

WYZNACZENIE WIELKOŚCI SIŁY KRYTYCZNEJ DLA PRĘTA WYKONANEGO Z MATERIAŁU LEPKOSPĘŻYSTEGO

TAMARA WIDERAK (POZNAŃ)

W pracy wyznaczono wartości siły krytycznej pręta wykonanego z materiału lepkospężystego, wykorzystując dynamiczne kryterium stateczności. Dla takich materiałów jak drewno i polichlorek winylu, przyjęto opisujące najlepiej ich właściwości modele ciał lepkospężystych (model standardowy i Burgersa). Numerycznie obliczono wartości długotrwałej siły krytycznej jako funkcji zmieniających się parametrów: sprężystości i lepkości.

1. WSTĘP

Tematem przedstawionej pracy jest wyznaczenie wartości siły krytycznej dla złożonych modeli ciał lepkospężystych. Pierwsze prace z zakresu stateczności pręta lepkospężystego prowadził FREUDENTHAL [10], tworząc teorię nieograniczonego ugięcia pręta ściskanego. Teorii tej zaprzeczyli KEMPNER i POHLE [13] wykazując, że w skończonym przedziale czasu ugięcie pręta jest zawsze ograniczone. Wyniki tych badaczy potwierdził HILTON [12].

Statecznością prętów ściskanych i układów prętowych, których materiał podlega prawom liniowej lepkospężystości zajmował się również RZANICYN [17]. Wprowadzając pojęcia siły krytycznej chwilowej (S_{kr0}) i długotrwałej ($S_{kr\infty}$) autor określił stateczność prętów wg następujących kryteriów:

jeśli $S < S_{kr\infty}$, to dla każdego skończonego t wyboczenie pręta jest równe zero,

jeśli $S \in (S_{kr\infty}, S_{kr0})$, to dla każdego skończonego t następuje wyboczenie,

jeśli $S > S_{kr0}$, to dla $t = 0$ następuje wyboczenie.

Analizując stateczność prętów ściskanych w warunkach quasistatecznego obciążenia, Rzanicyń wykorzystał równania ruchu pręta wywołanego zakłóceniem w postaci małego wychylenia początkowego. Prace FELDMANA [8] oraz GROMOWA [11] potwierdzają słuszność podejścia Rzanicyńa do problemu stateczności pręta lepkospężystego. Krytykując metodę Rzanicyńa, SZESTIERIKOW [20] zaproponował uznanie stanu pręta osiowo ściskanego za stateczny, gdy przy stałym obciążeniu jego wychylenie wzrasta nie prędzej niż liniowa funkcja czasu, a za niestateczny, gdy prędkość wychylenia wzrasta.

Rozwiązanie problemu optymalizacji przekroju ściskanego pręta, przy minimalnej prędkości odkształcenia, przedstawili BŁACHUTA i ŻYCZKOWSKI [3], POTAPOW [16], a także ARTIUNIAN [1], wykorzystują do określenia stateczności niewymuszonego ruchu pręta (lub całego układu) analizę stabilności rozwiązania równania ruchu w sensie Lapunowa. Do przedstawionych metod oceny stateczności pręta lepkosprężystego nawiązują również inni autorzy: SIENCZENKOW [18], STEVENS [19], MATIASZ [15], BUNATIAN [7]. Bunatian rozpatrując cienkościenny, ściskany siłami osiowymi i obciążony umieszczonymi na końcach momentami pręt lepkosprężysty udowodnił, że wartość długotrwałej siły krytycznej nie zależy od czasu obciążenia pręta.

Z prac opublikowanych ostatnio w Polsce na uwagę zasługują prace BOGACZA [4, 5, 6] oraz FORYSIA i GAJEWSKIEGO [9]. W pracach Bogacza ocena stateczności z wykorzystaniem dynamicznego kryterium dotyczy stateczności belek na podłożu sprężystym oraz pręta Beck'a. W pracy Forysia i Gajewskiego omawiane kryterium służy optymalizacji przekroju pręta.

Celem pracy jest określenie wielkości siły krytycznej długotrwałej z zastosowaniem dynamicznego kryterium stateczności dla złożonych modeli ciał lepkosprężystych. Uwzględnia się pomijane w omówionych wyżej pracach siły bezwładności. Otrzymane wyniki są potwierdzeniem wniosków z pracy Bunatiana, który wykazał brak związku między wartością długotrwałej siły krytycznej a czasem trwania obciążenia.

