

## WPLYW MAŁYCH DRGAŃ SKRĘTNYCH CZOPA NA NOŚNOŚĆ ŁOŻYSKA POPRZECZNEGO, SMAROWANEGO CIECZĄ NIENEWTONOWSKĄ

MAREK MIKSA (KIELCE)

W pracy rozważono przypadek harmoniczných drgań skrętnych czopa ślizgowego łożyska poprzecznego nałożonych na ruch ustalony czopa. Analizę przeprowadzono dla przypadku, gdy amplituda i częstość drgań są na tyle małe, że człony inercyjne w równaniach ruchu można zaniedbać, a także dla przypadku, w którym uwzględniono zlinearyzowane człony bezwładności w tych równaniach. W obydwu przypadkach wykazano, że siła nośna poprzecznego łożyska z cieczą newtonowską nie zmienia się. Jeśli czynnikiem smarującym jest ciecz opisywana modelem cieczy drugiego rzędu, to w pierwszym przypadku siła nośna wzrasta, natomiast w drugim, uwzględniającym wpływ siły bezwładności, siła nośna maleje lub wzrasta w zależności od częstości dodatkowych drgań. Przyczyną zmian siły nośnej łożyska jest występowanie składowej siły równoległej do momośrodu.

### 1. WSTĘP

Wpływ małych drgań harmoniczných nałożonych na przepływ podstawowy, tj. na kinematyczne i dynamiczne parametry charakteryzujące dany przepływ, takie jak średnia prędkość, wydatek, średnia siła nośna itp., był tematem wielu analiz. Ich krótki przegląd można znaleźć w pracy S. ZAHORSKIEGO [1]. W pracy tej określono również zmianę siły nośnej, wywołaną dodatkowymi drganiami nałożonymi na ruch płaskiego suwaka.

Niniejsze opracowanie stanowi rozszerzenie wyników prac S. ZAHORSKIEGO [1 i 2] na przypadek łożyska poprzecznego, a także wykorzystuje rezultaty zawarte w publikacjach [3 i 4].

Przyjmujemy, że czop łożyska poddany jest działaniu dodatkowych, harmoniczných drgań skrętnych, panewka natomiast pozostaje nieruchoma. Z sytuacją taką spotykamy się w praktyce smarowania, ponieważ w rzeczywistości wał maszyny zawsze porusza się nierównomiernie. Zbadamy wpływ dodatkowych drgań na zmianę siły nośnej łożyska. Analizę przeprowadzimy dla przypadku, gdy amplituda i częstość drgań są na tyle małe, że człony inercyjne w równaniach ruchu można zaniedbać, a także dla przypadku, w którym uwzględniono zlinearyzowane człony bezwładności w tych rów-

nianiach. Ten drugi przypadek ma miejsce, gdy dodatkowe drgania charakteryzują się wysoką „częstotliwościową” liczbą Reynoldsa  $Re_\omega$ , czyli są drganiami o małej amplitudzie i dużej częstotliwości. Częstotliwościową liczbę Reynoldsa definiujemy następująco:

$$(1.1) \quad Re_\omega = \frac{\rho \omega h^2}{\eta},$$

gdzie  $\rho$  oznacza gęstość,  $\omega$  częstotliwość dodatkowych drgań skłębnych czopa,  $h$  grubość warstwy smarującej,  $\eta$  dynamiczny współczynnik lepkości cieczy smarującej.

Jak wykażemy niżej, zmianę siły nośnej łożyska wywołuje efekt naprężeń normalnych, związany z nienewtonowską cieczą smarującą.

W analizie zagadnienia posłużymy się metodą perturbacyjną WALTERSA [5], zastosowaną w pracach [1, 2, 3, 4]. Traktując łożysko jako nieskończenie długie (bez wpływów bocznych) mamy do czynienia z płaskim zagadnieniem przepływu.

## 2. GEOMETRIA ŁOŻYSKA

Geometria łożyska przedstawiona jest na Rys. 1, gdzie oznaczono:  $e$  – mimośród łożyska (bezwzględny),  $R_1$  – promień panewki,  $R_2$  – promień czopa, punkt  $O$  – środek panewki, punkt  $C$  – środek czopa.

Przybliżoną zależność grubości warstwy smarującej  $h$  w funkcji kąta  $\theta$  otrzymamy w postaci (por. [6]):

$$(2.1) \quad h = c (1 + \varepsilon \cos \theta),$$

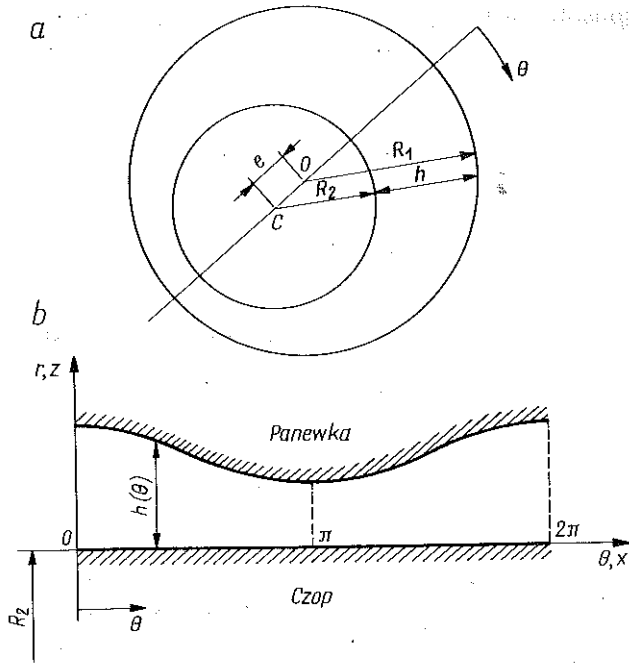
gdzie  $c = R_1 - R_2$  jest luzem promieniowym łożyska, a  $\varepsilon = e/c$  mimośrodem względnym.

## 3. PRZEPLÝW CIECZY NEWTONOWSKIEJ W ŁOŻYSKU

### 3.1. Założenia upraszczające i równania ruchu

Zagadnienie przepływu cieczy newtonowskiej w ślizgowym łożysku poprzecznym stanowi podstawę teorii smarowania. Reynolds w końcu XIX stulecia, a następnie inni autorzy uzyskiwali równania ruchu dla cieczy smarującej z równań Naviera–Stokesa, dokonując odpowiednich uproszczeń.

W biegunowym układzie współrzędnych  $(r, \theta)$  równanie Naviera–Stokesa dla przepływu płaskiego ma postać:



Rys. 1. Geometria łożyska: a) naturalna (przybliżona), b) w rozwinięciu

$$(3.1) \quad \varrho \left( V_{\theta,t} + V_r V_{\theta,r} + \frac{V_\theta}{r} V_{\theta,\theta} + \frac{1}{r} V_r V_\theta \right) = \\ = \mu \left\{ \left[ \frac{1}{r} (r V_\theta)_{,r} \right]_{,r} + \frac{1}{r^2} V_{\theta,\theta\theta} + \frac{2}{r^2} V_{r,\theta} \right\} - \frac{1}{r} p_{,\theta},$$

$$(3.2) \quad \varrho \left( V_{r,t} + V_r V_{r,r} + \frac{1}{r} V_{r,\theta} - \frac{1}{r} V_\theta^2 \right) = \\ = \mu \left[ \left( \frac{1}{r} V_{r,r} \right)_{,r} + \frac{1}{r^2} V_{r,\theta\theta} - \frac{2}{r^2} V_{\theta,\theta} \right] - p_{,r},$$

gdzie przecinek oznacza pochodną cząstkową po zmiennej stojącej za nim,  $\varrho$  — gęstość,  $\mu$  — dynamiczny współczynnik lepkości,  $t$  — czas, a  $p$  — ciśnienie.

