

PROBLEMY MATEMATYCZNEGO MODELOWANIA PROCESU SUSZENIA ZAWILŻONYCH OŚRODKÓW KAPILARNO-POROWATYCH NA PRZYKŁADZIE SUSZONEJ KONWEKCYJNIE PŁYTY

STEFAN JAN KOWALSKI i GRZEGORZ MUSIELAK (POZNAŃ)

Celem pracy jest ilustracja modelu konwekcyjnego suszenia zawilżonych ośrodków porowatych na przykładzie kapilarno-porowatej płyty. Przyjęty model różni się od dotychczas stosowanych uwzględnieniem odkształcalności porowatego ciała, towarzyszącej procesowi suszenia. W pracy dyskutuje się sposób formułowania warunków brzegowych dla wybranego zagadnienia w okresie podgrzewania i w okresie tzw. stałej prędkości suszenia. Omawia się też niektóre problemy związane z rozwiązywaniem odpowiadającego przyjętemu modelowi sprzężonego układu równań różniczkowych. Efektem końcowym pracy jest przedstawienie przebiegu temperatury i potencjału wilgoci w czasie w wybranych punktach płyty oraz rozkładów tych wielkości w płycie w wybranych chwilach czasu. W konkluzji stwierdza się, że uwzględnienie odkształcalności materiału suszonego w modelowaniu matematycznym manifestuje się spowolnieniem procesu suszenia.

OZNACZENIA

x [m]	współrzędna miejsca,
t [s]	czas,
u [m]	wektor przemieszczenia ośrodka porowatego,
M [N/m ²]	moduł sprężystości postaciowej ośrodka porowatego,
A [N/m ²]	moduł odkształcenia objętościowego ośrodka porowatego,
c_s [J/m ² K]	współczynnik pojemności cieplnej potencjału wilgoci,
c_0 [J/m ³]	współczynnik pojemności wilgotnościowej potencjału wilgoci,
ϑ [K]	temperatura względna,
ϱ_0 [kg/m ³]	gęstość suchego ciała porowatego,
μ [J/kg]	potencjał wilgoci,
Λ_m [kg s/m ³]	współczynnik przewodności wilgoci,
Λ [W/m K]	współczynnik przewodności ciepła,
c_v [J/m ³ K]	ciepło właściwe ośrodka przy stałej objętości,
c_p [J/m ³ K]	ciepło właściwe ośrodka przy stałym ciśnieniu,
α_s [1/K]	współczynnik liniowej rozszerzalności termicznej ośrodka,
α_0 [1]	współczynnik liniowej rozszerzalności wilgotnościowej ośrodka,
θ [1]	wilgotność właściwa,
T [N/m ²]	tensor naprężeń,
E [1]	tensor odkształceń materiału suszonego,
I [1]	tensor jednostkowy,
q [W/m ²]	strumień ciepła,
η [kg/s m ²]	strumień masy wilgoci,

α_T [W/m ² K]	współczynnik konwekcyjny przewodzenia ciepła,
α_m [kg s/m ⁴]	współczynnik konwekcyjny przewodzenia masy,
r [J/kg]	ciepło przemiany fazowej,
l [m]	wymiar charakterystyczny (połowa grubości płyty),
$\bar{x}, \bar{t}, \bar{\vartheta}, \bar{\mu},$	zmiennne bezwymiarowe odpowiednio: współrzędna miejsca, czas, temperatura, potencjał wilgoci.

1. WSTĘP

Proces suszenia jest zjawiskiem złożonym. W sposób naturalny dzieli się na kilka okresów: okres podgrzewania materiału, okres stałej prędkości suszenia, okres zmiennej prędkości suszenia, w którym wyróżnia się jeszcze okresy stałych i niestałych spadków prędkości suszenia. Ta złożoność zjawiska implikuje określone trudności w jego matematycznym modelowaniu, a także w sposobie rozwiązywania równań właściwych danemu modelowi.

Dotychczas korzysta się w literaturze z bardzo uproszczonych modeli, w których ze względu na trudności matematyczne pomija się szereg zjawisk. Jednym z nich jest odkształcalność suszonego materiału — zjawisko sprzężone z procesem suszenia. Uwzględnienie odkształcalności w procesie suszenia jest ważne z kilku powodów. Po pierwsze, zawilżenie materiału wiąże się z powiększeniem jego wymiarów liniowych („pęcznienie”) a suszenie ze zjawiskiem odwrotnym. Po drugie, suszenie przebiega zwykle w podwyższonych temperaturach, a wiele materiałów suszonych charakteryzuje się znaczną rozszerzalnością termiczną. Po trzecie wreszcie, niejednorodność odkształcalności materiałów suszonych wywołuje określone stany naprężeń, a znajomość tych stanów i ich lokalizacja jest niezbędna przy analizie przyczyn często występujących pęknięć wyrobów suszonych. Odkształcalność materiału suszonego wiąże się też ze zmianą wymiarów porów, co rzutuje na przemieszczanie się w nich wilgoci.

Próbę systematycznego ujęcia termodynamiki procesu suszenia z uwzględnieniem deformacji dla początkowego okresu suszenia, tj. dla okresu, gdy powierzchnia parowania pokrywa się z powierzchnią brzegową, podjęto w pracy [1].