2. OKREŚLENIE WARUNKÓW STATECZNOŚCI

Równanie równowagi pręta, wyprowadzone z uwzględnieniem sił bezwładności oraz wpływu sił osiowych na zginanie, ma postać

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - S \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -q + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial t^2},$$

gdzie M oznacza moment zginający, S — ściskającą siłę osiową, q — obciążenie poprzeczne, μ — masę właściwą pręta ($\mu = \rho A$, ρ — gęstość, A — pole przekroju), W — ugięcie.

Przyjęto, że pręt wykonany jest z materiału, dla którego związek fizyczny można napisać w następujący sposób:

$$(2.2) \quad P(D)\sigma(t) = Q(D)\varepsilon(t),$$

gdzie

$$P(D) = \sum_{j=0}^n a^{(j)} D^j, \quad Q(D) = \sum_{j=0}^m b^{(j)} D^j, \quad D^j = \frac{\partial^j}{\partial t^j},$$

$a^{(j)}$, $b^{(j)}$ oznaczają stałe materiałowe, $\sigma(t)$ — naprężenie, $\varepsilon(t)$ — odkształcenie.

Mnożąc równanie (2.2) przez y , wykorzystując hipotezę płaskich przekrojów, całkując po powierzchni przekroju, dwukrotnie różniczkując po zmiennej x i podstawiając związek (2.1), otrzymuje się następujące równanie różniczkowe cząstkowe:

$$(2.3) \quad P(D) \left(S \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - q + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right) = Q(D) \left(-I \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right),$$

które dla $n = m = 2$ można rozwinąć następująco:

$$(2.4) \quad a_0 \left(S \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - q + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right) + a_1 \left(S \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial q}{\partial t} + \mu \frac{\partial^3 W}{\partial t^3} \right) + \\ + a_2 \left(S \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} \right) = -I b_0 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - I b_1 \frac{\partial^5 W}{\partial x^4 \partial t} - I b_2 \frac{\partial^6 W}{\partial x^4 \partial t^2}.$$

Zakładając postać rozwiązania

$$(2.5) \quad W(x, t) = w(x)e^{\lambda t},$$

gdzie $\lambda = \gamma + i\omega$ oraz $q(x, t) = q'(x)e^{\lambda t}$, otrzymuje się równanie różniczkowe zwyczajne z niewiadomą funkcją $w(x)$

$$(2.6) \quad \frac{d^4 w}{dx^4} I(b_0 + b_1 \lambda + b_2 \lambda^2) + \frac{d^2 w}{dx^2} S(a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2) + \\ + \mu w \lambda (a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2) = q'(x)(a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2)$$

Rozwiązanie ogólne znajdujemy rozwiązując równanie charakterystyczne jednorodnego równania (2.6), które po uwzględnieniu, że λ jest zespolone można napisać w postaci

$$(2.7) \quad r^4 I(c + di) + r^2 S(e + fi) + \mu(\gamma + i\omega)^2 (e + fi) = 0,$$

gdzie

$$(2.7)_1 \quad c = b_0 + b_1 \gamma + b_2 \gamma^2 - b_2 \omega^2,$$

$$(2.7)_2 \quad d = b_1 \omega + 2b_2 \gamma \omega,$$

$$(2.7)_3 \quad e = a_0 + a_1 \gamma + a_2 \gamma^2 - a_2 \omega^2,$$

$$(2.7)_4 \quad f = a_1 \omega + 2a_2 \gamma \omega.$$

Równanie (2.7) rozwiązujemy podstawiając $p = r^2$. Otrzymujemy wówczas

$$(2.8) \quad p^2 I(c + di) + p S(e + fi) + \mu(\gamma + i\omega)^2 (e + fi) = 0.$$

Wyróżnik równania (2.8) ma postać zespoloną

$$(2.9) \quad \Delta = A + B \cdot i,$$

przy czym

$$(2.10) \quad A = S^2(e^2 - f^2) - 4I\mu[(ce - df)(\gamma^2 - \omega^2) - 2\gamma\omega(ed + cf)],$$

$$(2.11) \quad B = 2S^2ef - 4I\mu[2\gamma\omega(ce - df) + (ed + cf)(\gamma^2 - \omega^2)].$$

