

METODY UPROSZCZONEJ ANALIZY SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEJ PŁYT USZTYWNIIONYCH

WŁODZIMERZ SOSNOWSKI (WARSZAWA)

Celem pracy jest przedstawienie wyników kolejnego etapu realizacji pewnej koncepcji uproszczonej analizy obciążonych wielokierunkowo płyt usztywnionych metodą elementów strukturalnych przy zastosowaniu dwu modeli rozpatrywanej konstrukcji: ortotropowego i ramowego. Uwzględniono nieliniowości materiałowe stosując procedurę przyrostową, prawo plastycznego płynięcia i metodę tzw. uogólnionych przegubów plastycznych. Zdaniem autora praca zawiera, obok programu ASGRAM-3, następujące trzy nowe elementy: 1. Porównanie obydwu modeli płyty w zakresie liniowym i nieliniowym prowadzące do wniosku, że wobec jakościowo różnych wyników w wielu wypadkach obydwa modele nie mogą być uznane za dobre i powstaje problem wyboru właściwszego modelu (do obliczeń szacunkowych) oraz weryfikacji otrzymanych wyników. 2. Dyskusję stosowanej w metodzie przegubów plastycznych addytywności części sprężystej i plastycznej wektora całkowitych przemieszczeń elementu ramy i pewne wnioski dotyczące błędu wynikającego z uogólnienia na zakres sprężysto-plastyczny hipotezy małych obrotów przyjmowanej dla belek Timoshenki. 3. Propozycję modyfikacji szerokości pasa współpracującego płyty usztywnionej traktowanej jako zlinearyzowana funkcja obciążenia w zakresie sprężysto-plastycznym. Funkcję „poradnika” ułatwiającego wybór właściwego modelu i tzw. krytycznych parametrów spełnia program ekspertowy EXSASP.

1. WSTĘP

Celem pracy jest przedstawienie wyników kolejnego etapu realizacji pewnej koncepcji uproszczonej analizy dowolnie obciążonych płyt usztywnionych metodą elementów strukturalnych przy zastosowaniu dwu modeli rozpatrywanej konstrukcji: ortotropowego i ramowego. Uwzględniono nieliniowości materiałowe stosując procedurę przyrostową, prawo plastycznego płynięcia i metodę tzw. uogólnionych przegubów plastycznych. U podstaw przyjmowanych założeń leży chęć maksymalnego ograniczenia liczby elementów strukturalnych kosztem ich wielkości oraz uwzględnienia w algorytmie dużej zmienności wymiarów i proporcji sztywności płyt i usztywnień. W pracy wykorzystano wyniki przedstawione w pracy [1] oraz własne doświadczenie zdobyte w trakcie realizacji projektów dla Polskiego Rejestru Statków [2-3].

Zdaniem autora praca zawiera, obok programu ASGRAM-3D, następujące trzy nowe elementy: 1) porównanie obydwu modeli płyty w zakresie liniowym

i nieliniowym prowadzące do wniosku, że wobec jakościowo różnych wyników w wielu wypadkach obydwa modele nie mogą być uznane za dobre i powstaje problem wyboru właściwszego modelu (do obliczeń szacunkowych) oraz weryfikacji otrzymanych wyników; 2) dyskusję stosowanej w metodzie przegubów plastycznych addytywności części sprężystej i plastycznej wektora całkowitych przemieszczeń elementu ramy i pewne wnioski dotyczące błędu wynikającego w uogólnienia na zakres sprężysto-plastyczny hipotezy małych obrotów przyjmowanej dla belek Timoshenki; 3) propozycję modyfikacji szerokości pasa współpracującego płyty usztywnionej traktowanej jako zlinearyzowana funkcja obciążenia w zakresie sprężysto-plastycznym.

Opracowany program numeryczny składa się z trzech części:

1. Programu ASGRAM-3D przeznaczonego do analizy sprężysto-plastycznych ram przestrzennych i wykorzystującego koncepcje tzw. szerokości efektywnych i uogólnionych przegubów plastycznych, przedstawione w pracach [1 i 4].

2. Programu ORTO do analizy płyt anizotropowych, uwzględniającego nieliniowości geometryczne i materiałowe, opisanego w pracy [5].

3. Programu ekspertowego EXSASP niezależnego od dziedziny.

Model ortotropowy, w którym sztywności w dwu prostopadłych kierunkach modelują rzeczywistą kombinację sztywności płyt i usztywnień dobrze oddaje zachowanie się płyt o słabych lecz stosunkowo licznych usztywnieniach.

Model belkowy zastosowano np. w pracy [6] do obliczeń paneli, czyli płyt usztywnionych w jednym kierunku. Panel idealizowano za pomocą belek, których współpracę pomijano zakładając, że wiotkie poszycie pozwala ograniczyć się do zbadania jednego wyidealizowanego usztywnienia z pasem współpracującym płyty. W niniejszej pracy zastosujemy podobny model idealizując poszycie o silnych, rzadko rozstawionych usztywnieniach za pomocą ramy przestrzennej. Wykorzystamy program szczegółowo opisany w pracy [4].

Funkcję „poradnika” ułatwiającego wybór właściwego modelu i tzw. krytycznych parametrów spełnia program ekspertowy EXSASP.

2. NUMERYCZNA ANALIZA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH RAM PRZESTRZENNYCH

2.1. Algorytm postępowania

Sprężysto-plastyczne zachowanie się konstrukcji w zakresie małych przemieszczeń opisuje równanie

$$(2.1) \quad \mathbf{K}^{s-p} \Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{P},$$

którym \mathbf{K}^{s-p} oznacza macierz sztywności sprężysto-plastycznej całej ramy, $\Delta \mathbf{P}$ oznacza przyrost wektora obciążenia, $\Delta \mathbf{r}$ zaś jest poszukiwanym wektorem przyrostów przemieszczeń węzłowych.

Równanie to rozwiązujemy metodą całkowania „w przód”, o tradycyjnej nazwie metody zmiennej sztywności, która została przedstawiona w pracy [9], s. 50. Globalna macierz sprężysto-plastyczna ramy jest modyfikowana na każdym przyroście obciążenia poprzez zastąpienie macierzy sprężystych uplastycznionych elementów odpowiednimi macierzami sprężysto-plastycznymi.

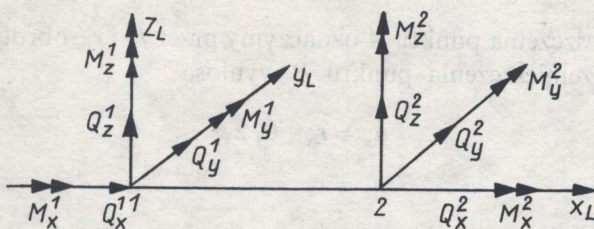
W przeciwieństwie do analizy stanu granicznego uzyskujemy pełną informację o kolejnych etapach procesu deformacji, prowadzącego po przekroczeniu fazy czysto sprężystej poprzez fazy sprężysto-plastyczne aż do zniszczenia konstrukcji. Zakładamy, że deformacje plastyczne koncentrują się w przekrojach przywęzłowych. Uplastycznienie przekrojów następuje w chwili spełnienia warunku stanu granicznego. Tworzą się tzw. uogólnione przeguby plastyczne. Ich powstanie uwarunkowane jest spełnieniem równań typu

$$(2.2) \quad F(\mathbf{Q}) = 0,$$

w których \mathbf{Q} oznacza wektor naprężeń uogólnionych w rozpatrywanym przekroju przywęzłowym elementu skończonego.