W powyższych równaniach dokonamy uproszczeń zgodnych z założeniami klasycznej teorii smarowania (por. [6, 7]), wyróżniając ponadto dwa przypadki: pierwszy, gdy siły bezwładności są pomijalnie małe i drugi, gdy uwzględniamy zlinearyzowane człony bezwładności. Z przypadkiem pierwszym mamy do czynienia wówczas, gdy przepływ charakteryzuje się małą liczbą Reynoldsa i małą częstotliwościową liczbą Reynoldsa. W przypadku drugim ograniczamy się do drgań o dużej „częstotliwościowej” liczbie Reynoldsa (por. [1, 2]).

W ten sposób równania (3.1) i (3.2) redukują się do postaci:

$$(3.3) \quad \mu \frac{\partial^2 u_N}{\partial r^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial p_N}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial p_N}{\partial r} = 0,$$

dla pierwszego przypadku oraz

$$(3.4) \quad \mu \frac{\partial^2 u_N}{\partial r^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial p_N}{\partial \theta} = \rho \frac{\partial u_N}{\partial t}, \quad \frac{\partial p_N}{\partial r} = 0,$$

dla przypadku drugiego.

W powyższych równaniach  $u_N$  i  $p_N$  oznaczają odpowiednio prędkość obwodową i ciśnienie cieczy smarującej, ponadto przyjęto, że w cienkiej warstwie smarującej  $r \simeq R_1 \simeq R_2 \simeq R$ .

### 3.2. Rozkład prędkości i ciśnienia dla ustalonego ruchu czopa (przypadek bez sił inercji)

Rozpatrzmy przypadek, gdy czop łożyska porusza się równomiernie z prędkością  $U$ , panewka natomiast pozostaje nieruchoma.

Po wprowadzeniu nowych zmiennych określonych zależnościami  $x = R \cdot \theta$ ,  $r = R + z$  (por. Rys. 1b) równanie Naviera–Stokesa (3.3) przyjmie postać

$$(3.5) \quad \frac{\partial p_N}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u_N}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial p_N}{\partial z} = 0.$$

Całkowanie tych równań (por. [6, 7]) przy uwzględnieniu warunków brzegowych dla prędkości:

$$(3.6) \quad u_N|_{z=0} = U, \quad u_N|_{z=h} = 0,$$

oraz warunków Sommerfelda dla ciśnienia:

$$(3.7) \quad p_N|_{\theta=0} = 0, \quad p_N|_{\theta=2\pi} = 0,$$

prowadzi do następujących wyników:

$$(3.8) \quad u_N = U \left( 1 - \frac{z}{h} \right) + \frac{1}{2\mu} \frac{dp_N}{dx} z(z-h),$$

$$(3.9) \quad \frac{dp_N}{d\theta} = \frac{6U\mu R}{c^2} \left[ \frac{1}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} + \frac{1-\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2/2)(1+\varepsilon \cos \theta)^3} \right],$$

$$(3.10) \quad p_N = \frac{6U\mu R \varepsilon \sin \theta (2+\varepsilon \cos \theta)}{c^2 (2+\varepsilon^2) (1+\varepsilon \cos \theta)^2}.$$

### 3.3. Rozkład prędkości i ciśnienia z uwzględnieniem dodatkowych drgań skrętnych (przypadek bez sił inercji)

W rozpatrywanym przypadku czop łożyska poddany jest dodatkowym skrętnym drganiom harmonicznym o małej amplitudzie. Częstość tych drgań jest stała i wynosi  $\omega$ . Warunki brzegowe (3.6) przyjmują postać

$$(3.11) \quad u_N^{\omega}|_{z=0} = U + \epsilon U \exp i\omega t, \quad u_N^{\omega}|_{z=h} = 0.$$

W powyższych wzorach  $\epsilon$  jest małym parametrem charakteryzującym amplitudę drgań,  $u_N^{\omega}$  — prędkością cieczy wzdłuż osi  $x$  (por. Rys. 1b) przy dodatkowych drganiach skrętnych. Rozkładu prędkości  $u_N^{\omega}$  i analogicznie zdefiniowego ciśnienia  $p_N^{\omega}$  poszukujemy w formie szeregów (por. [5]):

$$(3.12) \quad u_N^{\omega} = u_N + \epsilon u_{N1} \exp i\omega t + \epsilon^2 (u_{N2} + \bar{u}_{N2} \exp i\omega t + \bar{\bar{u}}_{N2} \exp 2i\omega t) + \dots,$$

$$(3.13) \quad p_N^{\omega} = p_N + \epsilon p_{N1} \exp i\omega t + \epsilon^2 (p_{N2} + \bar{p}_{N2} \exp i\omega t + \bar{\bar{p}}_{N2} \exp 2i\omega t) + \dots$$

Amplitudy drgań  $u_{N1}$ ,  $u_{N2}$ ,  $\bar{u}_{N2}$ ,  $\bar{\bar{u}}_{N2}$ ,  $p_{N1}$ ,  $p_{N2}$ ,  $\bar{p}_{N2}$ ,  $\bar{\bar{p}}_{N2}$  występujące we wzorach (3.12) i (3.13) mogą być wielkościami zespolonymi. Fizyczny sens mają tylko ich części rzeczywiste zależne od warunków początkowych.

Po podstawieniu wyrażeń (3.12) i (3.13) do równań ruchu (3.5), ograniczeniu się do efektów drugiego rzędu i porównaniu członów występujących przy  $\epsilon^n$  ( $n = 0, 1, 2$ ) otrzymamy:

dla  $n = 0$  (jest to rozpatrzony w p. 3.2. ruch ustalony)

$$(3.14) \quad \frac{\partial p_N}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u_N}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial p_N}{\partial z} = 0,$$

dla  $n = 1$

$$(3.15) \quad \frac{\partial p_{N1}}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u_{N1}}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial p_{N1}}{\partial z} = 0,$$

dla  $n = 2$

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p_{N2}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_{N2}}{\partial x} \exp i\omega t + \frac{\partial \bar{\bar{p}}_{N2}}{\partial x} \exp 2i\omega t = \\ = \mu \left( \frac{\partial^2 u_{N2}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_{N2}}{\partial z^2} \exp i\omega t + \frac{\partial^2 \bar{\bar{u}}_{N2}}{\partial z^2} \exp 2i\omega t \right), \\ \frac{\partial p_{N2}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{p}_{N2}}{\partial z} \exp i\omega t + \frac{\partial \bar{\bar{p}}_{N2}}{\partial z} \exp 2i\omega t = 0. \end{aligned}$$

Układ równań (3.14) jest identyczny z równaniami (3.5). Z postaci warunków brzegowych (3.11) wynika, że dla  $n = 0$  warunki te są identyczne

z warunkami (3.6). Zachowując w mocy warunki Sommerfelda dla ciśnienia otrzymamy rozwiązanie dane wzorami (3.8), (3.9) i (3.10).

Układ równań (3.15) ma formalnie tę samą postać co układ (3.14). Z warunków brzegowych (3.11) wynika, że

$$(3.17) \quad u_{N1}|_{z=0} = U, \quad u_{N1}|_{z=h} = 0,$$

przyjmując ponadto, że

$$(3.18) \quad p_{N1}|_{\theta=0} = p_{N1}|_{\theta=2\pi} = 0,$$

otrzymamy rozwiązanie dla  $u_{N1}$  i  $p_{N1}$  jak dla  $u_N$  i  $p_N$ .

