min} i σ_{max} (rys. 11) można wyróżnić trzy fazy procesu zmęczenia.

1. Gdy

$$(5.15) \quad \sigma_t \geq \sigma_{max},$$

aktywny jest tylko pierwszy mechanizm modelu. Akumulacja odkształceń plastycznych powodująca inicjację szczeliny będzie możliwa, jeżeli

$$(5.16) \quad \Delta \sigma \geq 2\sigma_0.$$

Dla każdego cyklu obciążenia otrzymujemy zamkniętą pętlę histerezy, o stałej szerokości $\Delta \varepsilon_1^P$ i stałym przyroście naprężeń resztowych

$$(5.17) \quad \Delta \sigma_1^{res} = H_1 A_1 \Delta \alpha_1 = \Delta \sigma - 2\sigma_0.$$

Jeżeli S_2 maleje, to maleje również σ_t . Gdy S_2 osiąga wartość $S_2^{N_{th}}$, σ_t przyjmuje wartość σ_{max} . Jest to początek wzrostu szczeliny, odpowiadający punktowi ΔK_{th} na rys. 1.

2. Jeśli

$$(5.18) \quad \sigma_{min} + 2\sigma_0 \leq \sigma_t < \sigma_{max},$$

to na początku każdego cyklu pierwszy mechanizm jest aktywny; później jest on blokowany i włącza się drugi mechanizm. Wynikające ze wzrostu szczeliny postępujące zniszczenie będzie możliwe, jeżeli

$$(5.19) \quad \Delta\sigma \geq 2\sigma_0.$$

Dla każdego cyklu obciążenia mamy otwartą pętlę histerezy o rosnącej szerokości i stałym przyroście naprężeń resztkowych

$$(5.20) \quad \Delta\sigma^{res} = H_1 A_1 \Delta\alpha_1 + H_2 A_2 \Delta\alpha_2 = \Delta\sigma - 2\sigma_0.$$

Zauważmy, że ponieważ $\Delta\sigma$ jest ustalone, przeto $\Delta\alpha_1$ może być wyrażone przez $\Delta\alpha_2$. Rozważana sytuacja odpowiada przypadkowi B na rys. 10 i może opisywać stateczny wzrost szczeliny.

Jeśli S_2 osiąga wartość S_2^N , to σ_t przyjmuje wartość $\sigma_{min} + 2\sigma_0$. Jest to koniec statecznego wzrostu szczeliny odpowiadający punktowi ΔK_s na rys. 1. Punktowi temu przypiszemy zachowanie się modelu opisane prawem Parisa. Wówczas $\Delta\alpha_1$ jest równe zero, a

$$(5.21) \quad \Delta\alpha_2 = \frac{\Delta\sigma - 2\sigma_0}{H_2 A_2},$$

3. Jeśli

$$(5.22) \quad \sigma_t < \sigma_{min} + 2\sigma_0,$$

to aktywny jest tylko drugi mechanizm. Wzrost szczeliny jest możliwy również dla $\Delta\sigma$ mniejszego niż $2\sigma_0$, ale nierówność

$$(5.23) \quad \sigma_t < \sigma_{max},$$

powinna być spełniona. Dla każdego cyklu obciążenia otrzymujemy otwartą pętlę histerezy o rosnącej szerokości $\Delta\epsilon_2^R$ i malejącym przyroście naprężeń resztkowych

$$(5.24) \quad \Delta\sigma_2^{res} = H_2 A_2 \Delta\alpha_2 = \sigma_{max} - \sigma_t.$$

Faza ta odpowiada przypadkowi C na rys. 10 i opisuje niestateczny wzrost szczeliny zakończony dla ΔK równego ΔK_{cr} , jak to pokazano na rys. 1.