Niniejsza praca stanowi uzupełnienie wyżej wymienionej i ma na celu zilustrowanie przedstawionego w pracy [1] modelu na przykładzie konwekcyjnego suszenia zawilżonej, kapilarno-porowatej płyty. W szczególności dyskutuje się tu sposób formułowania warunków brzegowych dla wybranego zagadnienia w okresie podgrzewania i w okresie tzw. stałej prędkości suszenia oraz różne problemy związane z rozwiązywaniem odpowiadającego temu modelowi sprzężonego układu równań. Celem ostatecznym jest przedstawienie przebiegu zmian temperatury i potencjału wilgoci w czasie w wybranych punktach płyty oraz rozkłady tych wielkości w płycie w wybranych chwilach czasu z uwzględnieniem i bez uwzględnienia odkształcalności płyty. W pracy

akcentuje się również konieczność zmiany warunków brzegowych dla poszczególnych okresów procesu suszenia i ilustruje się różnice wyników, jakie występują gdy tego fizycznego faktu się nie uwzględnia. W konkluzji stwierdza się, że uwzględnienie odkształceń materiału suszonego w modelowaniu matematycznym manifestuje się pewnym spowolnieniem procesu suszenia i to zarówno w zmianach potencjału wilgoci jak i w prędkości przyrostu temperatury.

2. RÓWNANIA I WARUNKI BRZEGOWE PROBLEMU

Przedmiotem rozważań jest nieograniczona płyta. Określa się zmiany stanu płyty podczas jej konwekcyjnego suszenia, przy czym w pracy nie analizuje się pełnego procesu suszenia. Obliczenia prowadzi się opierając się na modelu przedstawionym w pracy [1]. Dla jasności i uwypuklenia wprowadzanych uproszczeń przytacza się tu pełny układ równań, który następnie redukuje się do postaci jednowymiarowej i wyraża we współrzędnych bezwymiarowych.

Wymienione wyżej procesy opisuje następujący, liniowy układ równań podwójnie sprzężonych postaci, [1]:

$$(2.1) \quad M \nabla^2 \mathbf{u} + \left(M + A - \frac{\gamma_\theta^2}{c_\theta} \right) \text{grad div } \mathbf{u} - \left(\gamma_\vartheta - \gamma_\theta \frac{c_\vartheta}{c_\theta} \right) \text{grad } \vartheta - \varrho_0 \frac{\gamma_\theta}{c_\theta} \text{grad } \mu = 0,$$

$$k \nabla^2 \mu = \dot{\mu} + (\gamma_\theta \text{div } \dot{\mathbf{u}} - c_\vartheta \dot{\vartheta}) / \varrho_0,$$

$$\kappa \nabla^2 \vartheta = \dot{\vartheta} + \kappa_E \text{div } \dot{\mathbf{u}} - \kappa_\theta \dot{\mu},$$

gdzie \mathbf{u} oznacza pole przemieszczeń materiału suszonego, μ oznacza pole potencjału wilgoci a ϑ pole temperatury względnej. Znajomość tych trzech pól w pełni opisuje stan materiału suszonego.

Dla skrócenia zapisów w równaniach (2.1) wprowadzono następujące oznaczenia:

$$(2.2) \quad k = \Lambda_m c_\theta / \varrho_0^2, \quad \kappa = \Lambda / c_v^*, \quad c_v^* = c_v + \frac{c_p - c_v}{3\alpha_\vartheta} \frac{c_\vartheta^2}{\gamma_\vartheta c_\theta},$$

$$\kappa_E = \frac{c_p - c_v}{3\alpha_\vartheta c_v^*} \left(1 - \frac{c_\vartheta \gamma_\theta}{c_\theta \gamma_\vartheta} \right), \quad \kappa_\theta = \frac{c_p - c_v}{3\alpha_\vartheta c_v^*} \frac{c_\vartheta \varrho_0}{\gamma_\vartheta c_\theta},$$

$$\gamma_\vartheta = (2M + 3A) \alpha_\vartheta, \quad \gamma_\theta = (2M + 3A) \alpha_\theta,$$

przy czym Λ i Λ_m oznaczają współczynniki przewodzenia odpowiednio ciepła i wilgoci, c_ϑ i c_θ oznaczają współczynniki pojemności cieplnej i wilgotnościowej potencjału wilgoci, c_v i c_p — ciepło właściwe przy stałej objętości i stałym ciśnieniu brane na jednostkę objętości ośrodka, α_ϑ i α_θ — współczynniki

liniowej rozszerzalności termicznej i wilgotnościowej, M i A — stałe Lamégo dla materiału suszonego oraz ϱ_0 oznacza gęstość materiału suszonego.