Rozwiązanie równań (3.16) z warunkami brzegowymi dla amplitud prędkości i ciśnienia w postaci

$$(3.19) \quad u_{N2}|_{z=0} = u_{N2}|_{z=h} = \bar{u}_{N2}|_{z=0} = \bar{u}_{N2}|_{z=h} = \bar{\bar{u}}_{N2}|_{z=0} = \bar{\bar{u}}_{N2}|_{z=h} = 0,$$

$$(3.20) \quad p_{N2}|_{\theta=0} = p_{N2}|_{\theta=2\pi} = \bar{p}_{N2}|_{\theta=0} = \bar{p}_{N2}|_{\theta=2\pi} = \bar{\bar{p}}_{N2}|_{\theta=0} = \bar{\bar{p}}_{N2}|_{\theta=2\pi} = 0,$$

daje zerowe wartości tych amplitud (por. [3]).

### 3.4. Rozkład prędkości i ciśnienia z uwzględnieniem dodatkowych drgań skrętnych czopa (przypadek uwzględniający siły inercji)

3.4.1. Określenie prędkości. Rozpatrzmy przypadek, gdy czop łożyska poddany jest dodatkowym skrętnym drganiom harmonicznym o dużej częstotliwości i stosunkowo małej amplitudzie, czyli drganiom o dużej „częstotliwościowej” liczbie Reynoldsa.

Poszukując rozkładu prędkości  $u_N^{\omega}$  i ciśnienia  $p_N^{\omega}$  przewidujemy ich postać w formie (por. [2, 4]):

$$(3.21) \quad u_N^{\omega} = u_N + \epsilon u_{N1} \exp i\omega t,$$

$$(3.22) \quad p_N^{\omega} = p_N + \epsilon p_{N1} \exp i\omega t.$$

Po podstawieniu powyższych wyrażeń do równania ruchu (3.4) i porównaniu członów występujących przy  $\epsilon^n$  ( $n = 0, 1$ ) otrzymujemy:

$$(3.23) \quad \mu \left( \frac{\partial^2 u_N}{\partial r^2} + \epsilon \frac{\partial^2 u_{N1}}{\partial r^2} \exp i\omega t \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial p_N}{\partial \theta} - \epsilon \frac{1}{R} \frac{\partial p_{N1}}{\partial \theta} \exp i\omega t = \\ = \rho \left( \frac{\partial u_N}{\partial t} + \epsilon i\omega u_{N1} \exp i\omega t \right);$$

dla  $n = 0$

$$(3.24) \quad \mu \frac{\partial^2 u_N}{\partial r^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial p_N}{\partial \theta} = \rho \frac{\partial u_N}{\partial t},$$

uwzględniając jednak, że  $\partial u_N / \partial t = 0$ , mamy

$$(3.25) \quad \mu \frac{\partial^2 u_N}{\partial r^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial p_N}{\partial \theta} = 0,$$

dla  $n = 1$

$$(3.26) \quad \mu \frac{\partial^2 u_{N1}}{\partial r^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial p_{N1}}{\partial \theta} = i \rho \omega u_{N1}.$$

Do równań (3.23)–(3.26) dołączamy warunki brzegowe. Dla ciśnienia będą to warunki Sommerfelda:

$$(3.27) \quad p_N|_{\theta=0} = p_N|_{\theta=2\pi} = 0, \quad p_{N1}|_{\theta=0} = p_{N1}|_{\theta=2\pi} = 0,$$

natomiast warunki brzegowe dla prędkości są identyczne z warunkami (3.11).

Rozwiązanie równania (3.25) dla  $n = 0$  jest znane. Jest to przypadek ustalonego ruchu czopa z warunkami brzegowymi (3.6) dla prędkości i (3.7) dla ciśnienia. Odpowiednie wartości dla  $u_N$ ,  $dp_N/d\theta$  oraz  $p_N$  podają zależności (3.8), (3.9), (3.10).

Rozwiązanie równania (3.26) ma postać

$$(3.28) \quad u_{N1} = A \cos h(kz) + B \sin h(kz) + \frac{i}{\rho \omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta},$$

gdzie  $A$ ,  $B$  są stałymi całkowania, natomiast  $k$  określone jest związkem

$$(3.29) \quad k^2 = \frac{i \rho \omega}{\eta},$$

gdzie  $\eta$  oznacza dynamiczny współczynnik lepkości.

Z definicji (3.29) określającej współczynnik  $k$  wynika, że istnieją dwie jego wartości, a mianowicie

$$(3.30) \quad k_1 = v + iv, \quad k_2 = -v - iv,$$

gdzie

$$(3.31) \quad v = \sqrt{\frac{\rho \omega}{2\eta}}.$$

Nie precyzując chwilowo wartości  $k$ , wykorzystanie warunków brzegowych dla prędkości  $u_{N1}$  identycznych z warunkami (3.17) prowadzi do następujących wyrażeń na stałe  $A$  i  $B$ :

$$(3.32) \quad A = U - \frac{i}{\rho \omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta},$$

$$(3.33) \quad B = - \left( U - \frac{i}{\rho\omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} \right) \operatorname{ctg} h(kh) - \frac{1}{\sin h(kh)} \frac{i}{\rho\omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta}.$$

W dalszych obliczeniach przyjmujemy, że częstość dodatkowych drgań skrętnych czopa jest na tyle duża, że  $vh \gg 1$ . Założenie to prowadzić będzie do znacznych uproszczeń zależności (3.28), (3.32), (3.33). Tak więc dla  $vh \gg 1$  i  $k = k_1$  otrzymujemy  $\sinh(k_1 h) \simeq \frac{1}{2} \exp(k_1 h)$ ,  $\cosh(k_1 h) \simeq \frac{1}{2} \exp(k_1 h)$ ,  $\operatorname{ctgh}(k_1 h) \simeq \operatorname{tgh}(k_1 h) \simeq 1$ .

Wprowadzając do analizy jeszcze jedno ograniczenie, a mianowicie, że ciśnienie  $p_{N1}$  jest rzeczywistą funkcją kąta  $\theta$ , tzn.  $\operatorname{Im}(dp_{N1}/d\theta) = 0$ , a pochodna  $|dp_{N1}/d\theta|$  jest co najwyżej rzędu  $\rho U \omega R$ , tj.

$$(3.34) \quad \left| \frac{dp_{N1}}{d\theta} \right| = 0 (\rho U \omega R),$$

otrzymujemy ostatecznie następujące zależności:

dla stałych całkowania  $A$  i  $B$

$$(3.35) \quad B = -A = -U + i \frac{dp_{N1}}{d\theta} \frac{1}{\rho\omega R},$$

i dla rozkładu  $u_{N1}$  prędkości w warstwie smarującej

$$(3.36) \quad u_{N1} = \left( U - \frac{i}{\rho\omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} \right) e^{-k_1 z} + \frac{i}{\rho\omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta}.$$

Można łatwo wykazać, że dla  $k = k_2$  otrzymamy identyczny z (3.36) rozkład prędkości  $u_{N1}$ . W dalszej części pracy ograniczymy się więc tylko do przypadku  $k_1 = v + iv = k$ .

3.4.2. Określenie „ciśnienia dodatkowego”  $p_{N1}$ . Oznaczmy wydatek przypadający na jednostkę szerokości łożyska w kierunku osi  $x$  przez  $q$ . Warunek ciągłości wymaga, aby  $dq/d\theta = 0$ , a zatem  $q = \text{const}$ . Wydatek ten obliczymy następująco:

$$(3.37) \quad q = \int_0^h u_{N1} dz,$$

a po podstawieniu rozwiązania (3.36) i scałkowaniu

$$(3.38) \quad q = \frac{U}{k} + \frac{i}{\rho\omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} \frac{1+kh}{k} \approx \frac{U}{k} + \frac{i}{\rho\omega R} h \frac{dp_{N1}}{d\theta}.$$

W równaniu (3.38) przyjęto, że dla  $vh \gg 1$ ,  $1+kh \simeq kh$ .