Naprężeniami uogólnionymi występującymi jako argumenty w warunku stanu granicznego (2.2) są momenty zginające M_y i M_z , moment skręcający M_x , siły tnące Q_y i Q_z oraz siła osiowa Q_x . Dla belki o dwu końcach, $k = 1, 2$ (rys. 1) mamy

$$(2.3) \quad \mathbf{Q}_k = \{Q_x, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z\}.$$



Rys. 1

Naprężeniom tym odpowiadają następujące węzłowe stopnie swobody:

$$(2.4) \quad \mathbf{r}_k = \{r_x, r_y, r_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}.$$

W zakresie sprężystym powyższe wielkości wiąże znana zależność

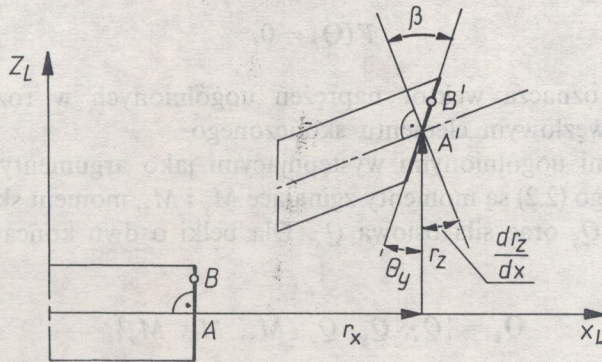
$$(2.5) \quad \mathbf{Q} = \mathbf{k}^s \mathbf{r},$$

w której \mathbf{k}^s oznacza sprężystą macierz sztywności i elementu obciążonego (rys. 1).

Spełnienie warunku (2.2) oznacza pojawienie się uaktywnionej strefy plastycznej. Odształcenia całkowite konstrukcji można uważać za sumę odształceń sprężystych ε^s i odształceń plastycznych ε^p :

$$(2.6) \quad \varepsilon^c = \varepsilon^s + \varepsilon^p.$$

W przypadku belki Timoshenki zakładamy, że płaski przekrój, prostopadły do osi belki pozostaje po odształceniu płaski, lecz niekoniecznie prostopadły do tej osi. Przesunięcia dowolnych dwu punktów A i B takiego przekroju na płaszczyźnie pokazuje rys. 2.



Rys. 2

Jeśli przesunięcia punktu A oznaczymy przez r_x i r_y , obrót zaś przekroju przez θ_y , to przesunięcia punktu B wyniosą

$$(2.7) \quad \begin{aligned} u_x &= r_x + \theta_y z, \\ u_z &= r_z, \\ u_y &= 0. \end{aligned}$$

Drugie z powyższych równań (2.7) wynika z przyjęcia hipotezy małych obrotów. Hipoteza ta jest poprawna również w przypadku utworzenia się przegubu plastycznego pod warunkiem, że stopień statycznej niewyznaczalności konstrukcji jest „duży”, co oznacza, że konstrukcja jako całość ma jeszcze dużą rezerwę nośności. Uogólnienie hipotezy małych obrotów na zakres sprężysto-plastycznych wymaga więc założenia, że tangens nachylenia krzywej opisującej zależność przesunięć od obciążenia E_t dla całej konstrukcji spełnia warunek

$$(2.8) \quad E_s > E_t > a,$$

E_s oznacza moduł Younga. Większy od zera parametr a jest miarą poprawności hipotezy małych obrotów oraz charakteryzuje stopień jednoznaczności rozwiązania sprężysto-plastycznego (które jak wiadomo staje się niejednoznaczne, gdy $E_t \rightarrow 0$). Odształcenie belki Timoshenki wyraża się wzorami

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du_x}{dx} = \frac{dr_x}{dx} + \frac{d\theta_y}{dx} z, \\ \gamma_{xy} &= \frac{du_x}{dz} + \frac{du_z}{dx} = \theta_y + \frac{dr_z}{dx}, \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{zy} = 0. \end{aligned}$$

Naprężenia uogólnione są następujące:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} Q &= \int_s \sigma_x ds, \\ Q_y &= \int_s \tau_{xy} ds, \\ M_z &= \int_s \sigma_{xz} ds. \end{aligned}$$

Zasada prac wirtualnych pozwala stowarzyszyć z powyższymi naprężeniami uogólnionymi następujące odkształcenia uogólnione: odkształcenie osiowe, średni kąt odkształcenia postaciowego oraz krzywiznę. Wynoszą one odpowiednio

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \delta &= \frac{dr_x}{dx}, \\ \beta &= \theta_y + \frac{dr_z}{dx}, \\ \kappa &= \frac{d\theta_y}{dx}. \end{aligned}$$

Widzimy, że przy przyjętym założeniu o małości obrotów istnieje prawie jednoznaczna zależność pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami i możemy z dokładnością do niewielkich sztywnych przemieszczeń napisać związek

$$(2.12) \quad \Delta \mathbf{r}^c = \Delta \mathbf{r}^s + \Delta \mathbf{r}^p.$$

Aby lepiej uzasadnić poprawność zasady addytywności przyrostów części sprężystej $\Delta \mathbf{r}^s$ i plastycznej $\Delta \mathbf{r}^p$ wektora całkowitych przemieszczeń $\Delta \mathbf{r}^c$ w węzłach belki Timoshenki, niektórzy autorzy, na przykład w pracy [7] (i w wielu innych) zakładają, że odkształcenia plastyczne wynikają jedynie ze zginania.

Powyższe rozumowanie zachowuje ważność dla prostszego modelu belek Bernoulliego-Eulera. W modelu tym przyjmuje się, że płaskie przekroje prostopadłe do osi belki pozostają płaskie i prostopadłe do tej osi po odkształceniu. Szczegółowy opis różniczkowy belki zawierający dokładne omówienie zależności pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami dla różnych modeli obliczeniowych można znaleźć w książce (8), w rozdziale 3. Plastyczną część przyrostu przemieszczeń możemy więc, wobec poczynionych powyżej założeń, obliczyć wykorzystując stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia, ze wzoru

$$(2.13) \quad \Delta \mathbf{r}^p = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{r}_1^p \\ \Delta \mathbf{r}_2^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} \right]_1 \\ \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} \right]_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \mu_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix}$$

Gdy przekrój przywęzłowy 1 lub 2 elementu jest sprężysty, zachodzi odpowiednio $\mu_1 = 0$ lub μ_2 . Zależność pomiędzy przyrostem sił wewnętrznych i przyszczeń można wyrazić następująco:

$$(2.14) \quad \Delta \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{r}_1^e - \Delta \mathbf{r}_1^p \\ \Delta \mathbf{r}_2^e - \Delta \mathbf{r}_2^p \end{Bmatrix}.$$

Podstawiając równanie (2.13) do równania (2.14) otrzymamy wzór

$$(2.15) \quad \Delta \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{r}_1 - \mu_1 \Phi_1 \\ \Delta \mathbf{r}_2 - \mu_2 \Phi_2 \end{Bmatrix}.$$

Dowolna zmiana naprężeń uogólnionych działających w przekroju przy nie może naruszyć warunku plastyczności. Zachodzi więc związek

$$(2.16) \quad \Delta \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \end{Bmatrix} = 0.$$