Pierwiastki równania (2.8) wynoszą

$$(2.12) \quad p_1 = K + Li,$$

$$(2.13) \quad p_2 = M + Ni,$$

a odpowiednie części rzeczywiste i urojone oblicza się za pomocą następujących wzorów:

$$(2.14) \quad K = \left[-Sce + c\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} - Sdf + d\operatorname{sgn}B\sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} \right] / \phi,$$

$$(2.15) \quad L = \left[-Sfc - d\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} + Sed + c\operatorname{sgn}B\sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} \right] / \phi,$$

$$(2.16) \quad M = \left[-Sce - c\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} - Sdf - d\operatorname{sgn}B\sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} \right] / \phi,$$

$$(2.17) \quad N = \left[-Sfc + d\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} + Sed - c\operatorname{sgn}B\sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} \right] / \phi,$$

$$(2.18) \quad \phi = 2I(c^2 + d^2).$$

Pierwiastki równania charakterystycznego wynoszą

$$(2.19) \quad r_{1,2} = \pm [P + Ri],$$

$$(2.20) \quad r_{3,4} = \pm [W + Ui],$$

a odpowiednie części rzeczywiste i urojone są następujące:

$$(2.21) \quad P = \sqrt{\frac{K + \sqrt{K^2 + L^2}}{2}}, \quad R = \operatorname{sgn}L\sqrt{\frac{-K + \sqrt{K^2 + L^2}}{2}},$$

$$(2.22) \quad W = \sqrt{\frac{M + \sqrt{M^2 + N^2}}{2}}, \quad U = \operatorname{sgn}N\sqrt{\frac{-M + \sqrt{M^2 + N^2}}{2}}.$$

Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego linii ugięcia ma postać

$$(2.23) \quad W(x, t) = e^{\lambda t}(C_1 e^{(P+Ri)x} + C_2 e^{-(P+Ri)x} + C_3 e^{(W+Ui)x} + C_4 e^{-(W+Ui)x})$$

W dalszych rozważaniach przyjmujemy następujące warunki brzegowe:

$$(2.24) \quad W(0, t) = W''(0, t) = 0, \quad W(l, t) = W'''(l, t) = 0.$$

Wynikający z warunków brzegowych (2.24) układ równań jednorodnych prowadzi do typowego problemu własnego. Warunkiem istnienia rozwiązań różnych od zera jest znikanie wyznacznika.

$$(2.25) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ Z_1^2 & Z_1^2 & Z_2^2 & Z_2^2 \\ e^{Z_1 l} & e^{-Z_1 l} & e^{Z_2 l} & e^{-Z_2 l} \\ Z_1^2 e^{Z_1 l} & Z_1^2 e^{-Z_1 l} & Z_2^2 e^{Z_2 l} & Z_2^2 e^{-Z_2 l} \end{vmatrix} = 0,$$

$$Z_1 = P + Ri, \quad Z_2 = W + Ui.$$

Po rozwinięciu wyznacznika i uporządkowaniu uzyskujemy równanie

$$(2.26) \quad (e^{Z_1 l} - e^{-Z_1 l})(e^{Z_2 l} - e^{-Z_2 l})(Z_1^2 - Z_2^2) = 0.$$

Równanie (2.26) jest spełnione, gdy jeden z czynników równania jest równy zeru. Przyrównując pierwszy z czynników do zera, otrzymuje się

$$(2.27) \quad (e^{Z_1 l} - e^{-Z_1 l}) = 0.$$

Po uporządkowaniu i oddzieleniu części rzeczywistej i urojonej oraz przedstawieniu Z_1 i Z_2 w postaci trygonometrycznej, otrzymuje się następujący układ:

$$(2.28) \quad \cos Rl(e^{Pl} - e^{-Pl}) = 0,$$

$$(2.29) \quad \sin Rl(e^{Pl} + e^{-Pl}) = 0.$$

Z równania (2.27) wynika, że

$$(2.30) \quad \sin Rl = 0,$$

$$(2.31) \quad e^{Pl} - e^{-Pl} = 0;$$

inna kombinacja warunków prowadzi do sprzeczności. Układ (2.30) i (2.31) jest spełniony, jeśli

$$(2.32) \quad Rl = \pi \quad \text{i} \quad P = 0.$$

Przyrównanie drugiego czynnika równania (2.26) do zera prowadzi do podobnego rozwiązania

$$(2.33) \quad Ul = \pi \quad \text{i} \quad W = 0.$$

Trzeci z czynników jest zawsze różny od zera.

Siłę krytyczną wyznaczamy wykorzystując kryterium stateczności ruchu. Analizując zmiany znaku części rzeczywistej γ i urojonej ω wykładnika lt czynnika czasu, można określić charakter ruchu

- a) $\gamma \leq 0$ i $\omega > 0$, ruch stateczny;
- b) $\gamma > 0$ i $\omega = 0$, ruch niestateczny (rozbieżny);
- c) $\gamma > 0$ i $\omega > 0$, ruch niestateczny (flutter).

Powyższe warunki określają technikę wyznaczenia wartości siły krytycznej przedstawioną w p. 4.