Przyrównując do zera pochodną po zmiennej  $\theta$  wyrażenia (3.38) określającego wydatek  $q$ , otrzymamy równanie różniczkowe w postaci

$$(3.39) \quad \frac{d^2 p_{N1}}{d\theta^2} + \frac{1}{h} \frac{dh}{d\theta} \frac{dp_{N1}}{d\theta} = 0,$$

a po scałkowaniu (por. [8]):

$$(3.40) \quad \frac{dp_{N1}}{d\theta} = \frac{C_1}{c(1 + \varepsilon \cos \theta)},$$

$$(3.41) \quad p_{N1} = \delta \frac{C_1}{c} \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} \arccos \frac{\varepsilon + \cos \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} + C_2,$$

$$\delta = \begin{cases} 1, & \sin \theta \geq 0, \\ -1, & \sin \theta < 0. \end{cases}$$

Warunki brzegowe Sommerfelda (3.27)<sub>2</sub> mogą być spełnione przez równanie (3.41) nie wystarczają jednak na określenie stałych  $C_1$  i  $C_2$ . W szczególności, jak wykaże to późniejsza analiza, potrzebna będzie znajomość stałej  $C_1$ . Aby ją znaleźć zażądamy ścisłego spełnienia kinematycznych warunków brzegowych (3.11), a dokładniej wynikających z nich warunków (3.17).

Łatwo można się przekonać, że na brzegu panewki tzn. dla  $z = h$ , warunek (3.17)<sub>2</sub> jest spełniony przez prędkość  $u$  daną zależnością (3.36) tylko w przybliżeniu, ściśle natomiast na powierzchni czopa. Dochodzimy w ten sposób do postulatu, aby

$$(3.42) \quad \operatorname{Re} u_{N1}|_{z=h} = 0.$$

Wykorzystanie powyższego warunku w równaniu (3.36) daje

$$(3.43) \quad \frac{dp_{N1}}{d\theta} = \varrho U \omega R \operatorname{ctg} \nu h.$$

Porównanie wyników (3.40) i (3.43) pozwala stwierdzić, że

$$(3.44) \quad C_1 = c(1 + \varepsilon \cos \theta) \varrho U \omega R \operatorname{ctg}(\nu h).$$

Wielkość  $C_1$  określiliśmy wcześniej jako stałą całkowania niezależną od kąta  $\theta$ . Z postaci powyższego wzoru wynika, że jest ona funkcją tego kąta. Przyczyną tej rozbieżności jest przyjęcie założenia upraszczającego  $\nu h \gg 1$ . Przybliżenie funkcji  $\operatorname{ctg} \nu h$  za pomocą pierwszego wyrazu szeregu Taylora pozwala jednak, ponownie wielkość  $C_1$  nazwać stałą, co pokaże poniższa analiza.

Wzór (3.44) pozwala wnosić, że możemy wyróżnić dwa zakresy zmienności argumentu  $\nu h$ , w których stała  $C_1$  zachowuje znak, mianowicie:

zakres I  $C_1 > 0$  dla  $n\pi < vh < \pi/2 + n\pi$ ,  
 zakres II  $C_1 < 0$  dla  $\pi/2 + n\pi < vh < \pi + n\pi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$   
 Z rozwinięcia  $\text{ctg } vh$  w szereg Taylora wynika:  
 dla zakresu I

$$(3.45) \quad \text{ctg } vh = \frac{1}{(vh)_{\text{obl}}}, \quad C_1 = \frac{1}{v} \rho U \omega R,$$

$$\frac{dp_{N1}}{d\theta} = \frac{\rho U \omega R}{vc (1 + \varepsilon \cos \theta)},$$

gdzie  $(vh)_{\text{obl}} = vh - n\pi$ ;  
 dla zakresu II

$$(3.46) \quad \text{ctg } vh = -\frac{1}{(vh)_{\text{obl}}}, \quad C_1 = -\frac{1}{v} \rho U \omega R,$$

$$\frac{dp_{N1}}{d\theta} = -\frac{\rho U \omega R}{vc (1 + \varepsilon \cos \theta)},$$

gdzie  $(vh)_{\text{obl}} = n\pi - vh$ .

W dalszej części pracy dla prostoty zapisu będziemy opuszczać indeks „obl” pisząc  $vh$  zamiast  $(vh)_{\text{obl}}$ , pamiętając jednocześnie o tym, że parametr ten przybiera wartości obliczeniowe zgodne z powyższymi definicjami.

### 3.5. Siła nośna łożyska

3.5.1. *Definicja siły nośnej.* Występowanie w trakcie pracy łożyska bezwymiarowego mimośrod  $\varepsilon$  wiąże się z wytworzeniem nierównomiernego i w pewnych strefach większego od otoczenia ciśnienia.

Siłą nośną łożyska nazywamy siłę zewnętrzną na jednostkę długości łożyska jaką może zrównoważać wypadkowa elementarnych sił pochodzących od ciśnienia panującego w warstwie smarującej. Składowe siły nośnej obliczymy według wzorów

$$(3.47) \quad X_{ON} = \int_0^{2\pi} p_N R \cos \theta d\theta,$$

$$(3.48) \quad Z_{ON} = \int_0^{2\pi} p_N R \sin \theta d\theta.$$

W myśl oznaczeń na Rys. 1, składowa  $X_{ON}$  ma kierunek odcinka  $OC$ , natomiast składowa  $Z_{ON}$  jest do niego prostopadła. Powyższe wzory stosować będziemy dla przypadku równomiernych obrotów czopa łożyska.

Jeśli jednak czop poddany jest dodatkowym skrętnym drganiom harmonicznym o małej amplitudzie i częstości drgań  $\omega$ , rozkład ciśnienia  $p_N^0$

w warstwie smarującej składa się z dwóch części: stałej  $p_N$  i okresowo zmiennej  $p_{N1} \exp(i\omega t)$  (por. wzory (3.13), (3.22)). Z uwagi na występowanie w części harmonicznego dodatkowego parametru — czasu  $t$ , zachodzi konieczność uśrednienia ciśnienia  $p_N^\omega$  w wybranym przedziale czasu, np. w okresie jednego cyklu. Dochodzimy w ten sposób do definicji składowych siły nośnej

$$(3.49) \quad X_{\omega N} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} (p_N + \epsilon p_{N1} \exp i\omega t) R \cos \theta \, d\theta \, dt,$$

$$(3.50) \quad Z_{\omega N} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} (p_N + \epsilon p_{N1} \exp i\omega t) R \sin \theta \, d\theta \, dt,$$

gdzie  $\operatorname{Re}$  oznacza część rzeczywistą funkcji podcałkowych.