Reasumując można powiedzieć, że proces wzrostu szczeliny zmęczeniowej zawiera fazy 2) i 3) całego procesu zmęczenia. Dla fazy 2) mamy

$$(5.25) \quad \Delta K_{th} \leq \Delta K \leq \Delta K_s,$$

a dla fazy 3)

$$(5.26) \quad \Delta K_s \leq \Delta K \leq \Delta K_{cr}.$$

W ten sposób wyodrębniliśmy dwa etapy wzrostu szczeliny: stateczny i niestateczny. Udział poszczególnych etapów w całym procesie zależy od położenia punktu ΔK_s (rys. 1).

Można oczekiwać, że dla pewnych elementów konstrukcyjnych i obciążeń ΔK_s będzie bliskie ΔK_{th} (proces będzie wówczas niestateczny od początku), a dla innych ΔK_s będzie bliskie ΔK_{cr} (proces będzie wtedy stateczny prawie aż do zniszczenia). Zatem położenie ΔK_s ma istotne znaczenie dla praktyki inżynierskiej. Lokalizacja punktu ΔK_s na wykresie $\{da/dN; \Delta K\}$ stanowi treść rozważań II części pracy.

6. KONSEKWENCJE WPROWADZONYCH ZAŁOŻEŃ

Faza 1) procesu zmęczenia, dyskutowana w poprzednim punkcie, opisuje sytuację poprzedzającą początek wzrostu szczeliny. Szczelina rusza z miejsca po N_{th} cyklach obciążenia. Do określenia N_{th} skorzystamy ze wzoru Mansona-Coffina (1.3)

$$(6.1) \quad \Delta \varepsilon_1^p = p \Delta \varepsilon_{loc}^p = 2pC_e (2N_{th})^{-b},$$

gdzie p jest stosunkiem przyrostu globalnych odkształceń plastycznych $\Delta \varepsilon_1^p$ do przyrostu lokalnych odkształceń plastycznych $\Delta \varepsilon_{loc}^p$. Wielkość ta może być obliczona metodą zaproponowaną przez Neubergera [19].

Na podstawie (5.12) i (5.17) mamy

$$(6.2) \quad \Delta \varepsilon_1^p = \frac{\Delta \sigma - 2\sigma_0}{H_1}.$$

Podstawiając (6.2) do (6.1), otrzymujemy

$$(6.3) \quad N_{th} = 2^{1/b-1} \left(\frac{pC_e H_1}{\Delta \sigma - 2\sigma_0} \right)^{1/b}.$$

Zauważmy, że N_{th} jest proporcjonalne do pewnej funkcji malejącej bliskiej $(\Delta \sigma - 2\sigma_0)^{-2}$.

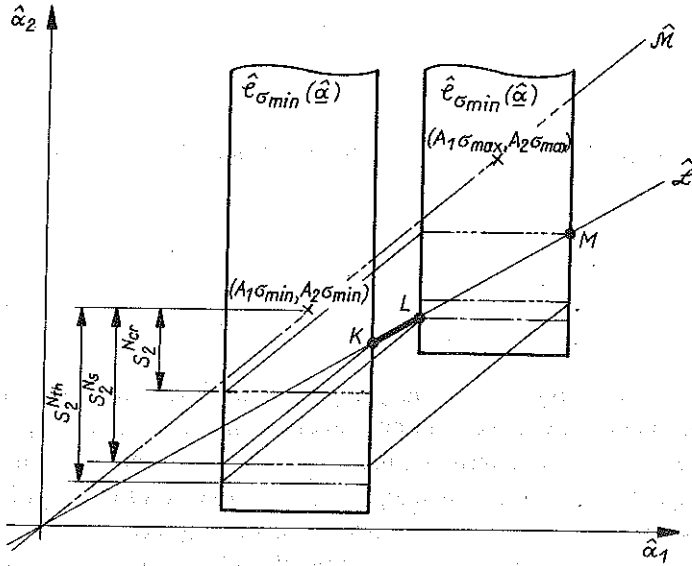
Fazy 2) i 3) kończą się odpowiednio po N_s oraz N_{cr} cyklach obciążenia. Poszukajmy wartości $S_2^{N_{th}}$, $S_2^{N_s}$ i $S_2^{N_{cr}}$ odpowiadających N_{th} , N_s oraz N_{cr} cykлом obciążenia. Patrząc na rys. 12 widzimy, że S_2 przyjmuje wartości następujące: i) $S_2^{N_{th}}$, gdy dolny brzeg obszaru $\mathcal{C}_{\sigma_{max}}(\hat{\alpha})$ osiąga punkt L ; ii) $S_2^{N_s}$, gdy dolny brzeg obszaru $\mathcal{C}_{\sigma_{min}}(\hat{\alpha})$ osiąga punkt K oraz iii) $S_2^{N_{cr}}$, gdy dolny brzeg obszaru $\mathcal{C}_{\sigma_{max}}(\hat{\alpha})$ osiąga punkt M .