Równania (2.15) i (2.16) określają związek między μ i $\Delta \mathbf{r}$. Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy przekrój 1 jest uplastyczniony, przekrój zaś 2 jest sprężysty. Zachodzi wówczas $\mu_1 = 0$, a $\mu_2 = 0$. Wstawiając powyższe wartości do równania (2.15) otrzymamy

$$(2.17) \quad \Delta \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{r}_1 - \mu_1 \Phi_1 \\ \Delta \mathbf{r}_2 \end{Bmatrix}.$$

Kombinacja pierwszego z powyższych równań ze wzorem (2.16) daje

$$(2.18) \quad \mu_1 = \frac{\Phi_1^t [k_{11} \ k_{12}]}{\Phi_1^t k_{11} \Phi_1} \begin{Bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{Bmatrix},$$

wstawiając tę wartość μ_1 do równania (2.17) otrzymamy sprężysto-plastyczną macierz sztywności elementu belkowego dla uplastycznionego przekroju 1 i sprężystego przekroju 2:

$$(2.19) \quad \Delta Q = \begin{vmatrix} k_{11} - \frac{k_{11} \Phi_1 \Phi_1^t k_{11}}{CA} & k_{11} - \frac{k_{11} \Phi_1 \Phi_1^t k_{11}}{CA} \\ k_{11} - \frac{k_{11} \Phi_1 \Phi_1^t k_{11}}{CA} & k_{11} - \frac{k_{11} \Phi_1 \Phi_1^t k_{11}}{CA} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{Bmatrix}$$

gdzie $CA = \Phi_1^t k_{11} \Phi_1$.

Podobnie możemy obliczyć sprężysto-plastyczne macierze sztywności dla pozostałych dwu przypadków belki, gdy przekrój 1 jest sprężysty, przekrój 2 zaś jest uplastyczniony oraz gdy obydwa przekroje przywęzłowe są uplastycznione. W pracy [4] zamieściliśmy kompletny wydruk podprogramu służącego do generacji tych macierzy.

2.2. Informacja o programie numerycznym

Krótki, liczący około 1400 wierszy w FORTRANIE i łatwy do implementacji na różnych spotykanych w kraju komputerach, program numeryczny ASGRAM-3D, służący do przyrostowej analizy sprężysto-plastycznych ram przestrzennych metodą elementów skończonych, został przedstawiony w pracy [4]. Jest on zainstalowany na komputerze osobistym Olivetti M-24, kompatybilnym z komputerem IBM-PC oraz na minikomputerze SM-4. Algorytm zastosowany w programie istotnie rozszerza możliwości programów ASGRAM i ASGRAMW, prezentowanych wcześniej w pracach [3] oraz [9]. ASGRAM-3D jest według rozeznania autora pierwszym tego typu programem opracowanym w Polsce. Podczas jego pisania wykorzystano wiele modułów zawartych w dostępnej w kraju książce [5].

Zgodnie z jedną z ogólnie przyjętych metod przybliżonych obliczeń płyt usztywnionych, polegającą na wykorzystaniu koncepcji tzw. szerokości efektywnych, program może też stanowić użyteczne narzędzie do analizy konstrukcji spotykanych na przykład w okrętownictwie. Opis takiego zastosowania liniowej wersji programu zamieszczono w pracy [2].

Równanie (2.2) opisuje powierzchnię graniczną, która oddziela w przestrzeni naprężeń uogólnionych stany zachowań sprężystych przekroju od stanów pełnego uplastycznienia. Nie wyróżniamy więc w tym podejściu tzw. początkowej powierzchni granicznej opisującej stany początkowych uplastycznień przekroju. Spośród wielu spotykanych postaci równania (1.2) wybierzemy następujący, najprostszy warunek stanu granicznego w k -tym przekroju przywęzłowym ramy:

$$(2.20) \quad q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 + m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 - 0$$

stosowany dla pełnych przekrojów prostokątnych belek. W przypadku belek cienkościennych powierzchnia opisująca stan graniczny nie spełnia zazwyczaj warunków symetrii względem osi głównych przekroju. W powyższym wzorze poszczególne składniki są unormowanymi wartościami naprężeń uogólnionych

$$(2.21) \quad q_x = \frac{Q_x}{Q_{xgr}}, \quad q_y = \frac{Q_y}{Q_{ygr}}, \quad q_z = \frac{Q_z}{Q_{zgr}},$$

$$m_x = \frac{M_x}{M_{xgr}}, \quad m_y = \frac{M_y}{M_{ygr}}, \quad m_z = \frac{M_z}{M_{zgr}}.$$

Symbolem gr oznaczamy wielkości graniczne odpowiednio siły podłużnej Q_x , sił tnących Q_y i Q_z oraz momentów M_x , M_y i M_z , liczonych w przypadku płyt usztywnionych z uwzględnieniem dwuteowości przekroju i szerokości pasa współpracującego; indeksy x , y , z odpowiadają osiom lokalnego układu współrzędnych rozpatrywanego elementu ramy.

Należy podkreślić, że w programie nie rozwiązano zagadnienia „odchodzenia” od rozwiązania dokładnego oraz wychodzenia poza powierzchnię plastyczności w przestrzeni uogólnionych naprężeń. Dlatego zaleca się stosowanie dostatecznie małych przyrostów obciążenia, nie przekraczających np. 0,01 części obciążenia, wywołującego utworzenie się pierwszego przegubu plastycznego. O obydwu wyżej wymienionych zjawiskach pisaliśmy dokładnie w pracy [9], ss. 52-53.

3. SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNA ANALIZA PŁYT I POWŁOK ANIZOTROPOWYCH

W analizie wykorzystujemy typowy, zdegenerowany element powłoki grubościennnej, opisany w książce [10]. Pole przemieszczeń w tym elemencie jest określone przez trzy translacje węzła znajdującego się na powierzchni środkowej i dwa obroty wektora

$$(3.1) \quad \mathbf{v}_{3i} = \left\{ \begin{matrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{matrix} \right\}_{\text{top}} - \left\{ \begin{matrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{matrix} \right\}_{\text{bottom}}$$

łączącego górny i dolny punkt na powierzchni powłoki i definiowany osobno dla każdego węzła (jego długość jest równa grubości powłoki). Obroty te następują wokół ortogonalnych kierunków normalnych do tego wektora. Jeśli dwa takie kierunki dane są przez wektory v_{2i} i v_{1i} (o długości jednostkowej) z odpowiadającymi im skalarnymi rotacjami α_i i β_i , to wprowadzając funkcje kształtu wiążemy pole przemieszczeń z przemieszczeniami węzłów wzorami

$$(3.2) \quad \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum N_i \xi \frac{t_i}{2} - [v_{1i} - v_{2i}],$$

gdzie ξ jest współrzędną liniową w kierunku grubości krzywoliniowego układu współrzędnych ξ, η, ζ , w którym zakładamy zmienność parametrów od -1 do 1 na odpowiednich ściankach. Odształcenia w elemencie definiujemy przez składowe w kierunkach osi ortogonalnych odniesionych do powierzchni $\zeta = \text{const}$ w lokalnym układzie wyznaczonym przez normalną do powierzchni w rozpatrywanym punkcie, z' i dwie prostopadłe do niej osie x' i y' leżące w płaszczyźnie stycznej:

$$(3.3) \quad \varepsilon' = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z} \\ \gamma_{y'z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} du'/dx' \\ dv'/dy' \\ du'/dy' + dv'/dx' \\ dw'/dy' + du'/dz' \\ dw'/dy' + dv'/dx' \end{Bmatrix}.$$

Naprężenia odpowiadające tym odształceniom zdefiniowane są przez macierz σ' i związane są z odształceniami przez macierz sprężystości D' :

$$(3.4) \quad \sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} = D' (\varepsilon' + \varepsilon'_0) + \sigma'_0,$$