3.5.2. *Obliczenie siły nośnej łożyska (przypadek bez sił inercji).* Podstawiając do definicji (3.47) i (3.48) wzór (3.10) określający rozkład ciśnienia  $p_N$  otrzymamy następujące wyrażenia na składowe siły nośnej łożyska w przypadku ustalonego ruchu czopa (por. [6]):

$$(3.51) \quad X_{0N} = 0, \quad Z_{0N} = \frac{6U\mu R^2 \pi \epsilon}{\epsilon^2 (1 - \epsilon^2)^{1/2} (1 + \epsilon^2/2)}.$$

Aby obliczyć składowe siły nośnej łożyska w przypadku nałożenia na czop dodatkowych drgań skrętnych skorzystamy z definicji (3.49) i (3.50). Zgodnie z wynikami zawartymi w p. 3.3. rozkład ciśnienia  $p_N^\omega$  w warstwie smarującej przedstawia się następująco:

$$(3.52) \quad p_N^\omega = p_N + \epsilon p_{N1} \exp i\omega t, \quad p_{N1} = p_N.$$

Po podstawieniu powyższego wzoru do zależności (3.49) i (3.50) otrzymamy

$$(3.53) \quad X_{\omega N} = X_{0N} = 0, \quad Z_{\omega N} = Z_{0N}.$$

3.5.3. *Obliczenie siły nośnej łożyska (przypadek uwzględniający siły inercji).* Rozkład ciśnienia  $p_N^\omega$  w szczelinie łożyska dany jest zależnością (3.22).

Ponieważ  $p_{N1} = p_{N1}(\theta) \neq p_{N1}(t)$ , a  $\int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{Re} (\exp i\omega t) \, dt = 0$ , to z definicji (3.49) i (3.50) wynika, że

$$(3.54) \quad X_{\omega N} = X_{0N} = 0, \quad Z_{\omega N} = Z_{0N}.$$

Na podstawie wyników (3.53) i (3.54) stwierdzamy, że dodatkowe drgania skrętne czopa nie wpływają na siłę nośną łożyska w przypadku cieczy newtonowskiej.

## 4. PRZEPLYW CIECZY DRUGIEGO RZĘDU W ŁOŻYSKU POPRZECZNYM

## 4.1. Równanie konstytutywne

Model nieściśliwego płynu drugiego rzędu jest najprostszym modelem umożliwiającym opis efektów naprężeń normalnych w cieczach lepkosprężystych. Możemy stosować go wówczas, gdy przepływy charakteryzują się małą liczbą Debory, tzn. dla małych prędkości lub krótkich efektów pamięci (por. [9]).

Równanie konstytutywne ma postać

$$(4.1) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \eta\mathbf{A}_1 + \alpha_1(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1^2) + (\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{A}_1^2, \quad \text{tr } \mathbf{A}_1 = 0,$$

gdzie  $\mathbf{T}$  oznacza tensor naprężenia,  $p$  — ciśnienie hydrostatyczne,  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$  są kinematycznymi tensorami Rivlina-Ericksena zdefiniowanymi następująco:

$$(4.2) \quad \mathbf{A}_1 = \nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T, \quad \mathbf{A}_2 = \dot{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{A}_1 \nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T \mathbf{A}_1,$$

Wskaźnik  $T$  oznacza transpozycję. Współczynniki  $\eta$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  są stałymi materiałowymi i zwykle dla rzeczywistych cieczy  $\eta > 0$ ,  $\alpha_1 < 0$ ,  $\alpha_2 > 0$ .

Wyrazimy pole prędkości  $\mathbf{v}$  cieczy drugiego rzędu i ciśnienia  $p$  w następujący sposób (por. [2, 9]):

$$(4.3) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_N + \mathbf{v}', \quad p = p_N + p',$$

gdzie wskaźnik  $N$  dotyczy cieczy newtonowskiej, natomiast prim oznacza odpowiednie przyrosty dla cieczy drugiego rzędu. Podstawiając do równania ruchu, zawierającego jedynie zlinearyzowane człony bezwładności, związek konstytutywny (4.1) oraz zależności (4.3) otrzymamy

$$(4.4) \quad \nabla p_N - \eta \nabla^2 \mathbf{v}_N = -\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_N,$$

$$(4.5) \quad \nabla p' - \eta \nabla^2 \mathbf{v}' = -\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}' + \alpha_1 \text{div} [\mathbf{A}_2(\mathbf{v}_N) - \mathbf{A}_1^2(\mathbf{v}_N)] + (\alpha_1 + \alpha_2) \text{div } \mathbf{A}_1^2(\mathbf{v}_N).$$

W płaskim przepływie płynu nieściśliwego, a taki mamy w szczelinie łożyska, w którym określone są warunki brzegowe dla prędkości stwierdzamy, że równanie (4.5) jest spełnione dla  $\mathbf{v}' = 0$  jeśli (por. [10])

$$(4.6) \quad p' = p_N + \frac{\alpha_1}{\eta} \frac{dp_N}{dt} + \left( \frac{3}{2} \alpha_1 + \alpha_2 \right) \kappa^2,$$

$$\kappa^2 = \frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{A}_1^2(\mathbf{v}_N).$$

Powyższy wynik zwany jest twierdzeniem TANNERA [11]. Twierdzenie to pozwala rozszerzyć rozwiązanie dla cieczy newtonowskiej na przypadek cieczy drugiego rzędu, przy zachowaniu identycznych, kinematycznych warunków brzegowych.

Dla obliczenia siły nośnej łożyska niezbędna będzie znajomość składowej  $T_{zz}$  tensora naprężenia. Określimy ją z równania konstytutywnego (4.1) dokonując w nim uproszczeń wynikających z założenia cienkiej warstwy smarującej. Wykorzystując wyniki pracy [1] otrzymamy

$$(4.7) \quad -T_{zz} = p_N + \frac{\alpha_1}{\eta} \frac{dp_N}{dt} - \frac{1}{2} \alpha_1 \kappa^2,$$

$$(4.8) \quad \kappa^2 = (V_{\theta,r})^2 - \frac{2}{r} V_\theta V_{\theta,r} + \left( \frac{V_\theta}{r} \right)^2,$$

gdzie w równaniu (4.8) oś  $r$  układu biegunowego pokrywa się z promieniem czopa, natomiast  $V_\theta$  jest prędkością obwodową.

#### 4.2. Siła nośna łożyska

4.2.1. *Definicja siły nośnej łożyska.* Zgodnie z twierdzeniem Tannera, punktem wyjścia do obliczenia siły nośnej łożyska smarowanego cieczą drugiego rzędu będą newtonowskie rozkłady prędkości  $u_N$  i ciśnienia  $p_N$  dla ruchu ustalonego czopa (por. wzory (3.8) i (3.10)), a dla ruchu z dodatkowymi drganiami skrętnymi czopa rozkłady  $u_N^\omega$  i  $p_N^\omega$  dane zależnościami

$$(4.9) \quad u_N^\omega = u_N + \epsilon u_{N1} \exp i\omega t, \quad p_N^\omega = p_{N1},$$

dla prędkości i zależnością (3.52) dla ciśnienia  $p_N^\omega$ , w przypadku pominięcia sił inercji.

Ogólną postać rozkładu prędkości  $u_N^\omega$  i ciśnienia  $p_N^\omega$  w przypadku uwzględnienia sił bezwładności określają wzory (3.21) i (3.22) identyczne z (4.9)<sub>1</sub> i (3.52)<sub>1</sub>. Rozkład prędkości  $u_{N1}$  opisuje zależność (3.36), a pochodnej ciśnienia  $p_{N1}$  wzory (3.45) i (3.46) (do obliczenia siły nośnej, jak wykaże dalsza analiza, nie będzie potrzebna znajomość  $p_{N1}$ , ale jego pochodnej  $dp_{N1}/d\theta$ ).