Znając pola \mathbf{u} , ϑ , μ możemy określić rozkład wilgotności właściwej θ według wzoru [1]:

$$(2.3) \quad \theta = \theta_r + (\varrho_0 \mu - c_\vartheta \vartheta + \gamma_\theta \operatorname{div} \mathbf{u}) / c_\theta.$$

a następnie rozkład naprężeń \mathbf{T} odpowiadających danemu stanowi termomechanicznemu i rozkładowi wilgoci, czyli

$$(2.4) \quad \mathbf{T} = 2M\mathbf{E} + [A \operatorname{tr} \mathbf{E} - \gamma_\vartheta \vartheta - \gamma_\theta (\theta - \theta_r)] \mathbf{I},$$

gdzie

$$(2.5) \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \mathbf{u} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})^T), \quad \operatorname{tr} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{u}$$

jest tensorem małych odkształceń materiału suszonego. Można również określić strumienie ciepła i masy wilgoci, które są proporcjonalne odpowiednio do gradientu temperatury i do gradientu potencjału wilgoci

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{q} &= -\Lambda \operatorname{grad} \vartheta, \\ \eta &= -\Lambda_m \operatorname{grad} \mu. \end{aligned}$$

Przyjmuje się, że poszukiwane wielkości polowe są funkcjami jednej zmiennej przestrzennej x i czasu t . Wtedy układ równań (2.1) redukuje się do postaci

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \left(2M + A - \frac{\gamma_\theta^2}{c_\theta} \right) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \left(\gamma_\vartheta^2 - \gamma_\theta \frac{c_\vartheta}{c_\theta} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \varrho_0 \frac{\gamma_\theta \partial \mu}{c_\theta \partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} &= 0, \\ k \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \left(\gamma_\theta \frac{\partial^2 u_x}{\partial t \partial x} - c_\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right) / \varrho_0, \\ \kappa \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \kappa_E \frac{\partial^2 u_x}{\partial t \partial x} - \kappa_\theta \frac{\partial \mu}{\partial t}. \end{aligned}$$

Jeśli pierwsze z równań (2.7) scałkuje się względem x i założy się, że płyta jest swobodna, tzn. brak jest wstępnych naprężeń mechanicznych, to otrzyma się (por. też [2], wzór 15):

$$(2.8) \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = a_\vartheta \vartheta + a_\mu \mu,$$

gdzie

$$(2.9) \quad \begin{aligned} a_g &= \left(\gamma_g - \gamma_\theta \frac{c_g}{c_\theta} \right) / \left(2M + A - \frac{\gamma_\theta^2}{c_\theta} \right), \\ a_\mu &= \varrho_0 \frac{\gamma_\theta}{c_\theta} / \left(2M + A - \frac{\gamma_\theta^2}{c_\theta} \right). \end{aligned}$$

Po zróżniczkowaniu równania (2.8) względem czasu i podstawieniu pochodnej do równań przewodnictwa cieplnego i termodyfuzji otrzymuje się kolejne uproszczenie układu równań:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} k \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} &= (1 + \gamma_\theta a_\mu / \varrho_0) \frac{\partial \mu}{\partial t} + (\gamma_\theta a_g - c_g) \frac{\partial g}{\partial t} / \varrho_0, \\ \kappa \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= (1 + \kappa_E a_g) \frac{\partial g}{\partial t} + (\kappa_E a_\mu - \kappa_\theta) \frac{\partial \mu}{\partial t}. \end{aligned}$$

Jak widać proces suszenia w tym szczególnym przypadku opisany jest układem dwóch sprzężonych równań różniczkowych, w których wpływ odkształceń przejawia się jedynie przez obecność współczynników a_μ , a_g , κ_E i γ_θ w tym układzie.

Warunki brzegowe dla ciała suszonego, nawet przy ustalonych warunkach suszenia, nie są stałe. Przy matematycznym modelowaniu procesu suszenia należy więc wziąć pod uwagę, że poszczególnym fazom procesu suszenia odpowiadają zarówno inne warunki brzegowe, jak również inne równania opisujące przebieg zjawiska wewnątrz materiału. Przedstawione wyżej równania mogą być wykorzystane jedynie dla przypadku, gdy przemiany fazowe wewnątrz obszaru są pomijalnie małe w stosunku do przemian fazowych zachodzących na brzegu. Poprawne są więc w okresie podgrzewania materiału suszonego i w tzw. pierwszym okresie suszenia, charakteryzującym się stałą prędkością suszenia. Do tych okresów ogranicza się też rozważania w niniejszej pracy.

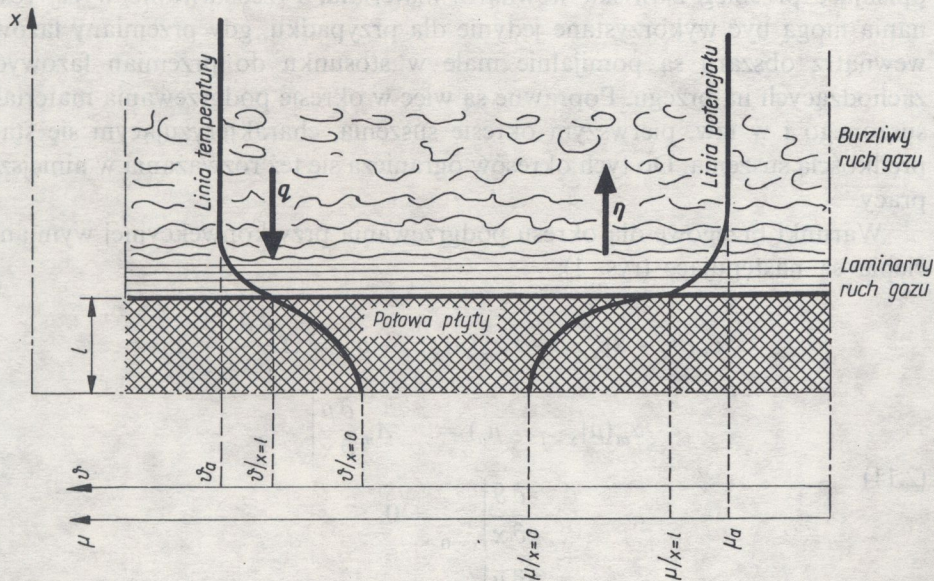
Warunki brzegowe dla okresu podgrzewania przy konwekcyjnej wymianie ciepła są następujące (rys. 1):

