

ROZWIĄZANIE ZAGADNIENÍ IDENTYFIKACJI I POMIARU W DZIEDZINIE CZASU

ANDRZEJ J. POPŁAWSKI (ŁÓDŹ)

W pracy przedstawiono założenia i metodę przeprowadzania symulacji eksperymentalnej w dziedzinie czasu. Zagadnienie identyfikacji oraz zadanie pomiaru rozwiązano dwuetapowo, najpierw wykorzystując rachunek wariacyjny, a następnie równania całkowe Volterra. W celu sprawdzenia proponowanej procedury przeprowadzono komputerową symulację eksperymentu na przykładzie matematycznego, nieliniowego modelu samochodu, znajdującego się w ruchu ustalonym. Przeprowadzenie obliczeń w omawianej metodzie w dziedzinie czasu umożliwia poddawanie symulacji eksperymentalnej obiektów dynamicznych o dowolnej liczbie sygnałów wejściowych i wyjściowych.

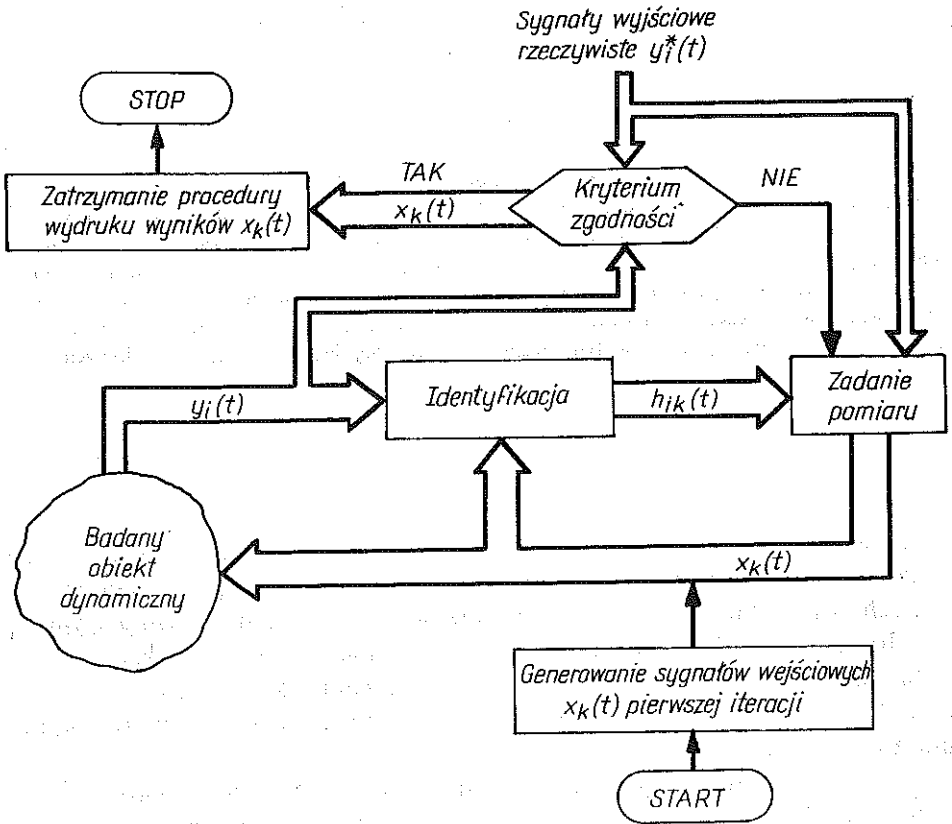
1. WSTĘP

Rozwiązywanie zagadnień identyfikacji i zadania pomiaru (zwanego też zagadnieniem odwrotnym) jest jednym z podstawowych etapów pracy współczesnych konstruktorów. Zagadnienia te występują w badaniach symulacyjnych i w celu przeprowadzenia identyfikacji rozwiązanie ich jest konieczne.

Badania symulacyjne dzielimy na symulację komputerową oraz symulacyjne badania eksperymentalne. Różnice występujące między tymi rodzajami badań opisano dokładnie w [2].

Symulacja komputerowa ma na celu dokładną analizę rozpatrywanego zagadnienia lub procesu; możemy jej dokonać opierając się na rozważaniach teoretycznych, prowadzonych za pomocą maszyn cyfrowych lub analogowych. Symulacyjne badania eksperymentalne mają natomiast za zadanie przebadanie rzeczywistego obiektu, jego reakcji na warunki eksploatacji rzeczywistej, możliwie najwierniej odtworzone w laboratorium. W pracy tej przedstawione zostaną metody rozwiązań zagadnienia identyfikacji oraz zadania pomiaru w dziedzinie czasu, pod kątem bezpośredniego zastosowania ich w symulacji eksperymentalnej. Pod pojęciem symulacji eksperymentalnej rozumiemy proces tworzenia sygnałów wejściowych, koniecznych do przeprowadzenia eksperymentalnych badań symulacyjnych. Proces formułowania sygnałów wejściowych (lub modelu sygnałów wejściowych) za pomocą symulacji eksperymentalnej ma na celu takie ich ukształtowanie, aby sygnały wyjściowe rzeczywiste (tzn. otrzymane w rzeczywistych warunkach eksploatacyjnych obiektu) zgadzały się,

z przyjętym kryterium zgodności, z sygnałami wejściowymi otrzymanymi w laboratorium. Przyjmuje się wówczas [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 i 13], że w laboratorium zapewnione zostały optymalne warunki rzeczywistej pracy obiektu. Ogólny schemat symulacji eksperymentalnej na podstawie sygnałów wyjściowych przedstawia rys. 1. Do badanego obiektu wprowadza się wyge-



Rys. 1

nerowane w generatorze sygnały wejściowe $x_k(t)$ pierwszej iteracji, w efekcie których otrzymuje się sygnały wyjściowe $y_i(t)$. Następnym krokiem jest sprawdzenie czy spełnione jest kryterium zgodności (porównanie otrzymanych sygnałów wyjściowych $y_i(t)$ z sygnałami rzeczywistymi $y_i^*(t)$). W przypadku spełnienia kryterium zgodności procedura zostaje przerwana, a sygnały wejściowe $x_k(t)$ są sygnałami właściwymi do realizacji badań symulacji eksperymentalnej. W przypadku niespełnienia kryterium zgodności, na podstawie sygnałów $y_i(t)$ oraz $x_k(t)$ przeprowadza się identyfikację obiektu, a następnie rozwiązując zagadnienie odwrotne wyznaczamy nowe sygnały wejściowe $x_k(t)$ do następnej

iteracji. Procedura iteracyjna prowadzona jest tak długo, aż osiągnięta zostanie wymagana zgodność sygnałów $y_i(t)$ oraz $y_i^*(t)$. Zagadnienie symulacji eksperymentalnej rozwiązane może być w dziedzinie częstości [1, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 i 13] lub w dziedzinie czasu [2]. Porównanie metod częstościowych i rozwiązujących zagadnienie w dziedzinie czasu podane zostało w [2] (z korzyścią dla tych ostatnich) i obecnie przedstawione zostanie rozwinięcie metod czasowych do rozwiązania odwrotnego oraz identyfikacji. Ponieważ obiekty poddawane symulacji eksperymentalnej są najczęściej obiektami nieliniowymi, nie istnieje więc w odniesieniu do nich pojęcie transmitancji ani przepustowości; dlatego też przyjęto w realizacji symulacji procedurę iteracyjną, gdzie w czasie każdej iteracji przeprowadza się kolejne identyfikacje, będące jednym z etapów (metoda kolejnych przybliżeń) na drodze do uzyskania poszukiwanych sygnałów wejściowych.