Macierz D' zawiera potrzebne własności anizotropowe

$$(3.5) \quad \mathbf{D}' = \begin{vmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ & & G_{12} & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & K_1 G_{13} & 0 \\ & & & & K_2 G_3 \end{vmatrix}$$

$$G_{12} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})}, \quad G_{13} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{21})}, \quad G_{23} = \frac{G_{12} + G_{13}}{2},$$

Współczynniki K_1 i K_2 zapewniają ciągły, paraboliczny rozkład odkształceń ścinania wzdłuż grubości. W programie wykorzystujemy 8-węzłowy element Serendipowski, a także 9-węzłowy element Lagrange'a oraz 9-węzłowy element typu „heterosis”. Te dwa ostatnie elementy umożliwiają redukcję rzędu całkowania, która pozwala uniknąć nadmiernej sztywności płyty obserwowanej przy zmniejszaniu się grubości elementu i wynikającej z niedokładnego uwzględnienia naprężeń ścinających. Temu samemu celowi służy całkowanie selektywne zastosowane do części wyrażeń na energię pochodzącą od naprężeń błonowych i ścinających.

Program umożliwia uwzględnienie nieliniowego zachowania się konstrukcji spowodowanego występowaniem odkształceń plastycznych oraz zmieniającą się geometrią układu. Wykorzystujemy standardową procedurę rozwiązywania nieliniowego układu równań

$$(3.6) \quad \psi_i^n = \mathbf{f}^n - \mathbf{p}_i^n = \mathbf{f}^n - \int_v \mathbf{B}^t \sigma_i^n dv,$$

w którym \mathbf{f}^n i \mathbf{p}^n oznaczają odpowiednio wektory obciążeń zewnętrznych oraz węzłowych sił wewnętrznych: macierz \mathbf{B} definiuje zależność pomiędzy polami przemieszczeń i odkształceń, wektor naprężeń σ_i^n spełnia ogólne kryterium płynięcia, v jest objętością ciała, n oznacza numer przyrostu obciążenia zaś i numer iteracji. Celem procesu iteracyjnego jest minimalizacja sił residualnych ψ_i^n .

Macierz sprężysto-plastyczna otrzymywana jest podobnie jak w przypadku ram przestrzennych z tą jedynie różnicą, że w równaniach opisujących warunek plastyczności uwzględniamy anizotropię materiału i parametr wzmocnienia. Problem dużych deformacji rozwiązany został przez wprowadzenie stacjonarnego opisu Lagrange'a, w którym miary naprężeń wyrażonych drugimi

tensorami Pioli-Kirchhoffa oraz miary odkształceń wyrażonych tensorami Greena-Lagrange'a odnoszą się do konfiguracji pierwotnej, czyli do stałego w czasie układu współrzędnych początkowych. Wykorzystamy przy tym założenie von Kármána o małych obrotach.

Więcej szczegółów dotyczących takiego opisu procesu deformacji można znaleźć w książce [5].

4. MODELOWANIE RZECZYWISTEJ KONSTRUKCJI

Ogólność algorytmu wymaga wprowadzenia jednolitego sposobu określania współczynników sztywności płyty ortotropowej D_x , D_y , D_{xy} oraz momentów bezwładności I_x , I_y i J_{xy} belek reprezentujących usztywnienia z pasem współpracującym płyty. Istotne różnice kształtu rzeczywistej płyty i jej modeli, a szczególnie różne położenie a nawet i liczba osi obojętnych zginania, nieciągłość związana z gwałtowną zmianą grubości rzeczywistej płyty w miejscu jej połączenia z usztywnieniem sprawiają, że zachodzi potrzeba stosowania różnych modeli oraz opartych na eksperymentach, a częściowo na intuicji, kryteriach ich wyboru. Zgodnie z teorią płyt ortotropowych sztywność zginania płyty w kierunku x wynosi

$$(4.1) \quad D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}$$

W rzeczywistej płycie usztywnionej różne własności w dwu kierunkach prostopadłych nie są wynikiem różnych modułów sprężystości, a raczej wynikają z różnych charakterystyk geometrycznych. Dlatego celowe jest wprowadzenie przybliżonej sztywności jednostkowej płyty wyrażonej wzorem

$$(4.2) \quad D_x = \frac{EI_x}{s_y(1 - \nu^2)}$$

Podobnie obliczamy D_y :

$$(4.3) \quad D_y = \frac{EI_y}{s_x(1 - \nu^2)}$$

W powyższych wzorach I_x i I_y oznaczają momenty bezwładności usztywnień razem z pasem współpracującym płyty, s_x i s_y zaś rozstawienia usztywnień odpowiednio w kierunkach x i y .

Sztywność płyty ortotropowej na skręcanie D_{xy} można określić wykorzystując zależność

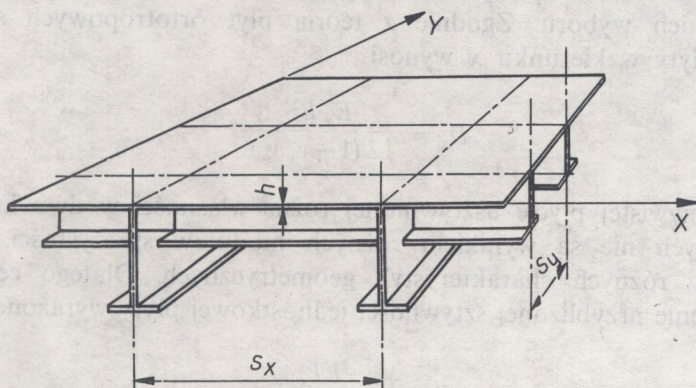
$$(4.4) \quad D_{xy} = \sqrt{\frac{I_{px} I_{py}}{I_x I_y}} \sqrt{D_x D_y}$$

Symbole I_{px} , I_{py} oznaczają momenty bezwładności samej płyty liczone względem osi obojętnej całego przekroju. W przypadku modelu ramowego część parametrów ortotropii jest równa zero: $v_x = v_y = G_{xy} = 0$. Pociąga to za sobą zerowanie się parametrów aproksymacyjnych $I_{px} = I_{py} = 0$. Sztywność płyty ortotropowej na skręcanie $D_{xy} = 0$ i w efekcie wpływ poszycia ogranicza się do szerokości efektywnej belek tworzących ramę.