Siłę nośną łożyska obliczać będziemy według wzorów analogicznych do związków (3.47) i (3.48) właściwych dla cieczy newtonowskiej w przypadku ruchu ustalonego czopa i według wzorów analogicznych do (3.49) i (3.50) dla ruchu nieustalonego. W ten sposób dla ruchu ustalonego otrzymamy:

$$(4.10) \quad X_0 = \int_0^{2\pi} -T_{zz}|_{z=0} R \cos \theta d\theta,$$

$$(4.11) \quad Z_0 = \int_0^{2\pi} -T_{zz}|_{z=0} R \sin \theta d\theta.$$

Po podstawieniu do (4.8)  $u_N$  w miejsce  $V_\theta$  oraz wykorzystując w równaniach (4.10) i (4.11) związek (4.7) otrzymamy ostatecznie

$$(4.12) \quad X_0 = \int_0^{2\pi} \left\{ p_N + \frac{\alpha_1}{\eta} \frac{1}{R} u_N \frac{dp_N}{d\theta} - \frac{1}{2} \alpha_1 \left[ \left( \frac{\partial u_N}{\partial z} \right)^2 - 2 \frac{\partial u_N}{\partial z} \frac{u_N}{R} + \left( \frac{u_N}{R} \right)^2 \right] \right\}_{|z=0} R \cos \theta d\theta,$$

$$(4.13) \quad Z_0 = \int_0^{2\pi} \left\{ p_N + \frac{\alpha_1}{\mu} \frac{1}{R} u_N \frac{dp_N}{d\theta} - \frac{1}{2} \alpha_1 \left[ \left( \frac{\partial u_N}{\partial z} \right)^2 - 2 \frac{\partial u_N}{\partial z} \frac{u_N}{R} + \left( \frac{u_N}{R} \right)^2 \right] \right\}_{|z=0} R \sin \theta d\theta.$$

W powyższych wyrażeniach wykorzystano następującą zależność:

$$(4.14) \quad \frac{dp_N}{d\theta} = \frac{dp_N[\theta(t)]}{dt} = \frac{dp_N}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} u_N \frac{dp_N}{d\theta} = \frac{1}{R} u_N \frac{dp_N}{d\theta}.$$

Składowe siły nośnej w przypadku ruchu nieustalonego obliczać będziemy z następujących wzorów:

$$(4.15) \quad X_\omega = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} -T_{zz}^\omega|_{z=0} R \cos \theta d\theta dt,$$

$$(4.16) \quad Z_\omega = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} -T_{zz}^\omega|_{z=0} R \sin \theta d\theta dt,$$

gdzie

$$(4.17) \quad -T_{zz}^\omega = p_N^\omega + \frac{\alpha_1}{\eta} \frac{dp_N^\omega}{dt} - \frac{1}{2} \alpha_1 \left[ \left( \frac{\partial u_N^\omega}{\partial z} \right)^2 - 2 \frac{\partial u_N^\omega}{\partial z} \frac{u_N^\omega}{R} + \left( \frac{u_N^\omega}{R} \right)^2 \right].$$

Zapisując rzeczywiste części rozkładu  $p_N^\omega$  i  $u_N^\omega$  w postaci

$$(4.18) \quad \begin{aligned} u_N^\omega &= u_N + \epsilon \operatorname{Re}(u_{N1} e^{i\omega t}), \\ p_N^\omega &= p_N + \epsilon \operatorname{Re}(p_{N1} e^{i\omega t}), \end{aligned}$$

a także mając na uwadze, że  $\operatorname{Re} u_N = u_N$ ,  $\operatorname{Re} p_N = p_N$ , po uwzględnieniu

powyższych zależności w (4.17), otrzymamy wyrażenie na  $T_{zz}^\omega$  jako sumę trzech składników rzędu  $\epsilon^0, \epsilon^{-1}, \epsilon^{-2}$ .

Oznaczając poszczególne składniki tej sumy odpowiednio przez  $T_{\epsilon^0}$ ,  $T_{\epsilon^{-1}}$ ,  $T_{\epsilon^{-2}}$  możemy napisać

$$(4.19) \quad -T_{zz} = T_{\epsilon^0} + T_{\epsilon^{-1}} + \epsilon^{-2} T_{\epsilon^{-2}}.$$

Po przeprowadzeniu obliczeń otrzymujemy (por. [4]):

$$(4.20) \quad T_{\epsilon^0} = p_N + \frac{\alpha_1}{\eta} \frac{1}{R} \frac{dp_N}{d\theta} u_N - \frac{1}{2} \alpha_1 \left[ \left( \frac{\partial u_N}{\partial z} \right)^2 - \frac{2}{R} \frac{\partial u_N}{\partial z} u_N + \frac{u_N^2}{R^2} \right],$$

$$(4.21) \quad T_{\epsilon^{-1}} = \operatorname{Re} (p_{N1} e^{i\omega t}) + \frac{\alpha_1}{\eta} \left[ \frac{1}{R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} \operatorname{Re} (u_{N1} e^{i\omega t}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{R} \operatorname{Re} \left( \frac{dp_{N1}}{d\theta} u_N e^{i\omega t} \right) + \operatorname{Re} (p_{N1} i\omega e^{i\omega t}) \right] - \\ - \frac{1}{2} \alpha_1 \left\{ 2 \frac{\partial u_N}{\partial z} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial u_{N1}}{\partial z} e^{i\omega t} \right) - \frac{2}{R} \left[ \frac{\partial u_N}{\partial z} \operatorname{Re} (u_{N1} e^{i\omega t}) + \right. \right. \\ \left. \left. + u_N \operatorname{Re} \left( \frac{\partial u_{N1}}{\partial z} e^{i\omega t} \right) \right] + \frac{1}{R^2} 2u_N \operatorname{Re} (u_{N1} e^{i\omega t}) \right\},$$

$$(4.22) \quad T_{\epsilon^{-2}} = -\frac{1}{2} \alpha_1 \left\{ \left[ \operatorname{Re} \left( \frac{\partial u_{N1}}{\partial z} e^{i\omega t} \right) \right]^2 + \right. \\ \left. - \frac{2}{R} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial u_{N1}}{\partial z} e^{i\omega t} \right) \operatorname{Re} (u_{N1} e^{i\omega t}) + \frac{1}{R^2} [\operatorname{Re} (u_{N1} e^{i\omega t})]^2 \right\} + \\ + \frac{\alpha_1}{\eta} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} \operatorname{Re} (u_{N1} e^{i\omega t}) e^{i\omega t} \right].$$

Podstawiając (4.19) do (4.15) i (4.16), po uwzględnieniu postaci wzoru (4.21), a także wykorzystując proste zależności

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \operatorname{Re} (\exp i\omega t) dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \operatorname{Re} (i\omega \exp i\omega t) dt = 0,$$

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt = 1,$$

otrzymamy

$$(4.23) \quad X_{\omega} = \int_0^{2\pi} T_{\theta 0}|_{z=0} R \cos \theta d\theta + \epsilon^2 \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} T_{\epsilon z}|_{z=0} R \cos \theta d\theta dt,$$

$$(4.24) \quad Z_{\omega} = \int_0^{2\pi} T_{\theta 0}|_{z=0} R \sin \theta d\theta + \epsilon^2 \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} T_{\epsilon z}|_{z=0} R \sin \theta d\theta dt.$$

Pierwsze całki po prawej stronie równań (4.23) i (4.24) są składowymi siły nośnej łożyska dla ustalonego przepływu cieczy drugiego rzędu (por. (4.12), (4.13) z (4.20)). Przyrost siły nośnej łożyska wynikający z nałożenia dodatkowych drgań reprezentują drugie całki po prawych stronach równań (4.23) i (4.24). Oznaczmy te przyrosty odpowiednio przez

$$(4.25) \quad X_{\omega\epsilon^2} = \epsilon^2 \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} T_{\epsilon z}|_{z=0} R \cos \theta d\theta dt,$$

$$(4.26) \quad Z_{\omega\epsilon^2} = \epsilon^2 \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} T_{\epsilon z}|_{z=0} R \sin \theta d\theta dt.$$

4.2.2. *Obliczenia siły nośnej łożyska.* Obliczenia przeprowadzimy, jak to wynika z poprzednich rozdziałów, dla trzech przypadków. Są to:

przypadek I ustalony ruch czopa,

przypadek II ruch czopa z dodatkowymi drganiami skrętnymi; bez uwzględnienia sił inercji,

przypadek III ruch czopa z dodatkowymi drganiami skrętnymi; z uwzględnieniem siły inercji.