W przypadku gdy badany obiekt jest liniowy, procedura symulacji eksperymentalnej ogranicza się do przebiegu jednej iteracji, która kończąc się rozwiązaniem zagadnienia odwrotnego daje poszukiwane sygnały wejściowe.

2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

Proponowana procedura symulacji eksperymentalnej dotyczy różnych układów dynamicznych (mechanicznych, elektrycznych itp.), posiadających dowolne, skończone liczby sygnałów wejściowych oraz wyjściowych, co znacznie zwiększa obszar jej stosowalności. Spełnione muszą być następujące założenia: 1) badany obiekt ma m sygnałów wyjściowych ($i = 1, 2, \dots, m$) oraz n sygnałów wejściowych $x_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$); badany przedział czasowy wynosi $[0, T]$ czyli $t \in [0, T]$; 2) sygnały wejściowe $x_k(t)$ jak i sygnały wyjściowe $y_i(t)$ z badanego obiektu powinny być jednoznacznie określone i ciągłe w badanym przedziale czasowym $t \in [0, T]$ oraz w każdej chwili $\tau \in [0, T]$; 3) sygnały $x_k(t)$ oraz $y_i(t)$ powinny mieć ciągłe pochodne w przedziale czasowym $t \in [0, T]$ oraz w każdej chwili $\tau \in [0, T]$. Założenia te wynikają z metody rozwiązywania równań całkowych w czasie procesu identyfikacji oraz zadania pomiaru. Przedstawiana metoda symulacji eksperymentalnej nie posiada założeń ograniczających obszary nieustaloności ruchu, liczby sygnałów wyjściowych lub wartości sygnałów $x_k(t)$ oraz $y_i(t)$ [2]. Przejdźmy zatem do omawiania realizacji zagadnień identyfikacji i pomiaru.

3. IDENTYFIKACJA OBIEKTU

Celem procesu identyfikacji jest wyznaczenie charakterystyk impulsowych $h_{ik}(t)$ badanego obiektu, gdzie wielkościami znanymi są sygnały wejściowe $x_k(t)$ oraz wyjściowe $y_i(t)$.

Sygnały wyjściowe $y_i(t)$ przedstawić można w postaci

$$(3.1) \quad y_i(t) = \sum_{k=1}^n \int_0^t h_{ik}(\tau) x_k(t-\tau) d\tau = \sum_{k=1}^n f_{ik}(t), \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie

$$(3.2) \quad f_{ik}(t) = \int_0^t h_{ik}(\tau) x_k(t-\tau) d\tau = \int_0^t x_k(\tau) h_{ik}(t-\tau) d\tau.$$

Funkcjonał jakości identyfikacji określamy w następujący sposób:

$$(3.3) \quad Q_s[f_{ik}(t)] = \int_0^T \sum_{i=1}^m \left[\sum_{k=1}^n f_{ik}(t) - y_i(t) \right]^2 dt = \int_0^T H[f_{ik}(t)] dt.$$

Na podstawie (3.3) wyznaczyć trzeba funkcje $f_{ik}(t)$ takie, dla których przyjęty funkcyjonał $Q_s[f_{ik}(t)]$ osiąga minimum, czyli wyznaczamy ekstremale, które na pewno istnieją dla danego funkcyjonału [3].

Ekstremale wyznaczamy drogą rozwiązania zadania izoperymetrycznego, gdyż poszukiwanie ekstremum zwykłego nie daje pożądaných efektów [2 i 3]. Warunek izoperymetryczny jest w postaci

(3.4)

$$\int_0^T [f_{ik}(t) - y_i(t)]^2 dt = \int_0^T P_{ik}[f_{ik}(t)] dt = \varepsilon_{ik}, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n,$$

gdzie parametry ε_{ik} , przyjęte *a priori* i decydujące o dokładności przeprowadzanej identyfikacji, spełniać muszą następujące warunki:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} & -\varepsilon_{ik} = 10^{-3} \max \{x_{k\max}(t), y_{i\max}(t)\}, \\ & -\varepsilon_{ik} > 0 \\ & -\varepsilon_{ik} \neq \varepsilon_{js}, \quad i \neq j, \quad k \neq s. \end{aligned}$$

Wprowadzając funkcyjonał pomocniczy $Q_s[f_{ik}(t)]$ i przy zachowaniu warunków (3.5), sprowadzamy zadanie izoperymetryczne do zadania na ekstremum warunkowe:

$$(3.6) \quad \underline{Q}_s[f_{ik}(t)] = \int_0^T \left\{ H[f_{ik}(t)] + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} P_{ik}[f_{ik}(t)] \right\} dt = \int_0^T I[f_{ik}(t)] dt,$$

gdzie

$$(3.7) \quad I[f_{ik}(t)] = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{k=1}^n f_{ik}(t) - y_i(t) \right]^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} [f_{ik}(t) - y_i(t)]^2.$$

Wartości λ_{ik} wyznacza się na podstawie warunku izoperymetrycznego (3.4).

Równania Eulera dla (3.6) mają postać

$$(3.8) \quad \frac{\partial}{\partial f_{ik}(t)} I[f_{ik}(t)] - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial f_{ik}(t)} I[f_{ik}(t)] \right\} = 0.$$

Uwzględniając (3.7) w (3.8) otrzymujemy, po wykonaniu obliczeń rachunkowych, układ równań

$$(3.9) \quad f_{ij}(t) (\lambda_{ij} + 1) + \sum_{k=1}^{j-1} f_{ik}(t) + \sum_{k=j+1}^n f_{ik}(t) = y_i(t) (\lambda_{ij} + 1), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

na podstawie którego wyznaczyć można funkcje $f_{ik}(t)$.

Mając zatem znane $f_{ik}(t)$ oraz biorąc pod uwagę (3.2), otrzymujemy $i \times k$ równań całkowych Volterry pierwszego rodzaju z niewiadomą funkcją $h_{ik}(t)$

$$(3.10) \quad f_{ik}(t) = \int_0^t h_{ik}(\tau) x_k(t-\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n.$$

Różniczkując obustronnie (3.10) względem zmiennej t , otrzymujemy równanie

$$(3.11) \quad x_k(t-\tau)|_{t=\tau} h_{ik}(t) + \int_0^t \frac{\partial x_k(t-\tau)}{\partial t} h_{ik}(\tau) d\tau = \frac{df_{ik}(t)}{dt},$$

które jest równaniem Volterry drugiego rodzaju i które przedstawiamy w postaci

$$(3.12) \quad h_{ik}(t) = \frac{1}{x_k(0)} \left[\frac{df_{ik}(t)}{dt} - \int_0^t \frac{\partial x_k(t-\tau)}{\partial t} h_{ik}(\tau) d\tau \right].$$

Rozwiązanie równania (3.12) jest w postaci [14 i 15]:

$$(3.13) \quad h_{ik}(t) = \frac{1}{x_k(0)} \left[\frac{df_{ik}(t)}{dt} - \frac{1}{x_k(0)} \int_0^t \frac{df_{ik}(t)}{dt} \Big|_{t=\tau} R\left(t, \tau, -\frac{1}{x_k(0)}\right) d\tau \right].$$