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \alpha_T (g_a - g|_{x=l}) - r \alpha_m (\mu|_{x=l} - \mu_a) &= A \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{x=l}, \\ \alpha_m (\mu|_{x=l} - \mu_a) &= -A_m \frac{\partial \mu}{\partial x} \Big|_{x=l}, \\ \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \\ \frac{\partial \mu}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0. \end{aligned}$$

przy czym α_T i α_m oznaczają współczynniki przejmowania ciepła i masy, r oznacza ciepło parowania a ϑ_a i μ_a oznaczają temperaturę i potencjał czynnika suszącego. Pierwszy z warunków (2.11) wyraża strumień ciepła dostarczany do materiału i jest równy różnicy ciepła dostarczanego konwekcyjnie i ciepła wyprowadzanego wraz z parą. Drugi warunek wyraża ciągłość strumieni masy wilgoci na powierzchni brzegowej. Warunki trzeci i czwarty wynikają z symetrii zagadnienia i wyrażają brak przepływu ciepła i masy przez powierzchnię środkową płyty.

Dla pierwszego okresu suszenia, który rozpoczyna się od momentu ustalenia się temperatury na brzegu (temperatura mokrego termometru), mamy następujące warunki brzegowe:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \vartheta|_{x=l} &= \vartheta_M = \text{const}, \\ \alpha_m(\mu|_{x=l} - \mu_a) &= -\Lambda_m \left. \frac{\partial \mu}{\partial x} \right|_{x=l}, \\ \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0, \\ \left. \frac{\partial \mu}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0. \end{aligned}$$



Rys. 1

Wysokość temperatury i potencjału wilgoci w chwili początkowej przyjmujemy za stałe, tj:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \vartheta(x, 0) &= \vartheta_0 = \text{const}, \\ \mu(x, 0) &= \mu_0 = \text{const}. \end{aligned}$$

3. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA WE WSPÓRZĘDNYCH BEZWYMIAROWYCH. SPOSÓB ROZWIĄZANIA

Dla uproszczenia obliczeń numerycznych i ułatwienia analizy wyników wprowadzamy następujące współrzędne i parametry bezwymiarowe:

$$(3.1) \quad \bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{t} = \frac{\kappa t}{l^2}, \quad \bar{\vartheta} = \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\vartheta_a - \vartheta_0}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_a - \mu_0}.$$

Układ równań (2.10) we współrzędnych bezwymiarowych przyjmuje postać:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \text{Lu } \bar{\mu}'' &= (1 - S_1) \text{Pn } \bar{\vartheta}' + (1 + S_2) \dot{\bar{\mu}}, \\ \bar{\vartheta}'' &= (1 + S_3) \bar{\vartheta}' + (\text{Fe} - S_4) \bar{\mu} / \text{Pn}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \text{Lu} &= \frac{k}{\kappa}, & \text{Pn} &= \frac{c_s}{\varrho_0} \frac{\vartheta_a - \vartheta_0}{\mu_0 - \mu_a}, & \text{Fe} &= \kappa_\theta c_s / \varrho_0, \\ S_1 &= \gamma_\theta a / c_\theta, & S_3 &= \kappa_E a_s, \\ S_2 &= \gamma_\theta a_\mu / \varrho_0, & S_4 &= \kappa_E a_\mu c_s / \varrho_0. \end{aligned}$$

Prim i kropka nad symbolem oznaczają odpowiednio różniczkowanie po bezwymiarowej zmiennej przestrzennej i bezwymiarowym czasie.

Warunki brzegowe dla okresu podgrzewania (2.11) we współrzędnych bezwymiarowych są następujące:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \text{Bi}(1 - \bar{\vartheta}|_{x=1}) - \text{Bi}_m \text{Po}(1 - \bar{\mu}|_{x=1}) / \text{Pn} &= \bar{\vartheta}'|_{x=1}, \\ \text{Bi}_m(1 - \bar{\mu}|_{x=1}) &= \bar{\mu}'|_{x=1}, \\ \bar{\vartheta}'|_{x=0} &= 0, \\ \bar{\mu}'|_{x=0} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.5) \quad \text{Bi} = \alpha_T l / \Lambda, \quad \text{Bi}_m = \alpha_m l / \Lambda_m, \quad \text{Po} = r \Lambda_m c_s / \Lambda \varrho_0,$$

przy czym Bi jest liczbą Biota dla wymiany ciepła a Bi_m liczbą Biota dla wymiany masy. Warunki brzegowe dla pierwszego okresu suszenia (por. (2.12)) różnić się będą od warunków (3.4) tym zastrzeżeniem, że temperatura materiału suszonego jest stała oraz stała jest również prędkość suszenia (stały gradient potencjału wilgoci). Dla pierwszego okresu mamy więc