Na podstawie prostych rozważań geometrycznych znajdziemy

$$S_2^{N_{th}} = A_2 \sigma_{max} - (A_1 \sigma_{max} - S_1) \frac{B_{12}}{B_{11}},$$

$$(6.4) \quad S_2^{N_s} = A_2 \sigma_{\min} - (A_1 \sigma_{\min} + S_2) \frac{B_{12}}{B_{11}} + 2S_1 \frac{A_2}{A_1},$$

$$S_2^{N_{cr}} = A_2 \sigma_{\max} - (A_1 \sigma_{\max} + S_1) \frac{B_{12}}{B_{11}}.$$


 Rys. 12. Zmiana S_2 podczas procesu wzrostu szczeliny

Odpowiednie wartości $\sigma_t^{N_{th}}$, $\sigma_t^{N_s}$, $\sigma_t^{N_{cr}}$ oraz $\sigma_c^{N_{th}}$, $\sigma_c^{N_s}$, $\sigma_c^{N_{cr}}$ otrzymujemy podstawiając (6.4) do (4.3) i (4.5), co daje następujące wzory:

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \sigma_t^{N_{th}} &= \sigma_{\max}, \\ \sigma_t^{N_s} &= \sigma_{\min} + 2\sigma_0, \\ \sigma_t^{N_{cr}} &= \sigma_{\max} - 2 \frac{\kappa_2}{\kappa} \sigma_0; \\ \sigma_c^{N_{th}} &= \sigma_{\max} + 2 \frac{\kappa_2}{\kappa} \sigma_0, \end{aligned}$$

$$(6.6) \quad \begin{aligned} \sigma_c^{N_s} &= \sigma_{\min} + 2 \frac{\kappa_1}{\kappa} \sigma_0, \\ \sigma_c^{N_{cr}} &= \sigma_{\max}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\kappa_1 = \frac{B_{11} A_2}{B_{11} A_2 + B_{12} A_1},$$

$$(6.7) \quad \kappa_2 = \frac{B_{12} A_1}{B_{11} A_2 + B_{12} A_1},$$

$$\kappa = \kappa_1 - \kappa_2.$$

Zauważmy, że

$$(6.8) \quad \kappa_1 + \kappa_2 = 1,$$

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{B_{12}}{B_{11}}.$$

Biorąc pod uwagę (4.7), wzory (6.7) można przedstawić w postaci

$$(6.9) \quad \kappa_1 = \frac{\gamma}{\gamma+1}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{\gamma+1},$$

$$\kappa = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad \gamma \equiv \sqrt{\frac{H_1}{H_2}}.$$

Przedstawione wyżej wyniki dotyczące zachowania się zmodyfikowanego przez uzmiennienie stałej S_2 modelu strukturalnego, umożliwią pełny opis całego procesu wzrostu szczeliny zmęczeniowej. Opis ten pozwoli na otrzymanie funkcji $\{da/dN; \Delta K\}$ bliskiej krzywej doświadczalnej pokazanej na rys. 1. Pozwoli też na analizę czynników wpływających na stabilizację lub destabilizację procesu propagacji szczeliny. Wyniki te przedstawimy w części II pracy.