Wielkość $R\left(t, \tau, -\frac{1}{x_k(0)}\right)$ jest jądrem rozwiązującym, zbieżnym dla każdej wartości parametru $-\frac{1}{x_k(0)}$ i wynosi [14 i 15]

$$(3.14) \quad R\left(t, \tau, -\frac{1}{x_k(0)}\right) = \frac{\partial x_k(t-\tau)}{\partial t} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{x_k(0)}\right)^r N_{rk}(t, \tau),$$

gdzie

$$(3.15) \quad N_{rk}(t, \tau) = \int_{\tau}^t \frac{\partial x_k(t-s)}{\partial t} N_{r-1k}(s, \tau) ds,$$

$$(3.16) \quad N_{1k}(t, \tau) = \int_{\tau}^t \frac{\partial x_k(t-s)}{\partial t} \frac{\partial x_k(t-\tau)}{\partial t} \Big|_{t=s} ds.$$

Mamy więc równanie

$$(3.17) \quad h_{ik}(t) = \frac{1}{x_k(0)} \left\{ \frac{df_{ik}(t)}{dt} - \frac{1}{x_k(0)} \int_0^t \frac{df_{ik}(t)}{dt} \Big|_{t=\tau} \left[\frac{\partial x_k(t-\tau)}{\partial t} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{x_k(0)} \right)^r N_{rk}(t, \tau) \right] d\tau, \right.$$

które jednoznacznie wyznacza szukane funkcje $h_{ik}(t)$. W równaniach (3.12)–(3.17) założyliśmy milcząco, że zachodzi własność

$$(3.18) \quad x_k(0) = x_k(t-\tau) \Big|_{t=\tau} \neq 0.$$

Warunek (3.18) niekoniecznie musi zachodzić w rzeczywistości, co wcale nie ogranicza zakresu stosowalności proponowanej metody. Przyjmijmy zatem, że

$$(3.19) \quad x_k(0) = x_k(t-\tau) \Big|_{t=\tau} = 0.$$

Wtedy równanie (3.11) przyjmie postać

$$(3.20) \quad \int_0^t \frac{\partial x_k(t-\tau)}{\partial t} h_{ik}(\tau) d\tau = \frac{df_{ik}(t)}{dt}$$

i jest ono nadal równaniem całkowym Voltery pierwszego rodzaju. Różniczkując (3.20) po raz drugi względem zmiennej t , otrzymujemy

$$(3.21) \quad \frac{\partial x_k(t-\tau)}{\partial t} \Big|_{t=\tau} h_{ik}(t) + \int_0^t \frac{\partial^2 x_k(t-\tau)}{\partial t^2} h_{ik}(\tau) d\tau = \frac{d^2 f_{ik}(t)}{dt^2}.$$

Równanie (3.21) będzie równaniem Voltery drugiego rodzaju w przypadku gdy

$$(3.22) \quad \frac{dx_k(t)}{dt} \Big|_{t=0} \neq 0$$

i jego rozwiązanie przeprowadza się w sposób podany wcześniej.

W przypadku gdy warunek (3.22) nie zachodzi, równanie (3.21) jest nadal równaniem Voltery pierwszego rodzaju i należy zróżniczkować je obustronnie względem zmiennej t po raz trzeci. Różniczkowanie przeprowadza się tyle razy, aż równanie Voltery pierwszego rodzaju przyjmie postać równania Voltery drugiego rodzaju. Ogólnie dla przypadku, gdy $x_k(t)$ dla $t=0$ zeruje się aż do l -tej pochodnej włącznie, czyli w przypadku gdy

$$(3.23) \quad x_k(t) \Big|_{t=0} = \frac{\partial^u x_k(t)}{\partial t^u} \Big|_{t=0} = 0 \quad \text{dla} \quad u = 1, 2, \dots, l$$

rozwiązanie przedstawia się w postaci

$$(3.24) \quad h_{ik}(t) = \frac{1}{\left. \frac{\partial^{l+1} x_k(t)}{\partial t^{l+1}} \right|_{t=0}} \left\{ \frac{d^{l+2} f_{ik}(t)}{dt^{l+2}} \frac{1}{\left. \frac{\partial^{l+1} x_k(t)}{\partial t^{l+1}} \right|_{t=0}} \times \right. \\ \left. \times \int_0^t \frac{d^{l+2} f_{ik}(t)}{dt^{l+2}} \Big|_{t=\tau} \left[\frac{\partial^{l+2} x_k(t-\tau)}{\partial t^{l+2}} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\left. \frac{\partial^{l+1} x_k(t)}{\partial t^{l+1}} \right|_{t=0}} \right)^r N_{rk}(t, \tau) \right] d\tau \right\},$$

$$(3.25) \quad N_{rk}(t, \tau) = \int_0^t \frac{\partial^{l+2} x_k(t-s)}{\partial t^{l+2}} N_{r-1k}(s, \tau) ds,$$

$$(3.26) \quad N_{1k}(t, \tau) = \int_0^t \frac{\partial^{l+2} x_k(t-\tau)}{\partial t^{l+2}} \Big|_{t=s} \frac{\partial^{l+2} x_k(t-s)}{\partial t^{l+2}} ds.$$

Na podstawie wzorów (3.24) lub w najprostszym przypadku (3.17) wyznaczyć można bezpośrednio sygnały impulsowe $h_{ik}(t)$ badanego układu dynamicznego.

Znając wartości $h_{ik}(t)$ przejść można do rozwiązywania zadania pomiaru.

4. ZADANIE POMIARU

Znając wartości funkcji $h_{ik}(t)$ oraz sygnał wyjściowy $y_i(t)$ możliwe staje się rozwiązanie zadania pomiaru, którego celem jest wyznaczenie sygnałów wejściowych $x_k(t)$. Do celów symulacji eksperymentalnej jako sygnał wyjściowy przyjmuje się sygnał wyjściowy rzeczywisty $y_i^*(t)$ zmierzony w trakcie badań obiektu w jego rzeczywistych warunkach eksploatacyjnych.

Na podstawie znanych wielkości $x_k(t)$ oraz $y_i^*(t)$ budujemy zatem funkcjonal jakości zadania pomiaru:

$$(4.1) \quad Q_s[f_{ik}(t)] = \int_0^T \sum_{i=1}^m \left[\sum_{k=1}^n f_{ik}(t) - y_i^*(t) \right]^2 dt = \int_0^T F[f_{ik}(t)] dt.$$

Szukając ekstremali funkcjonału (4.1) postępujemy tak samo jak w przypadku rozwiązywania zagadnienia identyfikacji (p. 3).

Przyjmując warunek izoperymetryczny w postaci (3.4) oraz funkcjonal pomocniczy w postaci (3.6), wstawiając oczywiście w obu warunkach na miejsce $y_i(t)$ funkcję $y_i^*(t)$, na podstawie równań Eulera (3.8) wyznaczamy układ równań

$$(4.2) \quad f_{ij}(t)(\lambda_{ij} + 1) + \sum_{k=1}^{j-1} f_{ik}(t) + \sum_{k=j+1}^n f_{ik}(t) = y_i(t)(\lambda_{ij} + 1),$$

pozwalający na znalezienie funkcji $f_{ik}(t)$. Znając funkcje $f_{ik}(t)$ oraz biorąc pod uwagę (3.2), możemy napisać

$$(4.3) \quad f_k^{sr}(t) = (1/m) \sum_{i=1}^m f_{ik}(t),$$

czyli

$$(4.4) \quad f_k^{sr}(t) = (1/m) \int_0^t x_k(\tau) \sum_{i=1}^m h_{ik}(t-\tau) d\tau,$$

gdzie

$$(4.5) \quad H_k(t-\tau) = \sum_{i=1}^m h_{ik}(t-\tau).$$

Podobnie do przypadku zagadnienia identyfikacji, otrzymaliśmy układ k równań całkowych (4.4) Volterry pierwszego rodzaju z funkcjami $x_k(t)$ jako nieznajomymi.