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \bar{\vartheta}|_{x=1} &= \frac{\vartheta_M - \vartheta_0}{\vartheta_a - \vartheta_0} = \bar{\vartheta}_M = \text{const}, \\ \bar{\mu}'|_{x=1} &= Bi \frac{Pn}{Po} (1 - \bar{\vartheta}_M) = \text{const}, \\ \bar{\vartheta}'|_{x=0} &= 0, \\ \bar{\mu}'|_{x=0} &= 0. \end{aligned}$$

Warunki początkowe we współrzędnych bezwymiarowych są jednorodne:

$$(3.7) \quad \bar{\vartheta}(x, 0) = 0, \quad \bar{\mu}(x, 0) = 0.$$

W obliczeniach pominięto wpływ temperatury na pole odkształceń, tzn. przyjęto $a_s = 0$ (por. (2.8)). Podobne założenie uczyniono również w pracy [2]. Implikuje ono automatycznie zerowanie się współczynnika κ_E . Przyjęte uproszczenie nie wpływa jakościowo, a jedynie ilościowo na opis zjawiska. Czyni się je ze względu na ułatwienie dyskusji dotyczącej wpływu odkształcalności na proces suszenia. Po tym uproszczeniu występuje bowiem tylko jeden parametr S_2 , który wyraża ten wpływ. Tak więc układ równań, który będzie rozwiązywany ma postać

$$(3.8) \quad \begin{aligned} Lu \bar{\mu}'' &= Pn \bar{\vartheta}' + (1 + S_2) \bar{\mu}, \\ \bar{\vartheta}'' &= \bar{\vartheta} + Fe \bar{\mu} / Pn. \end{aligned}$$

Przyjęcie $S_2 = 0$ oznacza pominięcie wpływu odkształceń na parametry $\bar{\mu}$ i $\bar{\vartheta}$. Taki model analizowano w pracach [2, 3 i 4].

Układ równań (3.8) rozwiązywano metodą różnic skończonych za pomocą algorytmu Cranka–Nicholsona [5]. Przedział zmienności \bar{x} podzielono na 100 odcinków, a przyrost czasu (krok czasowy) uzależniono od zmian prędkości przyrostu temperatury $\bar{\vartheta}$ i potencjału wilgoci $\bar{\mu}$ (dla małych zmian krok czasowy był podwajany). W celu sprawdzenia dokładności algorytmu stosowano go za pomocą klasycznego równania przewodnictwa cieplnego i porównano otrzymane wyniki z rozwiązaniem dokładnym [6]. Maksymalne rozbieżności wyników były rzędu 1% a średnie w przekroju rzędu 3%.

Obliczenia wykonano za pomocą komputera HP-86B.

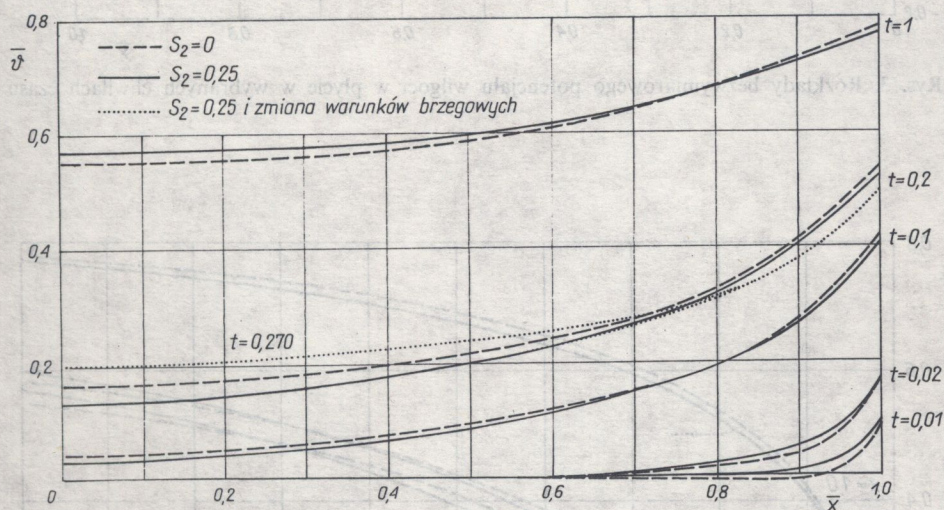
4. WYNIKI OBLICZEŃ I ICH ANALIZA

W celu wykonania obliczeń przyjęto na podstawie danych literaturowych następujące stałe

$$\begin{array}{lll} Lu = 0,07, & Pn = 0,20, & Fe = 0,60, \\ Bi = 8,00, & Bi_m = 15,00, & Po = 0,10 \end{array}$$