#### PRZYPADEK I

Składowe siły nośnej łożyska  $X_0$  i  $Z_0$  obliczać będziemy ze wzorów (4.12) i (4.13). Podstawiając do nich newtonowskie rozkłady prędkości  $u_N$  i ciśnienia  $p_N$  zgodnie z zależnościami (3.8) i (3.10) otrzymamy (por. [3, 8])

$$(4.27) \quad X_0 = 4\pi\alpha_1 \frac{U^2}{c^2} R\epsilon \frac{(2+\epsilon^2)(13-7\epsilon^2)+9}{(2+\epsilon^2)(1-\epsilon^2)^{3/2}} + \\ + 4\pi\alpha_1 \frac{U^2}{c^2} \left[ \frac{2}{\epsilon(1-\epsilon^2)^{1/2}} - \frac{2}{\epsilon} - \frac{3\epsilon}{(2+\epsilon^2)(1-\epsilon^2)^{1/2}} \right] \frac{c}{R},$$



$$(4.28) \quad Z_0 = Z_{0N} = \frac{6U^2 \mu R^2 \pi \varepsilon}{c^2} \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{1/2} (1+\varepsilon^2/2)}$$

Porównując wyniki na siłę nośną łożyska poprzecznego dla cieczy newtonowskiej i cieczy drugiego rzędu, stwierdzamy, że  $X_{0N} = 0$ ,  $Z_{0N} \neq 0$  dla cieczy newtonowskiej i  $X_0 \neq 0$ ,  $Z_0 = Z_{0N} \neq 0$  dla cieczy drugiego rzędu.

### PRZYPADEK II

W tym przypadku obliczymy przyrost siły nośnej wynikający z nałożenia dodatkowych drgań na ruch czopa. Składowe przyrostu siły nośnej przedstawiają zależności (4.25) i (4.26). Wykorzystując w nich wzór (4.22), a także newtonowskie rozkłady prędkości  $u_N$  i ciśnienia  $p_N$  dane związkami (3.8) i (3.10) po uwzględnieniu w nich, zgodnie z (3.52)<sub>2</sub> i (4.9)<sub>2</sub>, że  $p_{N1} = p_N$ ,  $u_{N1} = u_N$ , otrzymamy

$$(4.29) \quad X_{\omega \varepsilon} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 X_0; \quad Z_{\omega \varepsilon} = 0.$$

Analiza powyższego wyniku pozwala stwierdzić, że dla cieczy drugiego rzędu nałożenie dodatkowych harmonicznycy drgań skrętnych na ruch czopa wywołuje dalszy wzrost składowej siły nośnej łożyska, w kierunku równoległym do mimośrodu. Druga składowa pozostaje niezmienna, przyjmując wartość jak dla cieczy newtonowskiej.

### PRZYPADEK III

Obliczając przyrost siły nośnej wykorzystamy definicje (4.25) i (4.26) podstawiając do nich wyrażenie (4.22). Występujące we wzorze (4.22) rozkłady prędkości  $u_{N1}$  i  $p_{N1}$ , dane są zależnościami odpowiednio (3.36) i (3.45) lub (3.46). Po przeprowadzeniu obliczeń (por. [4, 9]) otrzymujemy

$$(4.30) \quad X_{\omega \varepsilon} = \pi \alpha_1 \frac{U^2}{c^2} R \left\{ \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \pm \frac{c}{R} \frac{1}{\varepsilon} \left[ 1 - \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \right] \pm \right. \\ \left. + 2(vh) \frac{1}{\varepsilon} \left[ 1 - \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \right] \right\},$$

$$(4.31) \quad Z_{\omega \varepsilon} = 0.$$

Znaki  $\pm$  we wzorze (4.30) odnoszą się odpowiednio do zakresu I i II zmienności parametru  $vh$  (por. p. 3.4.2).

### 4.3. Określenie względnego przyrostu siły nośnej łożyska dla cieczy drugiego rzędu

Zdefiniujemy bezwymiarowy współczynnik  $K_1$  będący miarą wzrostu siły nośnej łożyska wywołanego dodatkowymi drganiami skrętnymi w następujący sposób:

$$(4.32) \quad K_1 = \frac{\text{dodatkowa siła nośna wynikająca z nałożenia drgań}}{\text{siła nośna dla ruchu ustalonego czopa}}$$

Zgodnie z wcześniejszymi oznaczeniami przyjmuje on formę

$$(4.33) \quad K_1 = \frac{\epsilon^2 (X_{\omega\epsilon}^2 + Z_{\omega\epsilon})^{1/2}}{(X_0^2 + Z_0^2)^{1/2}} = \frac{\epsilon^2 X_{\omega\epsilon}}{(X_0^2 + Z_0^2)^{1/2}}$$

Obliczymy wartość współczynnika  $K = K_1/\epsilon^2$  niezależnego od amplitudy dodatkowych drgań dla przypadku II i III-ego określonego w p. 4.2.2. oznaczając  $K_{II}$  — jego wartość, dla przypadku II i  $K_{III}$  — dla przypadku trzeciego.

Podstawiając zatem do (4.33) zależności (4.27), (4.28) oraz (4.29) otrzymamy:

$$(4.34) \quad K_{II} = \frac{De \frac{1}{2} [f_1(\epsilon) + k_0 f_2(\epsilon)]}{\sqrt{De^2 [f_1(\epsilon) + k_0 f_2(\epsilon)]^2 + f_3^2(\epsilon)}}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(4.35) \quad f_1(\epsilon) = 4\epsilon \frac{(2 + \epsilon^2)(13 - 7\epsilon^2) + 9}{(2 + \epsilon^2)(1 - \epsilon^2)^{3/2}},$$

$$(4.36) \quad f_2(\epsilon) = 4 \left[ \frac{2}{\epsilon(1 - \epsilon^2)^{1/2}} - \frac{2}{\epsilon} \frac{3\epsilon}{(2 + \epsilon^2)(1 - \epsilon^2)^{1/2}} \right],$$

$$(4.37) \quad f_3(\epsilon) = \frac{6\epsilon}{(1 - \epsilon^2)^{1/2}(1 + \epsilon^2/2)}, \quad k_0 = \frac{c}{R},$$