Rozwiązanie równań całkowych przebiega tak samo jak w zadaniu identyfikacji badanego obiektu, (3.11) — (3.26), a odpowiadające im wzory, będące rozwiązaniami (4.4) i wyznaczające szukane sygnały wejściowe $x_k(t)$, są postaci

$$(4.6) \quad \text{dla} \quad H_k(t) \Big|_{t=0} \neq 0$$

$$(4.7) \quad x_k(t) = \frac{1}{H_k(t)|_{t=0}} \left[\frac{df_k^{sr}(t)}{dt} - \frac{1}{H_k(t)|_{t=0}} \int_0^t \frac{df_k^{sr}(t)}{dt} \Big|_{t=\tau} R \left(t, \tau, -\frac{1}{H_k(t)|_{t=0}} \right) d\tau \right],$$

gdzie jądro rozwiązujące, zbieżne dla każdej wartości parametru

$-\frac{1}{H_k(t)|_{t=0}}$ [14, 15] wynosi

$$(4.8) \quad R \left(t, \tau, -\frac{1}{H_k(t)|_{t=0}} \right) = \frac{\partial H_k(t-\tau)}{\partial t} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{H_k(t)|_{t=0}} \right)^r N_{rk}(t, \tau),$$

$$(4.9) \quad N_{rk}(t, \tau) = \int_{\tau}^t \frac{\partial H_k(t-s)}{\partial t} N_{r-1k}(s, \tau) ds,$$

$$(4.10) \quad N_{1k}(t, \tau) = \int_{\tau}^t \frac{\partial H_k(t-s)}{\partial t} \frac{\partial H_k(t-\tau)}{\partial t} \Big|_{t=s} ds,$$

Tak więc

$$(4.11) \quad x_k(t) = \frac{1}{H_k(t)|_{t=0}} \left\{ \frac{df_k^{sr}(t)}{dt} - \frac{1}{H_k(t)|_{t=0}} \int_0^t \frac{df_k^{sr}(t)}{dt} \Big|_{t=\tau} \left[\frac{\partial H_k(t-\tau)}{\partial t} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{H_k(t)|_{t=0}} \right)^r N_{rk}(t, \tau) \right] d\tau \right\}$$

w przypadku, gdy

$$H_k(t) \Big|_{t=0} = \frac{dH_k(t)}{dt^u} \Big|_{t=0} = 0$$

dla $u = 1, 2, \dots, l$, czyli gdy funkcje $H_k(t)$ zerują się w chwili początkowej $t = 0$ wraz z l -tą pochodną włącznie. Poprzez $l+1$ krotnie zróżniczkowanie obustronne równań (4.4) względem zmiennej t i doprowadzenie ich do równań całkowych Volterry drugiego rodzaju, otrzymuje się rozwiązanie [14 i 15] w postaci

$$(4.12) \quad x_k(t) = \frac{1}{\frac{d^{l+1}H_k(t)}{dt^{l+1}} \Big|_{t=0}} \left\{ \frac{d^{l+2}f_k^{sr}(t)}{dt^{l+2}} \frac{1}{\frac{d^{l+1}H_k(t)}{dt^{l+1}} \Big|_{t=0}} \int_0^t \frac{d^{l+2}f_k^{sr}(t)}{dt^{l+2}} \Big|_{t=\tau} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\partial^{l+2}H_k(t-\tau)}{\partial t^{l+2}} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\frac{d^{l+1}H_k(t)}{dt^{l+1}} \Big|_{t=0}} \right)^r N_{rk}(t, \tau) \right] d\tau \right\},$$

gdzie

$$(4.13) \quad N_{rk}(t, \tau) = \int_{\tau}^t \frac{\partial^{l+2}H_k(t-s)}{\partial t^{l+2}} N_{r-1k}(s, \tau) ds,$$

$$(4.14) \quad N_{1k}(t, \tau) = \int_{\tau}^t \frac{\partial^{l+2}H_k(t-s)}{\partial t^{l+2}} \frac{\partial^{l+2}H_k(t-\tau)}{\partial t^{l+2}} \Big|_{t=s} ds.$$

Funkcje (4.11) oraz (4.12) pozwalają na jednoznaczne wyznaczenia szukanych sygnałów wejściowych $x_k(t)$ na podstawie znanych wielkości $y_i^*(t)$ oraz $h_{ik}(t)$.

Kryterium zgodności, mające na celu wymuszenie z góry określonej, wymaganej dokładności procesu symulacji eksperymentalnej, przyjęto w postaci

$$(4.15) \quad \int_0^T [y_i(t) - y_i^*(t)]^2 dt \leq \delta_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

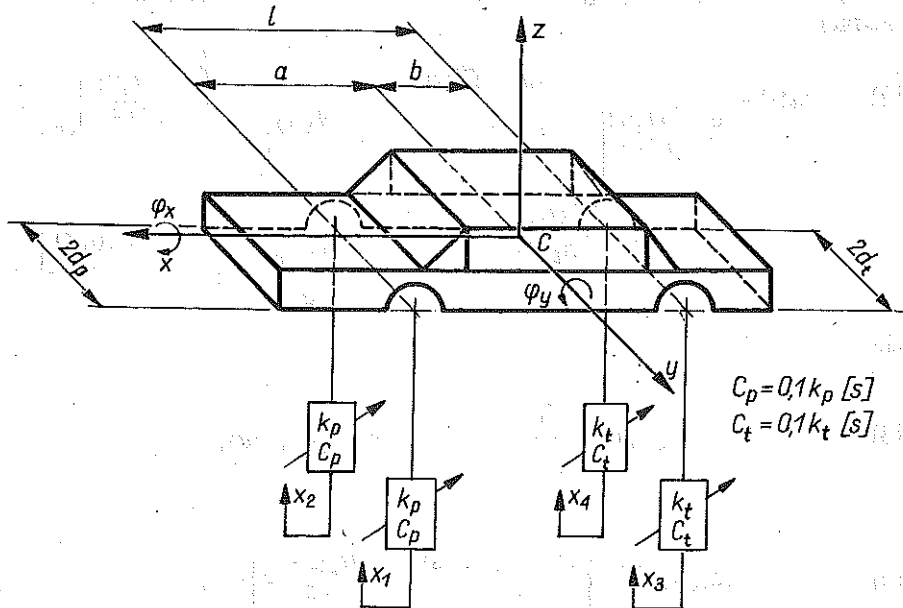
gdzie wielkości δ_i przyjmuje się *a priori*. Przeprowadzenie teoretycznego dowodu zbieżności metody symulacyjnej przedstawionej w pracy jest niemożliwe, ze względu na występowanie eksperymentu w kolejnych iteracjach.

Ponieważ zbieżność procedury potwierdzić może tylko wynik jej zastosowania w konkretnym przypadku, przeto też w celu sprawdzenia jej skuteczności przeprowadzono komputerową symulację eksperymentu, polegającą na zastąpieniu w symulacji eksperymentalnej rzeczywistego obiektu jego modelem matematycznym i przyjmując jako wynik eksperymentu przybliżone, numeryczne rozwiązanie dynamicznych równań ruchu badanego obiektu.