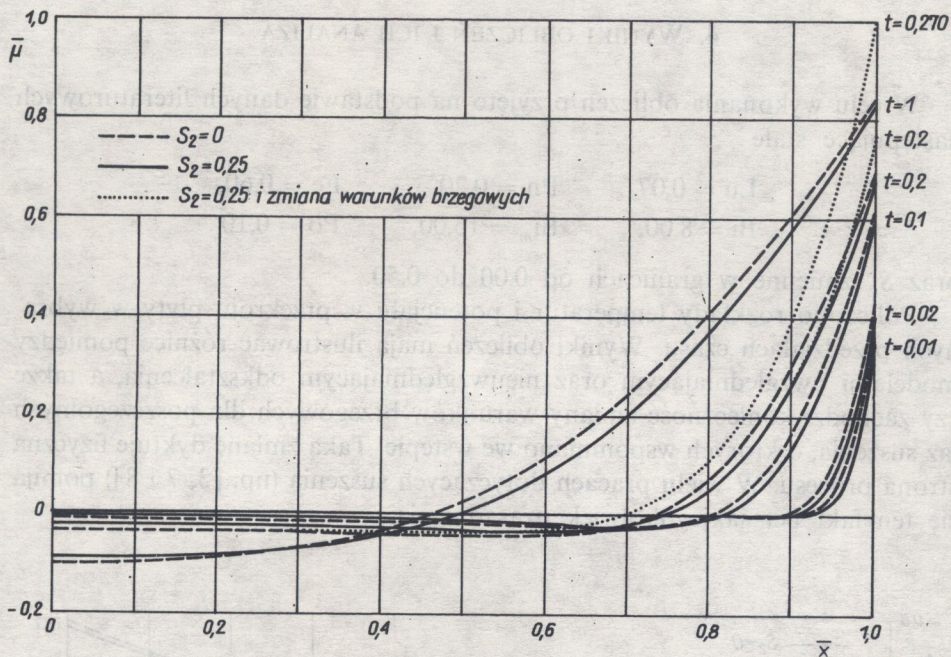
oraz S_2 zmienne w granicach od 0.00 do 0.50.

Policzono rozkłady temperatur i potencjału w przekroju płyty w wybranych przedziałach czasu. Wyniki obliczeń mają ilustrować różnice pomiędzy modelami uwzględniającym oraz nieuwzględniającym odkształcenia, a także czy zachodzi konieczność zmiany warunków brzegowych dla poszczególnych faz suszenia, o których wspomniano we wstępie. Taką zmianę dyktuje fizyczna strona procesu. W wielu pracach dotyczących suszenia (np. [3, 7 i 8]) pomija się ten fakt bez jakiegokolwiek uzasadnienia.