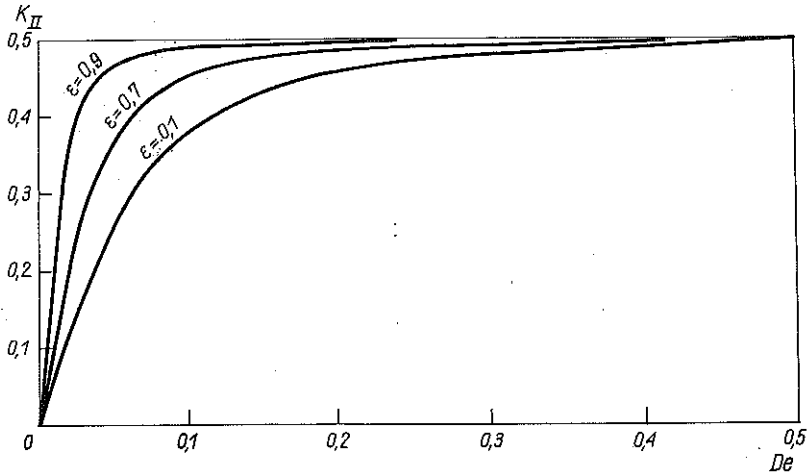
liczbę zaś Debory  $De$  zdefiniowano następująco:

$$(4.38) \quad De = \frac{\alpha_1 U}{\mu R}$$

W łożyskach rzeczywistych parametr  $k_0$  oraz mimośród względny  $\epsilon$  przyjmują wartości (por. [7])

$$(4.39) \quad 0,4 \leq \epsilon \leq 0,9, \quad 0,5 \cdot 10^{-3} \leq k_0 \leq 4 \cdot 10^{-3}$$

Zależność współczynnika  $K_{II}$  od liczby Debory  $De$  dla różnych wartości mimośrodu  $\epsilon$  pokazano na Rys. 2. Obliczenia numeryczne wykazały ponadto,



Rys. 2

że współczynnik ten praktycznie nie zależy bezpośrednio od luzu względnego łożyska  $k_0 = c/R$ .

Aby obliczyć wartość współczynnika  $K_{III}$  podstawimy do definicji (4.33) zależności (4.27), (4.28) oraz (4.30) i (4.31). Otrzymujemy

$$(4.40) \quad K_{III} = \frac{De \left[ F_1(\varepsilon) \pm \frac{c}{R} F_2(\varepsilon) \pm 2(vh) F_2(\varepsilon) \right]}{\sqrt{De^2 \left[ f_1(\varepsilon) + \frac{c}{R} f_2(\varepsilon) \right]^2 + f_3^2(\varepsilon)}}$$

gdzie

$$(4.41) \quad F_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}, \quad F_2(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left[ 1 - \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \right].$$

Z obliczeń numerycznych wynika, że wzór (4.40) możemy uprościć do postaci (por. Tabl. I, [4])

$$(4.42) \quad K_{III} = \frac{De [F_1(\varepsilon) \pm 2vhF_2(\varepsilon)]}{\sqrt{[De f_1(\varepsilon)]^2 + f_3^2(\varepsilon)}}$$

Na rys. 3 przedstawiono wykres zmian współczynnika  $K_{III}$  dla  $\pi \leq vh \leq 2\pi$ , ustalonych wartości mimośrodów względnego  $\varepsilon$  i liczb Debory równych 0,2, 0,3, 0,4. Zakres I zmienności parametru  $(vh)$  (por. p. 3.4.2) zawarty jest w przedziale  $\pi < vh \leq \frac{3}{2}\pi$ , natomiast zakres II w przedziale  $\frac{3}{2}\pi \leq vh \leq 2\pi$ .

Dla  $vh > 2\pi$  odpowiednią wartość współczynnika  $K_{III}$  znaleźć można z wykresu na Rys. 3, po określeniu  $(vh)_{obl}$  dla tego  $(vh)$ . Z definicji podanej na



zmiany siły nośnej wywołane drganiami, których miarą jest współczynnik  $K_{III}$ , zależą okresowo od argumentu ( $v\dot{h}$ ),

dla małych wartości mimośrodu względnego  $\varepsilon$  dodatkowe drgania mogą w pewnych zakresach argumentu ( $v\dot{h}$ ) powodować nieznaczny spadek siły nośnej łożyska. Dla  $\varepsilon > 0,5$ , czyli dla przypadku mającego znaczenie techniczne następuje wzrost siły nośnej łożyska,

współczynnik wzrostu siły nośnej  $K_{III}$  dla przypadku drgań dodatkowych o wysokiej częstotliwości jest średnio o rząd mniejszy od współczynnika  $K_{II}$  charakteryzującego drgania o małych częstotliwościach,

wielkość współczynnika  $K_{III}$  praktycznie nie zależy od liczby Debory.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. ZAHORSKI, *Effect of small-amplitude harmonic vibrations on viscoelastic flows in a plane slider bearing*, Arch. Mech., **34**, 1, 73, 1982.
2. S. ZAHORSKI, *Effects of inertia and high-frequency harmonic vibrations on the lift and friction forces on viscoelastic slider bearing flows*, Arch. Mech., **3**, **34**, 359, 1982.
3. M. MIKSA, *Wpływ małych drgań skrętnych czopa na nośność łożyska poprzecznego*, Prace IPPT PAN 41/1986.
4. M. MIKSA, *Wpływ małych drgań skrętnych czopa na nośność łożyska poprzecznego z uwzględnieniem sił bezwładności*, Prace IPPT PAN 34/1987.
5. T. E. R. JONES, K. WALTERS, *The behaviour of materials under combined steady and oscillatory shear*, J. Phys. A. Gen. Phys., **4**, 85, 1971.
6. A. CAMERON, *The principles of lubrication*, Longmans 1966.
7. D. D. FULLER, *Teoria i praktyka smarowania*, PWT, Warszawa 1960.
8. J. F. BOOKER, *A table of the journal-bearing integrals*, Trans. ASME, ser. D, 533, June 1965.
9. S. ZAHORSKI, *Mechanics of viscoelastic fluids*, Martinus Nijhoff—Polish Sci. Publ., The Hague-Warszawa 1982.
10. A. C. PIPKIN, *Lectures on viscoelasticity theory*, Springer, New York-Heidelberg-Berlin 1972.
11. R. J. TANNER, *Plane creeping flows of incompressible second-order-fluids*, Phys. Fluids, **9**, 1246, 1966.

#### Резюме

#### ВЛИЯНИЕ МАЛЫХ СКРУЧИВАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ ЦАПФЫ НА НЕСУЩУЮ СПОСОБНОСТЬ ПОПЕРЕЧНОГО ПОДШИПНИКА СМАЗЫВАЕМОГО НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В работе рассмотрен случай гармонических скручивающих колебаний цапфы скользящего поперечного подшипника, наложенных на установившееся движение цапфы. Анализ проведен для случая, когда амплитуда и частота колебаний настолько малы, чтобы

инертными членами в уравнениях движения можно пренебречь, а также для случая, в котором учтены линеаризованные инертные члены в этих уравнениях. В обоих случаях показано, что несущая сила поперечного подшипника с ньютоновской жидкостью не изменяется. Если смазочным фактором является жидкость, описываемая моделью жидкости второго порядка, то в первом случае несущая сила возрастает, во втором же случае, учитывающем влияние сил инерции, несущая сила убывает или возрастает в зависимости от частоты дополнительных колебаний. Причиной изменений несущей силы подшипника является выступание составляющей силы параллельной эксцентрику.

#### SUMMARY

### EFFECT OF SMALL TORSIONAL VIBRATIONS OF THE SHAFT ON THE LOAD CAPACITY OF A JOURNAL BEARING LUBRICATED WITH A NON-NEWTONIAN FLUIDS

In the paper the case of harmonic torsional vibrations superposed on a steady motion of the shaft of a journal bearing is considered. The analysis is presented for the case of small amplitudes and frequencies enabling disregarding inertia terms in the equation of motion, and also for the case in which linearized inertia terms are taken into account. In both cases it is shown that the lift force for Newtonian fluid does not change at all. If the lubricating agent is a fluid described by the model of a second-order fluid, the lift force increases in the first case, and decreases or increases, depending on the frequency of additional vibrations, in the second case. A reason for this change of the lift force is the presence of a force parallel to the eccentricity.

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA  
INSTYTUT MECHANIKI STOSOWANEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 2 marca 1988 r.*