5. NUMERYCZNA SYMULACJA EKSPERYMENTU

Przeprowadzając numeryczną symulację eksperymentu w celu sprawdzenia proponowanej procedury symulacji eksperymentalnej, oparto się na schemacie przedstawionym na rys. 1.

Jako badany obiekt przyjęto model samochodu [5], przedstawiony na rys. 2, opisany nieliniowym układem dynamicznych następujących równań ruchu:



Rys. 2

$$m\ddot{z} = 0,5k_p(x_1 - z + \varphi_y a) + 0,05k_p(x_1 - z + \varphi_y a)^3 + 0,5k_p(x_2 - z + \varphi_y a) + 0,05k_p(x_2 - z + \varphi_y a)^3 + 0,5k_p(x_3 - z - \varphi_y b) + 0,05k_p(x_3 - z - \varphi_y b)^3 + 0,5k_t(x_4 - z - \varphi_y b) + 0,05k_t(x_4 - z - \varphi_y b)^3 - 0,05k_p(\dot{x}_1 - \dot{z} - \dot{\varphi}_y a) - 0,05k_p(\dot{x}_3 - \dot{z} - \dot{\varphi}_y b) - 0,05k_p(\dot{x}_2 - \dot{z} - \dot{\varphi}_y a) - 0,05k_t(\dot{x}_4 - \dot{z} - \dot{\varphi}_y b),$$

$$(5.1) \quad I_y \ddot{\varphi}_y = 0,5k_p a(z - x_1 - \varphi_y a) + 0,05k_p a(z - x_1 - \varphi_y a)^3 + 0,5k_p a(z - x_2 - \varphi_y a) + 0,05k_p a(z - x_2 - \varphi_y a)^3 + 0,5k_t b(x_3 - z - \varphi_y b) + 0,05k_t b(x_3 - z - \varphi_y b)^3 - 0,05k_p a(\dot{z} - \dot{x}_1 - \dot{\varphi}_y a) - 0,05k_p a(\dot{z} - \dot{x}_2 - \dot{\varphi}_y a) - 0,05k_t b(\dot{x}_3 - \dot{z} - \dot{\varphi}_y b) - 0,05k_t b(\dot{x}_4 - \dot{z} - \dot{\varphi}_y b),$$

$$I_x \ddot{\varphi}_x = 0,5k_p d_p(x_1 - \varphi_x d_p) + 0,05k_p d_p(x_1 - \varphi_x d_p)^3 - 0,5k_p d_p(-x_2 - \varphi_x d_p) + 0,05k_p d_p(-x_2 - \varphi_x d_p)^3 + 0,05k_p d_p(-x_3 - \varphi_x d_t)^3 + 0,5k_t d_t(x_3 - \varphi_x d_t) - 0,5k_t d_t(x_4 + \varphi_x d_t)^3 - 0,05k_p d_t(\dot{x}_1 - \dot{x}_2 - 2\dot{\varphi}_x d_p) - 0,05k_t d_t(\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - 2\dot{\varphi}_x d_t),$$

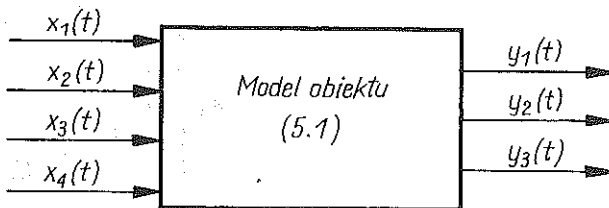
gdzie wzięto pod uwagę następujące dane:

$$\begin{aligned}
 m &= 1192 \text{ kg} && \text{masa samochodu} \\
 b &= 1,26 \text{ m}, a = 1,186 \text{ m} && \text{odległości przedniej i tylnej osi kół od} \\
 &&& \text{środkła ciężkości samochodu,} \\
 (5.2) \quad & && \\
 2d_t &= 2,41 \text{ m}, 2d_p = 1,4 \text{ m} && \text{rozstawy kół tylnych i przednich,} \\
 J_y &= 1319,6 \text{ kgm}^2, I_x = 405 \text{ kgm}^2 && \text{momenty bezwładności nadwozia sa-} \\
 &&& \text{mochodu względem osi } y \text{ i } x, \\
 & && \\
 k_p &= 1,937 \cdot 10^4 \text{ Nm}^{-1}, && \text{szttywności zawieszzeń kół przednich} \\
 k_t &= 1,729 \cdot 10^4 \text{ Nm}^{-1} && \text{i tylnych.}
 \end{aligned}$$

Układ (5.1) stanowi matematyczny model eksperymentu, gdzie jako sygnały wejściowe przyjmuje wielkości $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$, a jako sygnały wyjściowe wielkości

$$\begin{aligned}
 (5.3) \quad & y_1(t) = z(t), \\
 & y_2(t) = \varphi_y(t), \\
 & y_3(t) = \varphi_x(t).
 \end{aligned}$$

Mamy zatem układ pokazany na rys. 3.



Rys. 3

Mając jednocześnie określony matematyczny model eksperymentu, przechodzimy do omówienia procedury symulacji. Do układu dynamicznego w pierwszej iteracji wprowadzono sygnały:

$$(5.4) \quad [x_1(t)]_1 = [x_2(t)]_1 = [x_3(t)]_1 = [x_4(t)]_1 = 0,1 \cos 2,5 t.$$

Po otrzymaniu sygnałów wyjściowych jako numerycznych rozwiązań uzyskanych metodą zmodyfikowaną Rungego-Kutty układu (5.1) z uwzględnieniem $x_i(t)$, rozpoczynamy identyfikację obiektu.

Na podstawie (3.9) otrzymamy układ równań

$$(5.5) \quad W \times F = Y,$$

gdzie

$$(5.6) \quad W = \begin{bmatrix} (\lambda_{11}+1) & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\lambda_{12}+1) & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & (\lambda_{13}+1) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & (\lambda_{14}+1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda_{21}+1) & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\lambda_{22}+1) & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & (\lambda_{23}+1) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & (\lambda_{24}+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\lambda_{31}+1) & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (\lambda_{32}+1) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (\lambda_{33}+1) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & (\lambda_{34}+1) \end{bmatrix}$$

$$(5.7) \quad F = \begin{bmatrix} f_{11}(t) \\ f_{12}(t) \\ f_{13}(t) \\ f_{14}(t) \\ f_{21}(t) \\ f_{22}(t) \\ f_{23}(t) \\ f_{24}(t) \\ f_{31}(t) \\ f_{32}(t) \\ f_{33}(t) \\ f_{34}(t) \end{bmatrix}$$

$$(5.8) \quad Y = \begin{bmatrix} y_1(\lambda_{11} + 1) \\ y_1(\lambda_{12} + 1) \\ y_1(\lambda_{13} + 1) \\ y_1(\lambda_{14} + 1) \\ y_2(\lambda_{21} + 1) \\ y_2(\lambda_{22} + 1) \\ y_2(\lambda_{23} + 1) \\ y_2(\lambda_{24} + 1) \\ y_3(\lambda_{31} + 1) \\ y_3(\lambda_{32} + 1) \\ y_3(\lambda_{33} + 1) \\ y_3(\lambda_{34} + 1) \end{bmatrix}$$

Z układu równań (5.5) wyznaczamy funkcje $f_{ik}(t)$, gdzie parametry λ_{ij} wyznaczone są przez warunki izoperymetryczne, które w omawianym przykładzie wyrażają się układem równań

$$(5.9) \quad \lambda_{ij}\lambda_{ii} + \frac{\varepsilon_{ij}}{T} (\lambda_{ij}\lambda_{ii} + \lambda_{ij} + \lambda_{ii} + \lambda_{ij}^2 + \lambda_{ii}^2) = 0.$$

$$\int_0^{\infty} y_i^2(t) dt$$

Znając funkcje $f_{ik}(t)$ na podstawie równań (3.17) lub (3.24) bezpośrednio znajdujemy szukane charakterystyki impulsowe $h_{ik}(t)$ badanego układu.