5. SZEROKOŚĆ EFEKTYWNA PŁYTY W ZAKRESIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM

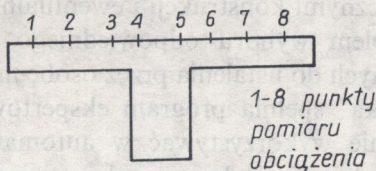
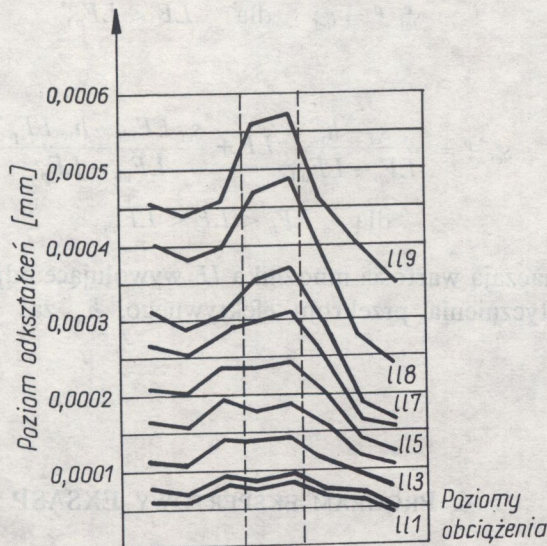
Przegląd metod doboru szerokości pasa współpracującego poszycia s_{ef} w zakresie sprężystym można znaleźć w podręczniku [11]. Dość rozpowszechniony wśród okrętowców wzór podany przez Schade'a jest oparty na badaniach eksperymentalnych

$$(5.1) \quad s_{ef} = \frac{1,1 s}{1 + 2/(L/2s)^2}$$

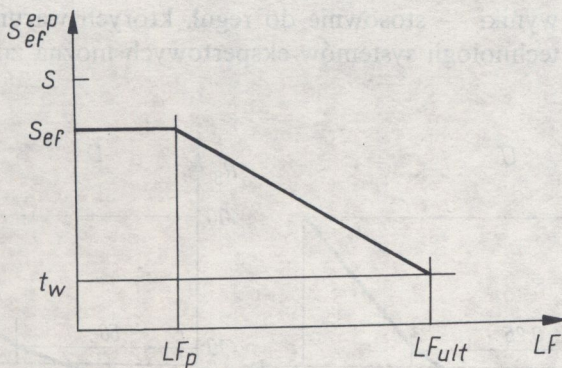


Rys. 3

Symbol s w tym wzorze oznacza rozstaw usztywnień (zaznaczony na rys. 3 jako s_x lub s_y), L zaś jest równe odległości pomiędzy punktami zerowania się momentu zginającego. W wyniku procesu uplastycznienia następują zmiany rozkładu naprężeń w przekrojach płyty. Na rys. 4 pokazano rezultaty badań eksperymentalnych przeprowadzonych dla płyt żelbetowych w Uniwersytecie Urbana (Illinois), w książce [13]. Widzimy, że w miarę postępującego zniszczenia szerokość pasa biorącego udział w przenoszeniu naprężeń ściskających i rozciągających maleje aż do wartości równej grubości usztywnienia t_w w momencie zniszczenia. Podobne efekty obserwujemy w przypadku płyt



Rys. 4



Rys. 5

stalowych. Szerokość efektywna w zakresie sprężysto-plastycznym s_{ef}^{e-p} jest nieliniową funkcją mnożnika obciążenia LF . W naszej pracy chcemy zaproponować następującą linearyzację tej funkcji (pokazaną na rys. 5)

$$(5.2) \quad s_{ef}^{e-p} = s_{ef} \quad \text{dla} \quad LF < LF_p,$$

oraz

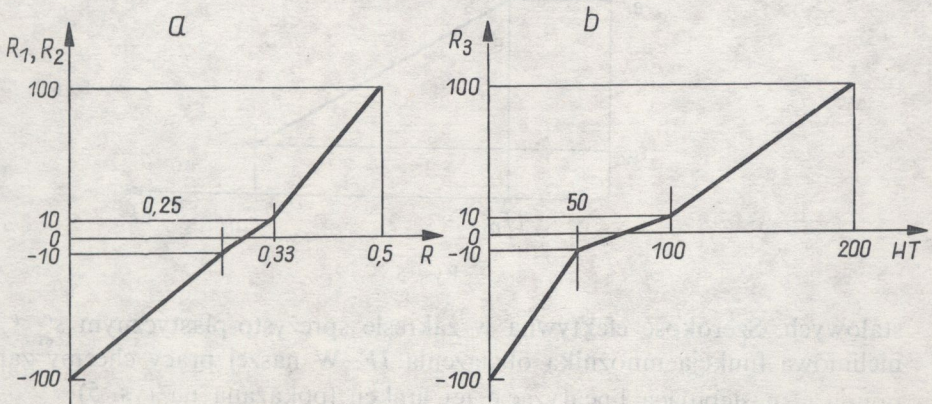
$$(5.3) \quad s_{ef}^{e-p} = \frac{s_{ef} - h_w}{LF_p - LF_{ult}} LF + \frac{s_{ef} LF_{ult} - h_w LF_p}{LF_{ult} - LF_p},$$

$$\text{dla} \quad LF_p < LF < LF_{ult}.$$

LF_p i LF_{ult} oznaczają wartości mnożnika LF wywołujące odpowiednie pierwsze i pełne uplastycznienia przekroju efektywnego, h_w zaś oznacza wysokość środka.

6. PROGRAM EKSPERTOWY EXSASP

Ponieważ użytkownik naszego programu dysponuje na ogół jedynie cechami geometrycznymi konstrukcji i ewentualnie zna charakter nieliniowości, powstaje problem wyboru odpowiedniego modelu i tzw. krytycznych parametrów, trudnych do ustalenia przez osobę nie będącą autorem programu. Funkcję „poradnika” spełnia program ekspertowy EXSASP. Można w nim tworzyć i następnie wykorzystywać w automatycznych konsultacjach tzw. reguły bazy wiedzy. Treść bazy wiedzy stanowią reguły decyzyjne postaci JEŻELI <warunki> TO <wnioski>, przy czym warunki i wnioski to fakty dotyczące konsultacji wyrażone w prostym języku formalnym. W czasie konsultacji EXSYS zadaje użytkownikowi szereg pytań, a następnie wyprowadza wyniki — stosownie do reguł, których warunki zostały spełnione. Podstawy technologii systemów ekspertowych można znaleźć w książce [12].



Rys. 6

W programie ekspertowym EXSASP wybór jednej z dwu metod, a co za tym idzie programu obliczeniowego, uzależniliśmy od parametru, nazwanego umownie „ramowością” R . Wartość tego parametru charakteryzuje stopień przynależności płyty do klasy konstrukcji dobrze opisywanych jednym z proponowanych modeli. Zakładamy, że „ramowość” wyliczana ze wzorów (6.1) (por. wzór podany niżej) jest odcinkowo-liniową funkcją trzech parametrów: 1) stosunku rozstawienia usztywnień do szerokości płyty w kierunku x , A ; 2) stosunku rozstawienia usztywnień do szerokości płyty w kierunku y , B oraz 3) stosunku wysokości usztywnień do grubości płyty, HT . Charakter zależności pokazują rys. 6a i 6b. Jak wynika z rys. 6 R może przybierać następujące wartości:

$$(6.1) \quad \begin{array}{ll} R_1 = 360 * A - 100 & \text{dla } A < 0,25, \\ R_1 = 240,09 * A - 70,02 & \text{dla } 0,25 < A < 0,33, \\ R_1 = 540,0 * A - 170 & \text{dla } A > 0,33, \\ R_2 = 360 * B - 100 & \text{dla } B < 0,25, \\ R_2 = 240,09 * B - 70,02 & \text{dla } 0,25 < B < 0,33, \\ R_2 = 540,0 * B - 170 & \text{dla } B > 0,33, \\ R_3 = 1,8 * HT - 100 & \text{dla } HT < 50, \\ R_3 = 0,4 * HT - 30 & \text{dla } 50 < HT < 100, \\ R_3 = 0,9 * HT - 80 & \text{dla } HT > 10, \\ R = (R_1 + R_2 + R_3)/3. & \end{array}$$

Wybór modelu obliczeniowego uzależniamy od następującego kryterium: $R > 10$ — stosujemy model ramowy, $R < -10$ — stosujemy model ortotropowy, $-10 \leq R \leq 10$ — stosujemy obydwie modele i wyniki poddajemy dodatkowej weryfikacji, która może polegać na dokładnym policzeniu takich płyt metodami analitycznymi lub metodą elementów skończonych. W przypadkach szczególnie ważnych można zaproponować odpowiedni program badań eksperymentalnych.