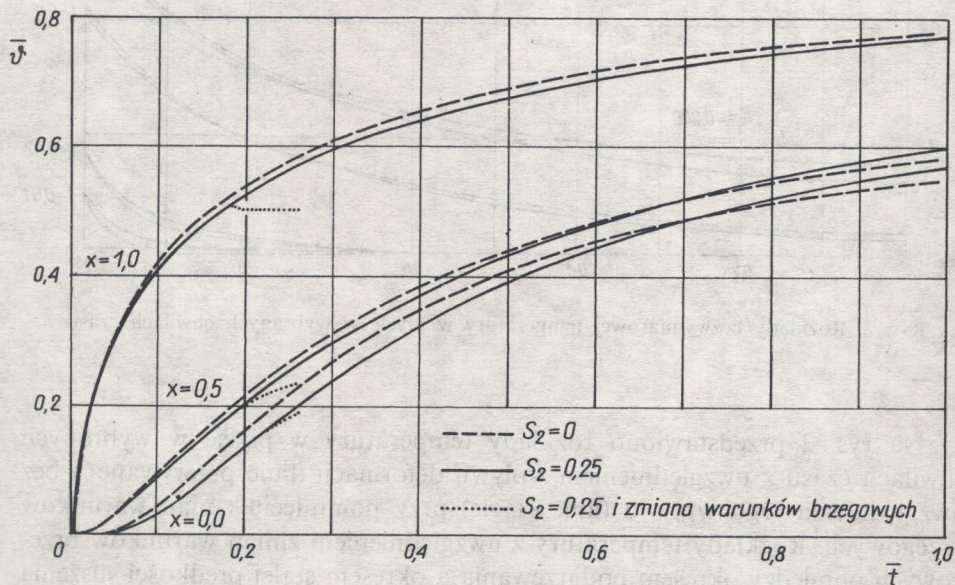


Rys. 2. Rozkłady bezwymiarowej temperatury w płycie w wybranych chwilach czasu

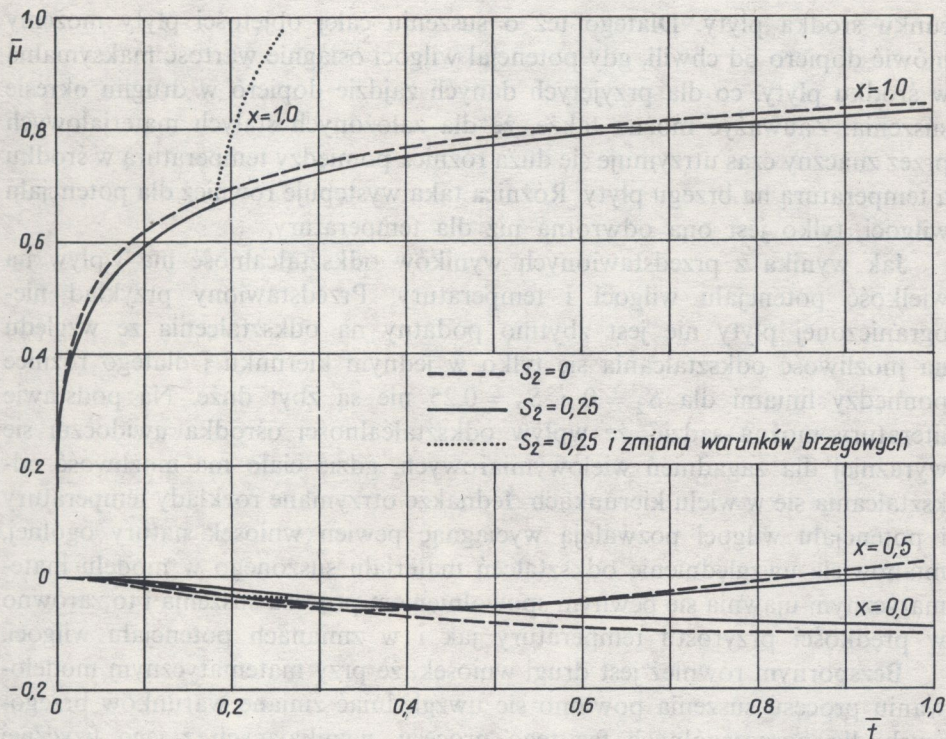
Na rys. 2 przedstawiono rozkłady temperatury w płycie w wybranych chwilach czasu z uwzględnieniem wpływu deformacji (linie przerywane) i bez uwzględnienia tego wpływu (linie ciągłe) przy pominięciu zmian warunków brzegowych. Rozkłady temperatury z uwzględnieniem zmian warunków brzegowych pomiędzy okresem podgrzewania a okresem stałej prędkości suszenia ilustrują na tym rysunku linie kropkowe. Analogicznie rozkłady dla potencjału wilgoci przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Rozkłady bezwymiarowego potencjału wilgoci w płycie w wybranych chwilach czasu



Rys. 4. Zmiany bezwymiarowej temperatury w czasie w wybranych punktach płyty



Rys. 5. Zmiany bezwymiarowego potencjału wilgoci w czasie w wybranych punktach płyty

Na rys. 4 przedstawiono zmiany temperatury w czasie w trzech punktach płyty: na brzegu, w 1/4 od brzegu i w połowie płyty. Linie ciągłe ($S_2 = 0$) i linie przerywane ($S_2 = 0,25$) przedstawiają wykresy bez zmiany warunków brzegowych, natomiast linie kropkowe ($S_2 = 0,25$) dotyczą przypadku gdy po okresie podgrzewania następuje zmiana warunku brzegowego z (3.4) na (3.6). Na rys. 5 przedstawiono analogicznie do rys. 4 wykresy dla potencjału wilgoci.

Otrzymane dla przyjętych danych krzywe można pokrótce zinterpretować następująco. Temperatura płyty (rys. 2 i 4) wzrasta od temperatury początkowej do temperatury otoczenia, przy czym jest ona stale wyższa na brzegu niż w środku. Odwrotnie zachowuje się potencjał wilgoci (rys. 3 i 5), który przy brzegu płyty maleje szybciej niż w jej środku. We wnętrzu płyty ma nawet miejsce wzrost potencjału wilgoci powyżej jego wartości początkowej, co spowodowane jest dostarczaniem energii (ciepła) do wnętrza płyty większym od jej wyprowadzania wraz z wypływającą masą wilgoci (wzrost temperatury powoduje wzrost potencjału wilgoci — (por. (2.2)). Jest to przyczyną powstawania lokalnego maksimum potencjału wilgoci, które wraz z upływem czasu przesuwa się w stronę środka płyty (rys. 3). Ekstremum to powoduje występowanie termodyfuzyjnego (efekt Soreta) strumienia masy ((2.6)₂) w kie-

runku środka płyty. Dlatego też o suszeniu całej objętości płyty możemy mówić dopiero od chwili, gdy potencjał wilgoci osiągnie wartość maksymalną w środku płyty, co dla przyjętych danych zajdzie dopiero w drugim okresie suszenia. Zauważyć można także, że dla założonych stałych materiałowych przez znaczny czas utrzymuje się duża różnica pomiędzy temperaturą w środku a temperaturą na brzegu płyty. Różnica taka występuje również dla potencjału wilgoci, tylko jest ona odwrotna niż dla temperatury.

Jak wynika z przedstawionych wyników odkształcalność ma wpływ na wielkość potencjału wilgoci i temperatury. Przedstawiony przykład nieograniczonej płyty nie jest zbyt podatny na odkształcenia ze względu na możliwość odkształcania się tylko w jednym kierunku i dlatego różnice pomiędzy liniami dla $S_2 = 0$ i $S_2 = 0,25$ nie są zbyt duże. Na podstawie literatury można sądzić, że wpływ odkształcalności ośrodka uwidoczni się wyraźniej dla zagadnień wielowymiarowych, gdzie ciało ma możliwość odkształcania się w wielu kierunkach. Jednakże otrzymane rozkłady temperatury i potencjału wilgoci pozwalają wyciągnąć pewien wniosek natury ogólnej, mianowicie uwzględnienie odkształceń materiału suszonego w modelu matematycznym ujawnia się pewnym spowolnieniem procesu suszenia i to zarówno w prędkości przyrostu temperatury jak i w zmianach potencjału wilgoci.