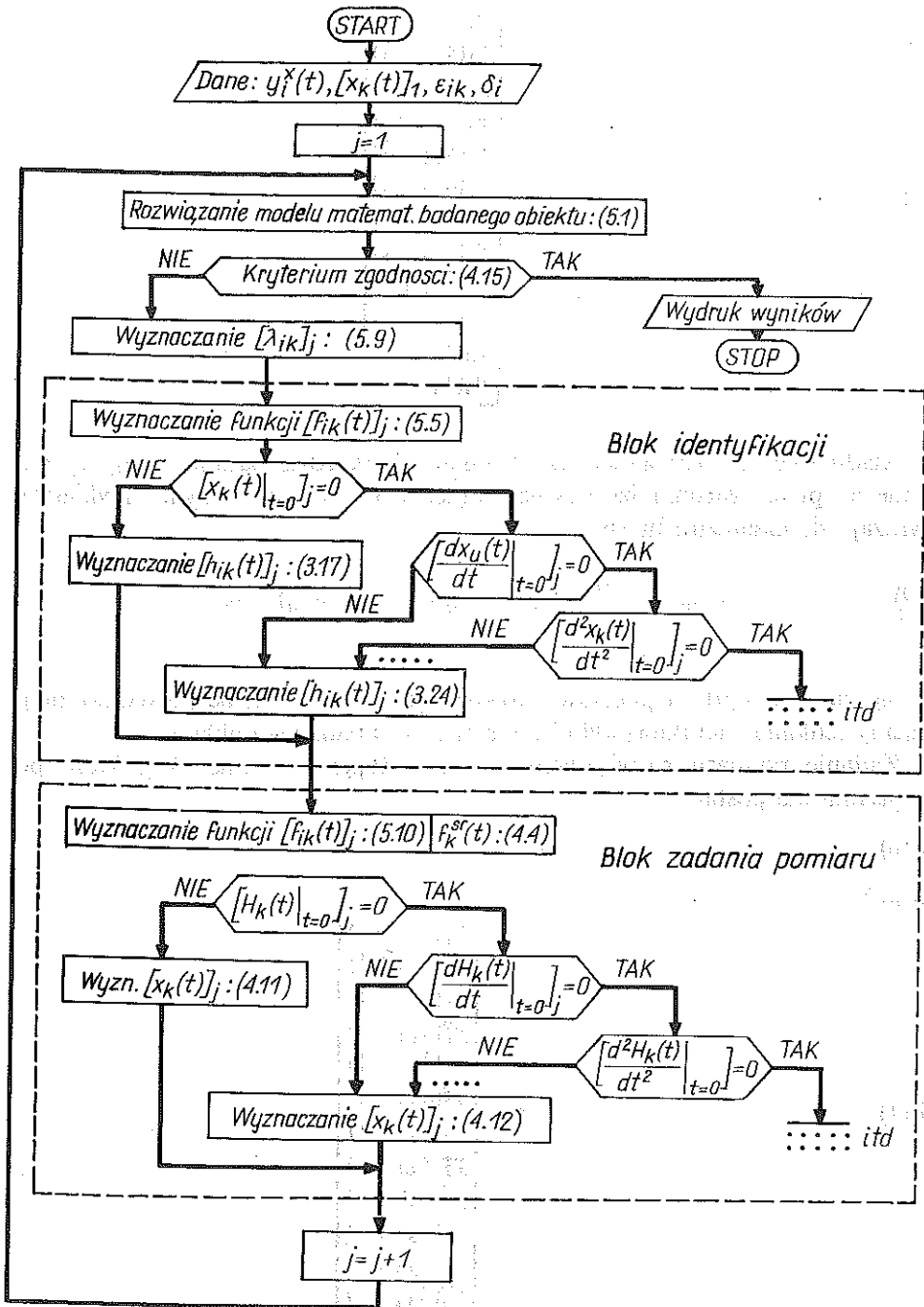
Zadanie pomiaru rozwiązujemy wykorzystując równanie (4.2), które po rozpisaniu ma postać

$$(5.10) \quad W \times F = Y^*,$$

gdzie

$$(5.11) \quad Y^* = \begin{bmatrix} y_1^*(\lambda_{11} + 1) \\ y_1^*(\lambda_{12} + 1) \\ y_1^*(\lambda_{13} + 1) \\ y_1^*(\lambda_{14} + 1) \\ y_2^*(\lambda_{21} + 1) \\ y_2^*(\lambda_{22} + 1) \\ y_2^*(\lambda_{23} + 1) \\ y_2^*(\lambda_{24} + 1) \\ y_3^*(\lambda_{31} + 1) \\ y_3^*(\lambda_{32} + 1) \\ y_3^*(\lambda_{33} + 1) \\ y_3^*(\lambda_{34} + 1) \end{bmatrix}$$

Wyznaczając na podstawie (5.10) funkcje $f_{ik}(t)$ możemy korzystać bezpośrednio z wzorów (4.4) i (4.11) lub (4.12), które umożliwiają wyznaczenie szukanych



Rys. 4

... [10] ...

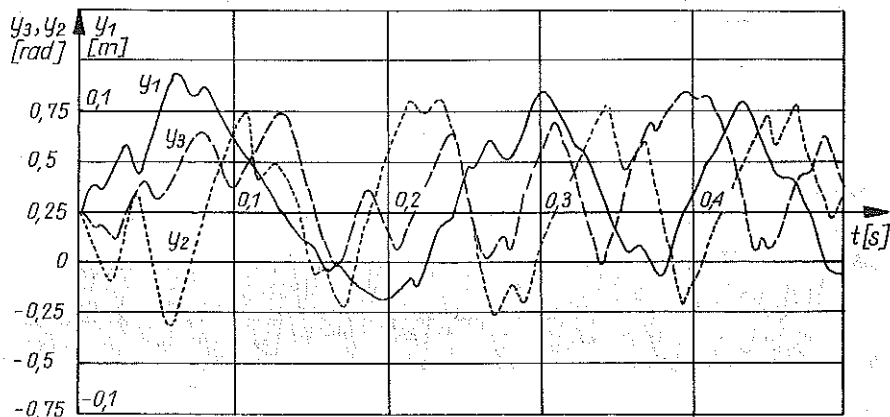
sygnałów wejściowych $x_k(t)$. Kryterium zgodności przyjęto w postaci (4.15), gdzie