Jak zaznaczyliśmy na początku pracy wyniki obliczeń płyt usztywnionych o cechach geometrycznych kwalifikujących je do przedziału stykowego, wstępnie określonego zakresem parametru $R \in (-10, 10)$, nie mogą być uważane za poprawne i mogą mieć jedynie charakter szacunkowy. W rozdziale 4 wspomnieliśmy o zasadniczych różnicach dzielących płytę izotropową, płytę usztywnioną, płytę ortotropową i ramę przestrzenną. Pomimo tych różnic inżynierowie oczekują jasnych kryteriów wyboru modelu obliczeniowego w każdym przypadku. Sądzę, że zaproponowana metoda wyboru modelu jest jasna i jednoznaczna w szerokim zakresie parametru R , a więc może być zastosowana do większości płyt usztywnionych — od oczywistych przypadków skrajnych płyt usztywnionych ramo- lub płyto-podobnych, po granice przedziału stykowego. Praktyczna aplikacja zaproponowanej metody sprowadza się więc jedynie do właściwego określenia przedziału stykowego. Nie włączyliś-

my tego problemu do pracy, gdyż jest to właściwie zadanie dla doświadczonych projektantów. Autor przypuszcza, że rozwiązanie tego zagadnienia można byłoby uzyskać drogą studium parametrycznego, porównując stopień rozbieżności wyników uzyskiwanych dla płyt o kolejnych wartościach parametru R z przedziału stykowego przy każdorazowym wykorzystaniu obydwu modeli. Charakter przebiegu znormalizowanych odchyłek wybranych odpowiedzi konstrukcji od wartości średnich powinien umożliwić jednoznaczny identyfikację zakresu przedziału stykowego jak też dać ważne informacje o popełnianym błędzie.

7. PRZYKŁADY OBLICZEŃ

PRZYKŁAD 1

Obliczmy prostokątną płytę utwierdzoną na brzegach i usztywnioną w dwu kierunkach łącznie ośmioma usztywnieniami. Sztywność płyty jest tak dobrana, aby odpowiadająca jej płyta ortotropowa miała takie wymiary jak w przykładzie z pracy [5]. Sprężyste ugięcie takiej płyty obciążonej na całej powierzchni obciążeniem równomiernie rozłożonym można obliczyć ze wzoru

$$(7.1) \quad w = 0,00126 qa^4/D = 0,0742.$$

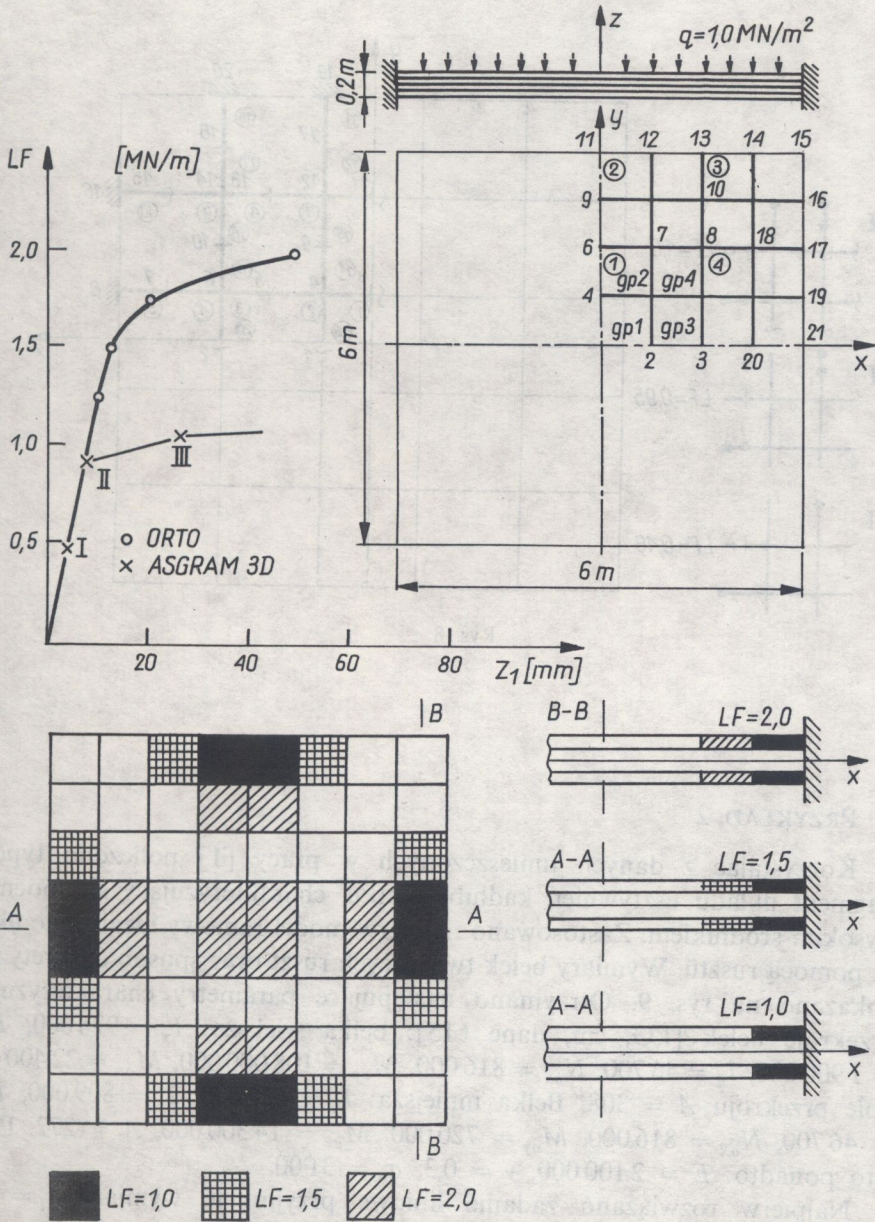
Tę samą płytę policzyliśmy programem ORTO przy następujących danych [MN, m]:

$$\begin{aligned} E_x = E_y = 30\,000, \quad G_{xy} = G_{zx} = G_{yz} = 11\,540, \\ \sigma_{0x} = \sigma_{0y} = \sigma_{0z} = 30, \quad \tau_{0xy} = \tau_{0xz} = \tau_{0yz} = 17,32, \\ E_p = 300, \quad G_p = 100. \end{aligned}$$

Wymiary płyty i wyniki obliczeń naniesiono na rys. 7. Ugięcie środka płyty wyniosło $w = 0,0735$. Na rys. 7 zaznaczyliśmy rozwój stref plastycznych spowodowanych wzrostem obciążenia.