7. IDENTYFIKACJA MODELU

Zachowanie się modelu zależy od pięciu stałych parametrów: A_1 , A_2 , S_1 , B_{11} , B_{12} oraz jednej zmiennej S_2 . Identyfikacja modelu ze zmienną wielkością S_2 jest bardzo skomplikowana. Jednakże dla szerokiego zakresu zmienności da/dN obserwuje się stacjonarne zachowanie się szczelin (etap II na rys. 1). Odpowiada to przypadkowi, gdy S_2 jest stałe. Możemy zatem przypadek ten przyjąć w pierwszym przybliżeniu za podstawę procedury identyfikacyjnej.

Jak to pokazano w punkcie 2, zachowanie się modelu nie zależy od parametru A_1 . Można założyć

$$(7.1) \quad A_1 = 1.$$

Ten model opisuje pięć parametrów A_2 , S_1 , S_2 , B_{11} oraz B_{12} . Na podstawie funkcji $\{P; \delta^p\}$ dla rzeczywistego elementu konstrukcyjnego, utożsamionej z funkcją $\{\sigma; \varepsilon^p\}$ przedstawioną na rys. 9, mamy H_1 , H_2 , σ_0 , σ_t oraz σ_c zdefiniowane przez parametry modelu za pomocą wzorów (4.6), (4.2)–(4.3) i (4.5):

$$\begin{aligned}
 H_1 &= B_{11}, \\
 H_2 &= \frac{1}{B_{11}} \left(\frac{B_{12}}{A_2} \right)^2, \\
 \sigma_0 &= S_1, \\
 \sigma_t &= \frac{B_{11} S_2 - B_{12} S_1}{B_{11} A_2 - B_{12}}, \\
 \sigma_c &= \frac{B_{11} S_2 + B_{12} S_1}{B_{11} A_2 - B_{12}}.
 \end{aligned}
 \tag{7.2}$$

Odwracając powyższe wzory względem A_2 , S_1 , S_2 , B_{11} oraz B_{12} otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \frac{2\sigma_0 \sqrt{H_1 H_2}}{(H_1 - \sqrt{H_1 H_2}) (\sigma_c - \sigma_t)}, \\
 S_1 &= \sigma_0, \\
 S_2 &= \frac{(\sqrt{H_1 H_2} - H_2) (\sigma_c + \sigma_t)}{(H_1 - \sqrt{H_1 H_2}) (\sigma_c - \sigma_t)} \sigma_0, \\
 B_{11} &= H_1, \\
 B_{12} &= \frac{2\sigma_0 H_1 H_2}{(H_1 - \sqrt{H_1 H_2}) (\sigma_c - \sigma_t)}.
 \end{aligned}
 \tag{7.3}$$

Zauważmy, że wszystkie parametry modelu są dodatnie i spełniają podstawowy warunek (3.3).

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. P. C. PARIS, F. ERDOGAN, *A critical analysis of crack propagation laws*, J. Basic Eng., Trans. ASME, **85**, 4, 1963.
2. R. G. FORMAN, V. E. KEARNEY, R. M. ENGLE, *Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures*, J. Basic Eng., Trans. ASME, **89**, 3, 1967.
3. S. S. MANSON, M. H. HIRSCHBERG, *Fatigue behaviour in strain cycling in the low — and intermediate — cycle range. Fatigue — an interdisciplinary approach*, Syracuse University Press, 1964.
4. D. F. SOCIE, J. D. MORROW, W. C. CHEN, *A procedure for estimating the total fatigue of notched and cracked members*, Eng. Fract. Mech., **11**, 4, 1979.
5. N. E. DOWLING, *Notched member fatigue life prediction combining crack initiation and propagation*, Fatigue of Eng. Materials and Struct. The Internat. J., **2**, 2, 1979.
6. W. C. CHEN, F. V. LAVRENCE, *Joining of fatigue crack initiation and propagation*, Technical Report, Univ. of Illinois, 1980.
7. G. GLINKA, *Powstawanie i wzrost pęknięć zmęczeniowych*, Prace Nauk. Politech. Warsz., Mechanika, **75**, 1981.