Bezspornym również jest drugi wniosek, że przy matematycznym modelowaniu procesu suszenia powinno się uwzględniać zmianę warunków brzegowych dla poszczególnych faz tego procesu, wynikających z jego fizycznej natury. Różnice wyników (jak to pokazano na rysunkach 2, 3, 4 i 5) są znaczne.

5. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozważano możliwie prosty, jednowymiarowy przykład, łatwy zarówno do wykonywania obliczeń jak i do interpretacji wyników. Badanie problemów dwu- lub trójwymiarowych sprowadza się do rozwiązania nie dwóch lecz czterech lub pięciu równań różniczkowych sprzężonych. Próby rozwiązywania takiego układu równań za pomocą metody elementów skończonych były już podejmowane w literaturze, między innymi w pracy [9]. Rozwój techniki komputerowej, jaki ma miejsce w ostatnim czasie, sprzyja podejmowaniu prób rozwiązywania tego typu złożonych układów równań.

W celu uniknięcia w czasie obliczeń niestabilności numerycznych spowodowanych nieciągłością warunków początkowo-brzegowych autorzy wprowadzili dodatkowe strumienie ciepła i masy wygładzające proces w bardzo krótkim, początkowym okresie. Wielkości tych strumieni określonych funkcjami o postaci

$$q^* = (Bi - Bi_m Po/Pn) \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta} \right),$$

$$\eta^* = \text{Bi}_m \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta} \right)$$

były dodane do prawych stron równań (3.4)_{1,2} w przedziale czasowym $\bar{t} \in \langle 0, \Delta \rangle$, co dało w wyniku ciągłość warunków początkowo-brzegowych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. J. KOWALSKI, *Thermomechanics of constant drying rate period*, Arch. Mech., **39**, 1–2, 1987.
2. R. W. LEVIS, M. STRADA, G. COMINI, *Drying-induced stresses in porous bodies*, Int. J. Num. Meth. Engng., **11**, 1175–1184, 1977.
3. G. COMINI, R. W. LEWIS, *A numerical solution of two-dimensional problems involving heat and mass transfer*, Int. J. Heat Mass Transfer, **19**, 1387–1392, 1976.
4. R. W. LEWIS, K. MORGAN, H. R. THOMAS, M. STRADA, *Drying-induced stresses in porous bodies – An elasto-viscoplastic model*, Computer. Meth. Appl. Mech. Engng., **20**, 291–301, 1979.
5. D. POTTER, *Metody obliczeniowe fizyki, fizyka komputerowa*, PWN, Warszawa 1982.
6. B. STANISZEWSKI, *Wymiana ciepła, podstawy teoretyczne*, PWN, Warszawa 1980.
7. A. V. LUKOV, *System of differential equations of heat and mass transfer in capillary – porous bodies (review)*, Int. J. Heat Mass Transfer, **18**, 1–14, 1975.
8. S. MICHAŁOWSKI, S. MITURA, W. KAMIŃSKI, *The application of mathematical method to describe the kinetics of drying*, Hungarian J. Industrial Chemistry, **10**, 387–394, 1982.
9. J. WERES, *Modelowanie procesów termodyfuzji w międzywęzłowych roztworach stałych przy pomocy metody elementów skończonych w przestrzeni i w czasie*, Praca doktorska, IPPT, Poznań 1979.

РЕЗЮМЕ

ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА СУШКИ ОТСЫРЕЛЫХ КАПИЛЛЯРНО-ПОРИСТЫХ СРЕД НА ПРИМЕРЕ СУШЕННОЙ КОНВЕКЦИОННЫМ ОБРАЗОМ ПЛИТЫ

Целью работы является иллюстрация модели конвекционной сушки отсыревших пористых сред на примере капиллярно-пористой плиты. Принятая модель отличается от применяемых до сих пор учетом деформируемости пористого тела, сопутствующей процессу сушки. В работе обсуждается способ формулировки граничных условий для избранной задачи в период подогрева и в период т.наз. постоянной скорости сушки. Обсуждаются тоже некоторые проблемы, связанные с решением отвечающей принятой модели, сопряженной системы дифференциальных уравнений. Результирующим эффектом работы является представление диаграмм изменений температуры и потенциала влажности во времени в избранных точках плиты, а также диаграмм этих величин в плите в избранных моментах времени. В заключении констатируется, что учет деформируемости сушеного материала в математическом моделировании проявляется замедлением процесса сушки.

SUMMARY

MATHEMATICAL MODELLING OF THE DRYING PROCESS
OF CAPILLARY-POROUS MEDIA;
EXAMPLE OF CONVECTIONAL DRYING OF A PLATE

The paper presents the model of convectional drying of porous media using the example of a capillary-porous plate. The model assumed differs from those used before by taking into account the deformation of the porous body occurring during the drying process. The method of formulation of the boundary conditions is discussed both in the heating period and in the constant drying-rate period. Certain problems of solution of the coupled differential equations governing the behaviour of the model are discussed. Several diagrams illustrate the temperature and humidity potential variation in time at several points of the plate, and distribution of those parameters in the plate at several time instants. Deformability of the material subject to drying is shown to decelerate the drying process.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji w dniu 2 stycznia 1987 r.