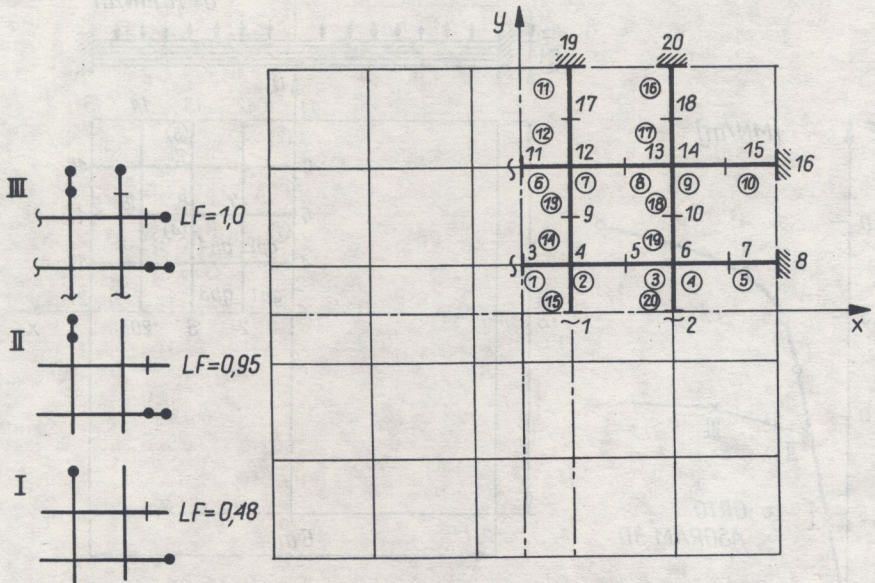
Następnie zbudowaliśmy model ramowy płyty. Przyjęliśmy następujące parametry przekroju prostokątnego belek [MN, m]: wymiary przekroju $0,22 \times 0,8$, $E = 30\,000$, $\nu = 3$, $\sigma_0 = 30$, momenty bezwładności przekroju: $I_x = 0,0096$, $I_y = 0,000887$, $I_z = 0,0183$, graniczne siły przekrojowe: $N_{0x} = 6,6$, $M_{0x} = 1,65$.

Sposób dyskretyzacji, a także kolejność tworzenia się przegubów plastycznych, pokazano na rys. 8. Przemieszczenia węzła nr 1 (którego położenie nie odpowiada dokładnie środkowi płyty) wyniosłoby $w_c = 0,0577$ m dla rozwiązania sprężystego przy mnożniku obciążenia $LF = 1$. Różnica w stosunku do rozwiązania programu ORTO wynosi 21,5%. Zauważmy, że położenie



Rys. 7

kolejnych przegubów plastycznych odpowiada dokładnie rozwojowi stref plastycznych w płycie ortotropowej. Pierwsze uplastycznienie występuje jednak znacznie wcześniej. Można to wytłumaczyć różnicami w kształcie konstrukcji oraz różną liczbą punktów podparcia.



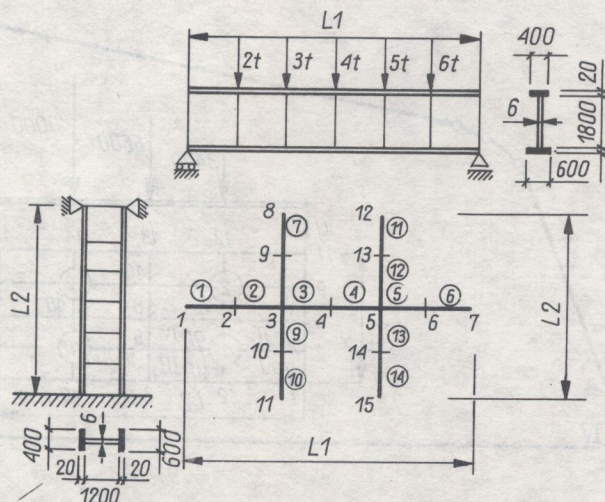
Rys. 8

PRZYKŁAD 2

Korzystając z danych umieszczonych w pracy [1] policzono typowy fragment układu usztywnień kadłuba statku, charakteryzujący się mocnym, wysokim średnikiem. Zastosowano najpierw model ramowy idealizując układ za pomocą rusztu. Wymiary belek tworzących ruszt oraz sposób dyskretyzacji pokazano na rys. 9. Otrzymano następujące parametry charakteryzujące przekroje belek [kG, cm, dane t15]: belka większa: $I_x = 976\,000$, $I_y = 1\,900\,000$, $I_z = 46\,700$, $N_{ox} = 816\,000$, $M_{oy} = 108\,000\,000$, $M_{oz} = 22\,400\,000$, pole przekroju $A = 308$. Belka mniejsza: $I_x = 428\,000$, $I_y = 809\,000$, $I_z = 46\,700$, $N_{ox} = 816\,000$, $M_{oy} = 720\,000$, $M_{oz} = 14\,300\,000$, $A = 272$. Przyjęto ponadto: $E = 2\,100\,000$, $\nu = 0,3$, $\sigma_0 = 3\,000$.

Najpierw rozwiązano zadanie liniowe przyjmując wymiary $L_1 = 900$, $L_2 = 600$. Ugięcie węzła środkowego wyniosło 0,059 mm.

Następnie wykorzystano model ortotropowy aproksymując układ za pomocą płyty ortotropowej o sztywnościach D_x i D_y równych odpowiednim sztywnościom zginania belek. Schemat dyskretyzacji pokazano na rys. 10a. Fikcyjne grubości płyty w obydwu kierunkach wyniosły odpowiednio $h_1 = 15,12$, $h_2 = 12,51$. Do obliczeń przyjęliśmy płytę o grubości $H = (h_1 + h_2)/2 = 13,8$. Zakładając równość podatności płyty w obydwu kierunkach $E_2 * h_1^3 = E_1 * h_2^3$, zastępcze moduły sprężyste obliczymy ze wzorów



Rys. 9

$$E_1 = \frac{E h_1^3}{2} = 27\,632,$$

$$E_2 = \frac{E h_2^3}{2} = 15\,685.$$

Odpowiednie moduły Kirchhoffa wyniosą: $G_1 = E_1/2,6 = 10\,627,7$, $G_2 = E_2/2,6 = 6\,032,7$, $G_{12} = G_{21} = 8\,332$.

Ugięcie środka płyty obliczone programem ORTO dla tak przygotowanych danych wyniosło 0,077 mm (dane t_6 , wyniki w6). Podobnie więc jak w przykładzie 1 otrzymaliśmy wynik różniący się od rozwiązania programem ASGRAM-3D o 23%.