8. J. ZARKA, *Sur un structure élastoplastique formée d'un matériau à écrouissage cinématique et soumise à un chargement périodique*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, 286, serie B, p. 65, 1978.
9. B. HALPHEN, Q. S. NGUYEN, *Sur les matériaux standards generalises*, J. de Mécanique, 14, 1, 1975.
10. J. ZARKA, *Sur l'étude du comportement global des matériaux soumis à un chargement cyclique*, J. de Mécanique. Appl., 3, 3, 1979.
11. J. ZARKA, J. J. ENGEL, G. INGLEBERT, *On a simplified inelastic analysis of structures*, Nucl. Eng. and Design, 57, 333-368, 1980.
12. J. ZARKA, J. J. ENGEL, *Sur les comportements rheologiques a deux patins undimensionnels*, Ecole Polytechnique, Raport EDF 80002/3.10, Decembre 1980.
13. W. GAMBIN, *Modelowanie wzrostu szczeliny zmęczeniowej, Część II, Propagacja szczeliny przy stałej amplitudzie obciążenia*.
14. H. ZIEGLER, *Some extremum principle in irreversible thermodynamics with application to continuum mechanics*, Progress in Solid Mechanics, 4, North Holland Pub., Amsterdam 1983.
15. W. ELBER, *Fatigue crack closure under cyclic tension*, Eng. Fract. Mech., 2, 1, 1970.
16. *Colloquium on fatigue*, IUTAM, Stockholm 1955, Springer, Berlin 1956.
17. J. F. KNOTT, *Fundamentals of fracture mechanics*, Butterworths, London 1973.
18. S. KOCANĀ, *Fatigue failure of metals*, Sijthoff and Nordhoff International Publ., Warszawa 1978.
19. H. NEUBER, *Theory of stress concentration for shear-strained prismatic bodies with arbitrary nonlinear stress-strain law*, J. Appl. Mech., 28, 4, 1961.
20. S. T. ROLFE, J. M. BARSOM, *Fracture and fatigue control in structures*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.

РЕЗЮМЕ

**МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА УСТАЛОСТНОЙ ТРЕЩИНЫ
ЧАСТЬ I. СТРУКТУРНАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕМЕНТА РАЗРУШАЕМОГО ПОД
ВЛИЯНИЕМ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЗОК**

Имея целью описание роста усталостной трещины предложена простая модель элемента разрушаемой конструкции под влиянием циклических нагрузок. Для ее построения использована концепция двухэлементных реологических моделей, описанных в работе [8], и применена для анализа приспособления упруго-пластических конструкций [10-12]. Введено понятие структурной модели и представлен геометрический метод, дающий возможность исследовать поведение этой модели. Приведено множество ограничений, которому должны удовлетворять параметры модели, чтобы она описывала стационарный процесс, согласно закону Париса роста трещины. Затем модель модифицирована так, чтобы она могла описывать так начало, как и заключительную фазу целого усталостного процесса роста трещины. Обсуждены следствия введенных предположений. Проведен размерный анализ, приводя все основные формулы, так в размерной форме, как и безразмерном виде. Предложена процедура идентификации параметров модели в случае стационарного роста трещины.

SUMMARY

**MODELLING OF A FATIGUE CRACK GROWTH
PART. I. STRUCTURAL MODEL OF AN ELEMENT SUBJECT TO FRACTURE
UNDER CYCLIC LOADING**

Having in mind the description of the fatigue crack growth process, a simple model is proposed simulating fracture of a structural element subject cyclic loading. The model is based upon the concept of two-element rheological models described in paper [8] and applied to the shakedown analysis of elastic-plastic structure [10-12]. The notion of a structural model is introduced and the geometrical method of analysis of its behaviour is proposed. The conditions to be satisfied by the model parameters are given, under which the model is capable of simulating the stationary crack growth process in accordance with the Paris law. The model is then modified to enable the description of the initial and final stages of the fatigue crack growth process. Dimensional analysis of the results is given, all the formulae being written in the dimensional and dimensionless form. The identification procedure of the model parameters is proposed in the case of stationary crack growth.

**POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI**

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 kwietnia 1985 r.