$$(5.12) \quad \delta_i = 0,01, \quad i = 1, 2, 3.$$

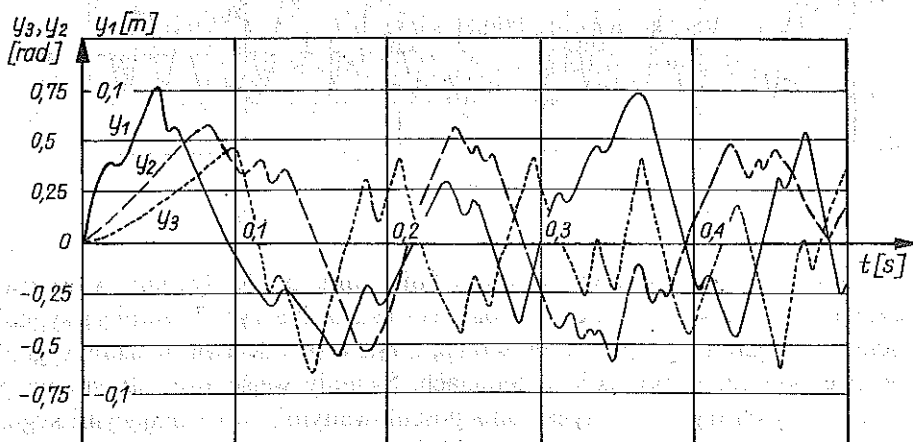
Schemat blokowy komputerowej symulacji eksperymentu pokazano na rys. 4. Wymagane sygnały wyjściowe (przyjęte jako rzeczywiste) mają postać sum funkcji harmonicznycch:

$$(5.13) \quad \begin{aligned} y_1 &= 0,1 \sin t + 0,2 \sin t \cdot \cos 2t \cdot \sin 2t, \\ y_2 &= 0,1 \sin t + 0,3 \cos(t+2) \cdot \sin 2t \cdot \cos 2t, \\ y_3 &= \sin t \cdot \sin(1,5t+5) \cdot \cos 2t. \end{aligned}$$

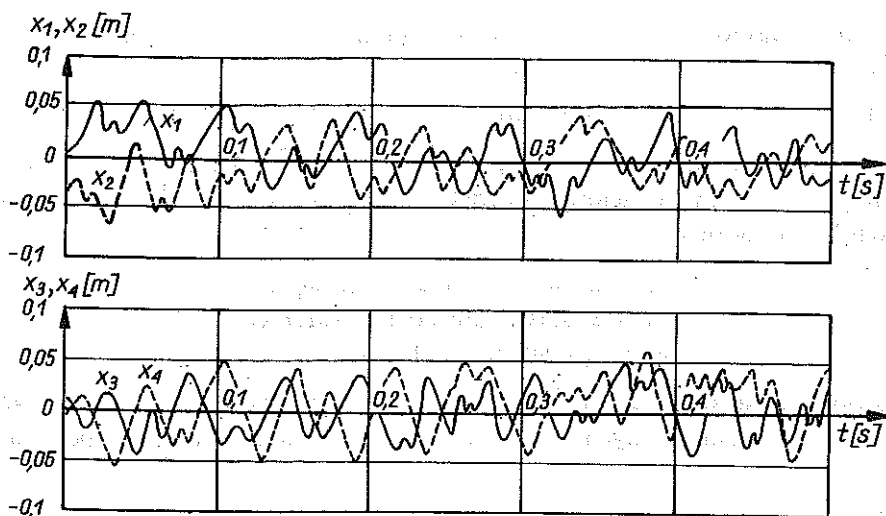
Czas obliczeń spełnia warunek $t \in [0, 0,5]$ s, a krok obliczeń $\Delta t = 0,001$ s. Wyniki obliczeń numerycznych pokazują rysunki 5 do 9. Na rys. 5 pokazano



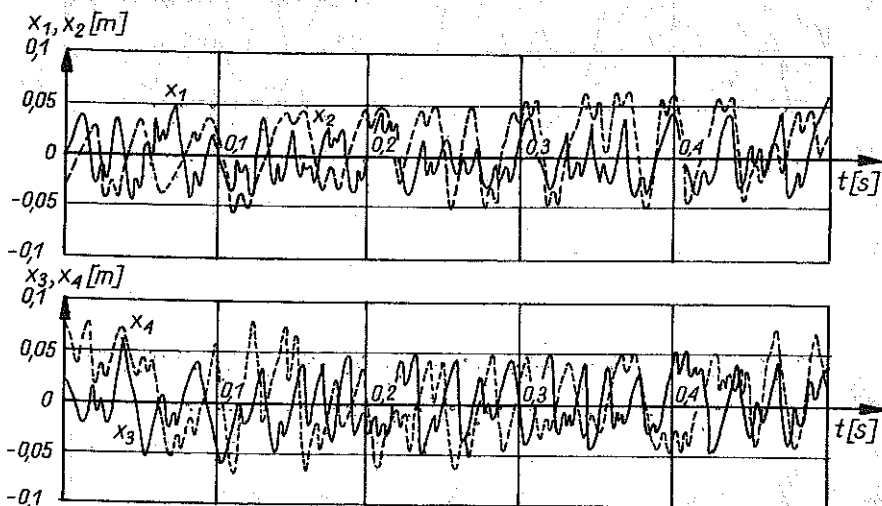
Rys. 5



Rys. 6

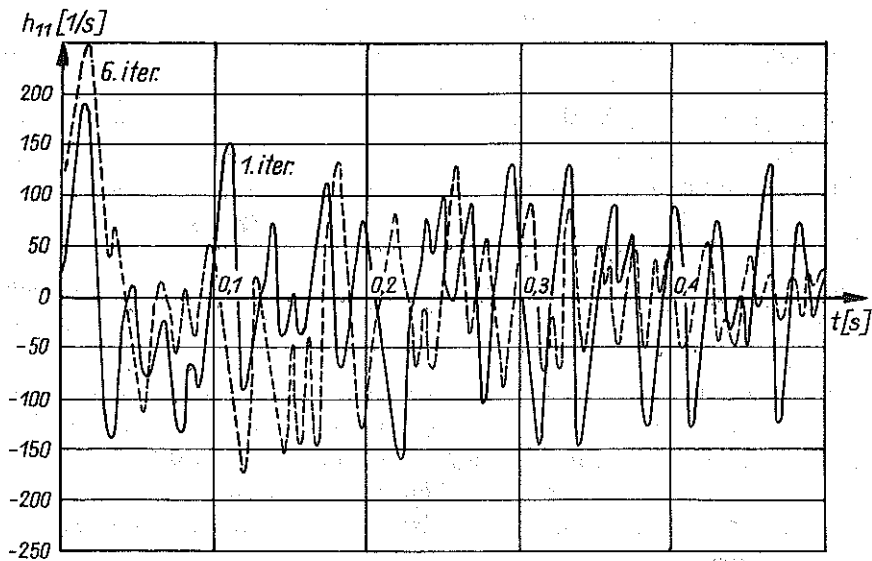


Rys. 7



Rys. 8

wymagane sygnały wyjściowe, opisane funkcjami (5.13). Sygnały wyjściowe, otrzymane po pierwszej iteracji przedstawia rys. 6. Na rys. 7 widnieją sygnały wejściowe otrzymane po pierwszej iteracji, a rys. 8 przedstawia te same sygnały wejściowe otrzymane po sześciu iteracjach. Sygnały wejściowe, otrzymane po sześciu iteracjach (rys. 8) są sygnałami poszukiwanymi, zapewniającymi sygnały wyjściowe postaci (5.13). Jak więc widać, procedura iteracyjna przedstawi-



Rys. 9

na w pracy wymagała sześciu iteracji numerycznych (w omawianym przykładzie). Procedura symulacji została po sześciu iteracjach automatycznie przerwana ze względu na spełnienie wymaganego kryterium zgodności.