PRZYKŁAD 3

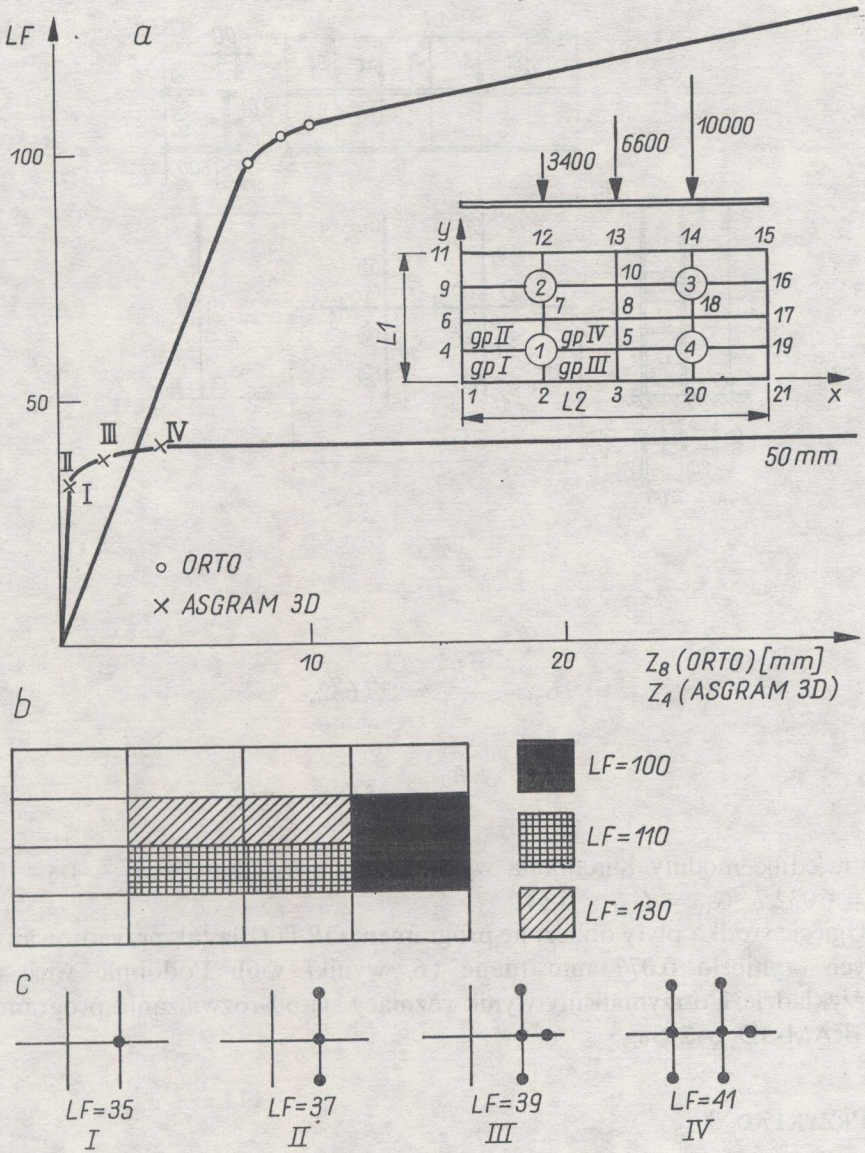
Płytę jak w Przykładzie 2, lecz różniącą się wymiarem $L = 400$ cm policzono aż do zniszczenia jako ruszt, a następnie jako płytę ortotropową.

Wymiary zastępcze płyty obliczone tak samo jak w przykładzie 2 wyniosły

$$h_1 = 17,31, \quad h_2 = 12,51, \quad h = 14,91.$$

Odpowiednie moduły sprężystości są równe: $E_1 = 32\,863$, $E_2 = 12\,438$, $G_1 = 12\,640$, $G_2 = 4\,784$, $G_{12} = 8\,712$.

Na rys. 10a pokazano ugięcie środka płyty wyliczone dla kolejnych przyrostów obciążenia dla obydwu modeli. Podobnie jak w Przykładzie 1



Rys. 10

wcześniejsze uplastycznienie wystąpiło dla modelu ramowego. Rozwój stref plastycznych w płycie ortotropowej obrazuje rys. 10b, kolejność zaś powstawania przegubów plastycznych (rys. 10c).

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Y. UEDA, S. M. H. RASHED, *The idealized structural unit method and its application to deep girder structures*, Comp. and Struct., **18**, 2, 1984.
2. M. OLEJNIK, W. SOSNOWSKI, A. ZACHARSKI, *Liniowa analiza płyt usztywnionych metodą elementów skończonych*, Prace IPPT, **13**, 1985.
3. J. BAUER, M. KLEIBER, W. SOSNOWSKI, *Numeryczna analiza dwuteowych sprężysto-plastycznych ram płaskich z uwzględnieniem wyboczenia środników, Część I. Podstawy analizy oraz analiza sprężysto-plastyczna*, Rozpr. Inżyn., **33**, 3, 353-357, 1985.
4. W. SOSNOWSKI, *ASGRAM-3D — numeryczna analiza sprężysto-plastycznych ram przestrzennych*, Prace IPPT, **5**, 1987.
5. E. HINTON, D. R. J. OWEN, *Finite element software for plates and shells*, Pineridge Press, Swansea 1984.
6. A. OSTAPENKO, *Ultimate strength design of wide stiffened plates loaded axially and normally*, Report 164 UC, Transport and Road Research Laboratory, England 1974.
7. D. R. J. OWEN, E. HINTON, *Finite elements in plasticity: Theory and practice*, Prineridge Press, Swansea 1980.
8. A. BORKOWSKI, *Statyczna analiza układów prętowych w zakresie sprężystym i plastycznym*, PWN, Warszawa — Poznań 1985.
9. W. SOSNOWSKI, *Statyczna analiza płaskich sprężysto-plastycznych ram dwuteowych z uwzględnieniem możliwości lokalnego wyboczenia środników*, Prace IPPT, **18**, 1982.
10. O. C. ZIENKIEWICZ, *The finite element method in engineering*, Mc Graw Hill, London 1977.
11. S. WIEWIÓRSKI, K. WITUSZYŃSKI, *Konstrukcja stalowego kadłuba okrętowego*, Wydawnictwo Morskie, Gdańsk 1977.
12. F. HAYES-ROTH i inni, *Building Expert Systems*, Addison-Wesley, Reading 1983.
13. M. KWIECIŃSKI, *Projektowanie żelbetowych układów płytowo-żebrowych metodami teorii plastyczności*, PWN, Warszawa 1986.

РЕЗЮМЕ

МЕТОДЫ УПРОЩЕННОГО АНАЛИЗА УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛИТЫ С ПРИДАННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

Целью работы является представление результатов очередного этапа реализации некоторой концепции упрощенного анализа плит с приданной жесткостью, нагруженных в многих направлениях, методом структурных элементов, при применении двух моделей рассматриваемой конструкции: ортотропной и рамочной. Учтены материальные нелинейности, применяя процедуру в приростах, закон пластического течения и метод г. наз. обобщенных пластических шарниров. По мнению автора содержит, кроме программы АСГРАМ-3Д., следующих три новых элемента: 1) сравнение обеих моделей плиты в линейном и нелинейном интервалах, приводящие к следствию, что из-за качественно разных результатов в многих случаях нелегитимно применять обе модели: 2) обсуждение применяемой в методе пластических шарниров аддитивности упругой и пластической частей вектора полных перемещений элемента рамы и некоторые следствия, касающиеся ошибки, вытекающей из обобщения на упруго-пластический интервал гипотезы малых вращений, принимаемой для балок Тимошенко: 3) предложение модификации ширины рабочей полосы плиты с приданной жесткостью, трактованной как

диперазованная функция нагружения в упруго-пластическом интервале. Функцию „справочника”, облегчающего подбор соответствующей модели и т.наз. критических параметров, исполняет эксперная программа ЭКССАСП.

SUMMARY

APPROXIMATE ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF STIFFENED PLATES

In this paper two algorithms are presented for approximate elastic-plastic analysis of stiffened plates subjected to lateral and/or in-plane loads. The stiffened plate is treated either as an equivalent orthotropic plate or as space frame. The last case corresponds to a discrete beam idealization in which the plate is represented by effective flanges interacting with the stiffeners according to simple beam theory. Some numerical examples of different plates under incremental loading up to collapse are given and comparisons with previous solutions indicating the range of the applicability of both models are presented. Three elements are believed to be new in this paper: 1) comparisons of the two models in nonlinear range are made and, as a conclusion, the necessity of application of both models of real structure is confirmed because of different results obtained in elastic and elastic-plastic ranges; 2) additivity of two part (elastic and plastic) of the total generalized displacement is discussed and some error estimates in terms of known Timoshenko beam hypothesis are given; 3) formulas for modification of effective breadth values treated as linearized functions of loading in elastic-plastic range are proposed.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji w dniu 13 kwietnia 1987 r.