Rysunek 9 pokazuje (przykładowo) charakterystykę impulsową $h_{11}(t)$ badanego układu po pierwszej i szóstej iteracji.

6. UWAGI KOŃCOWE

W pracy przedstawiono dwuetapowe rozwiązanie zagadnienia symulacji eksperymentalnej w dziedzinie czasu. W pierwszym etapie wykorzystano zasady rachunku wariacyjnego, a w drugim teorię równań całkowych.

Jak pokazano na przykładzie rozwiązanej komputerowej symulacji eksperymentu, proponowana metoda może dać użyteczne efekty w praktyce inżynierskiej, pod warunkiem spełnienia założeń wyszczególnionych w p. 2 oraz przy pewnym doświadczeniu w eksperymentalnych badaniach symulacyjnych jej użytkownika.

Biorąc powyższe pod uwagę można zatem stwierdzić:

1. Fakt możliwości realizacji procedury przy użyciu metod numerycznych pozwala na pełną automatyzację procesów symulacji eksperymentalnej, co znacznie skraca czas jej realizacji. Przeprowadzanie obliczeń oraz otrzymywanie wyników wyłącznie w dziedzinie czasu skraca również czas obliczeń numerycznych, koniecznych w realizacji badań symulacyjnych.

2. Możliwość badania układów dynamicznych o różnych liczbach sygnałów wejściowych i wyjściowych zwiększa zakres stosowalności proponowanej metody w dziedzinie badań symulacyjnych w porównaniu z metodami częstościowymi [1, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, i 13], w których liczby sygnałów wejścia i wyjścia muszą być równe.

3. Stosowanie metody wymaga od jej użytkownika pewnego doświadczenia inżynierskiego z zakresu badań symulacyjnych ze względu na konieczność arbitralnego przyjęcia wartości liczbowych ε_{ik} i δ_i , gdzie $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$ oraz z uwagi na konieczność wyboru odpowiedniej liczby właściwych sygnałów wejściowych i wyjściowych, które zapewnić muszą prawidłowy przebieg badań symulacyjnych.

4. Proponowana procedura nie wprowadza ograniczenia nieustaloności badanego układu, dlatego też wydaje się możliwe rozszerzenie jej na układy będące w ruchu nieustalonym. W pracy, ze względu na konieczność sprawdzenia procedury, rozwiązano w p. 5 przykład z dynamicznym układem znajdującym się w ruchu ustalonym. Przypadki ruchów nieustalonych wymagają oddzielnego rozpatrzenia.

Praca jest rozwinięciem metod rozwiązywania zagadnień symulacyjnych w dziedzinie czasu zapoczątkowanych w pracy [2]. Nie wyczerpuje ona oczywiście tej tematyki, lecz pozwala (w porównaniu z metodami przedstawionymi w [2]) na zastosowanie w badaniach symulacyjnych szerszej klasy obiektów dynamicznych ze względu na jej większy zakres stosowalności (porównaj założenia w p. 2 oraz w [2]).

Mimo iż w pracy nie poruszono zagadnień optymalizacji i dokładności samej procedury, można stwierdzić, że w porównaniu z wcześniej stosowanymi powszechnie metodami częstościowymi [1, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 i 13], zużywa ona mniej czasu maszyny cyfrowej, gdyż nie wymaga obliczania skomplikowanych charakterystyk częstościowych.

Zwiększenie skuteczności proponowanej metody, zagadnienia optymalizacji samej procedury jak i jej dokładne sprawdzenie w przypadku ruchów nieustalonych badanych obiektów dynamicznych wymagają obszernych i wszechstronnych opracowań.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. B. W. CRYER, P. E. NAWROCKI, R. A. LUND, *A road simulation system for heavy duty vehicles*, Automotive Engin. Congress and Exposition Detroit, Michigan, February 23—27, 1976.
2. A. J. POPLAWSKI, *Zastosowanie rachunku wariacyjnego do rozwiązywania zagadnienia identyfikacji i pomiaru*, Rozpr. Inżyn. (w druku).
3. K. TATARKIEWICZ, *Rachunek wariacyjny, cz. I i II*, Wyd. Naukowo Techniczne, Warszawa 1969.
4. D. D. STYLES, C. J. DODDS, *Simulation of random environments for structural dynamics testing*, Experimental Mech., 16, 11, 1976.
5. J. OSIECKI, B. STĘPIŃSKI, *Opracowanie modeli drgań samochodów z uwzględnieniem elementów nadwozia*, Opracowanie Problemowe nr NL001/N/85, PIMOT, Warszawa 1985.

6. A. GROMADOWSKI, J. OSIECKI, B. STĘPIŃSKI, *System dla symulacyjnych badań przegubów krzyżakowych, wałów przegubowych*, Opracowanie Problemowe PIMOT, Warszawa 1981.
7. E. ROSSETTA, C. ROSSI, *Nuove tecniche di sperimentazione delle strutture dell' autoveicolo*, Convegno Nazionale AIAS, Cagliari, 26—29, 09, 1979.
8. J. S. BENDAT, *Solutions for the multiple input/output problem*, J. Sound and Vibrations, 44, 1976.
9. J. S. BANDAT, *System identification form multiple input/output data*, J. Sound and Vibrations, 49, 1976.
10. H. SCHENK, *Pruefung und Simulation im Eisenbahnwesen*, Konferenz: Pruefung von Werkstoffen und Maschinenbauteilen Mittels Programierbaren Elektrohydraulischer Pruefmaschinen, Praha, 28—30, 11, 1984.
11. B. K. BORROWCLIFF, *Full scale simulated endurance test*, Automotive Enging. Congress, Detroit, January 8—12, 1968.
12. G. JACOBY, *Pruefung im Automobilbau*, Konferenz: Pruefung von Werkstoffen und Maschinenbauteilen Mittels Programierbaren Elektrohydraulischer Pruefmaschinen, Praha, 28—30, 11, 1984.
13. G. DOEDLBACHER, J. RERICHA, *Anwendung der Modalanalyse im Fahrzeugbau*, ATZ Automobiltechnische Zeitschrift, 82, 1980.
14. A. PISKOREK, *Równania całkowe*, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 1980.
15. W. POGORZELSKI, *Równania całkowe i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1953.

Резюме

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ И ИЗМЕРЕНИЯ В ОБЛАСТИ ВРЕМЕНИ

В работе представлены предположения и метод проведения экспериментальной имитации в области времени. Задача идентификации и задача измерения решены двух-этапным образом: сначала используя вариационное исчисление, а затем интегральные уравнения Вольтерра. С целью проверки предлагаемой процедуры проведена численная имитация эксперимента на примере математической, нелинейной модели автомобиля, находящегося в установившемся движении. Проведение расчетов в обсуждаемом методе в области времени дает возможность подвергнуть экспериментальной имитации динамические объекты с произвольным количеством входных и выходных сигналов.

SUMMARY

THE SOLUTION OF IDENTIFICATION AND INVERSE PROBLEMS
IN THE TIME DOMAIN

In the paper, assumptions and then the method of experimental simulation of dynamic systems in the time domain have been presented. The identification and the inverse problem is solved in two stages, first by means of the variation calculus, and then using the technique of integral equations of Volterra. In order to test the method, computer simulation of an experiment concerning a nonlinear mathematical model of an automobile in stationary motion is shown. The solution in time domain allows for experimental simulation of dynamic systems with different numbers of input- and output signals.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA
INSTYTUT MECHANIKI STOSOWANEJ, ŁÓDŹ

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 grudnia 1986 r.