3. PRZYKŁAD TESTUJĄCY — MODEL HOOKE'A

W celu sprawdzenia przyjętego kryterium, dyskusję rozwiązania równania (2.26) warto zacząć od najprostszego modelu, jakim jest ciało Hooke'a.

Podstawiając $b_0 = E$ i $a_0 = 1$, (pozostałe współczynniki są równe zero) oraz rozwiązując układ (2.32) lub (2.33), otrzymuje się

$$(3.1) \quad \gamma^2 - \omega^2 = \pi/\mu l^2 (S - EI\pi^2/l^2),$$

$$(3.2) \quad \gamma = 0 \quad \text{lub} \quad \omega = 0.$$

Przy założeniu, że $\omega = 0$, równanie (3.1) przyjmuje postać

$$(3.3) \quad \gamma^2 = \pi/\mu l^2 (S - EI\pi^2/l^2).$$

Ponieważ γ z założenia jest liczbą rzeczywistą, ograniczona jest więc wartość siły S , mianowicie

$$(3.4) \quad S > EI\pi^2/l^2.$$

Wielkość po prawej stronie nierówności jest znaną wartością siły eulerowskiej dla przyjętych warunków brzegowych. Dla $S < EI\pi^2/l^2$ γ jest równe zero, a ω przyjmuje wartości różne od zera

$$(3.5) \quad \omega^2 = \pi^2/\mu l^2 (EI\pi^2/l^2 - S).$$

Gdy $S = 0$, wzór (3.5) przybiera znaną postać najniższej podstawowej częstości drgań własnych

$$(3.6) \quad \omega = \pi^2/l^2 \sqrt{EI/\mu}.$$

4. TECHNIKA WYZNACZENIA WARTOŚCI SIŁY KRYTYCZNEJ

Dla złożonych modeli ciał lepkosprężystych, równania (2.32) lub (2.33) są nieliniowe i rozwiązuje się je numerycznie. Obciążenie wprowadza się jako wielkość bezwymiarową w postaci związku

$$(4.1) \quad \kappa = S/S_E,$$

gdzie S oznacza ściskającą siłę osiową oraz S_E — siłę eulerowską dla pręta sprężystego z modułem sprężystości natychmiastowej. Ułożono program komputerowy na mikrokomputer Amstrad PC 1512 w języku Turbo Pascal.

Program poszukuje miejsc zerowych poniższego układu równań z zastosowaniem reguły fałsi:

$$(4.2) \quad \kappa E^2 \frac{ce - c \sqrt{\frac{A' + \sqrt{A'^2 + B'^2}}{2}} + df - d \operatorname{sgn} B \sqrt{\frac{-A' + \sqrt{A'^2 + B'^2}}{2}}}{2(c^2 + d^2)} - 1 = 0,$$

$$(4.3) \quad -cf + c \operatorname{sgn} B \sqrt{\frac{-A' + \sqrt{A'^2 + B'^2}}{2}} + ed - d \sqrt{\frac{A' + \sqrt{A'^2 + B'^2}}{2}} = 0,$$

gdzie

$$A' = e^2 - f^2 - 4I\mu/\kappa^2 S_E^2 [(ce - df)(\gamma^2 - \omega^2) - 2\gamma\omega(ed + cf)],$$

$$B' = 2ef - 4I\mu/\kappa^2 S_E^2 [2\gamma\omega(ce - df) + (ed + cf)(\gamma^2 - \omega^2)];$$

c, d, e, f, κ, S_E jak poprzednio. Program wyznacza kolejne wartości γ i ω dla wprowadzanego skokowo parametru κ oraz parametrów charakteryzujących lepkość i sprężystość:

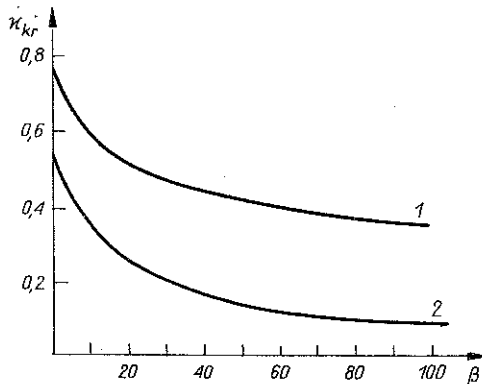
dla modelu standardowego — $\beta = E_1/E_2$,

dla modelu Burgersa — $\beta = E_1/E_2, \delta = \eta_1/\eta_2$.

Podczas analizy znaku γ i ω , zgodnie z przyjętym kryterium (pkt. 2), program poszukiwał wartości krytycznej parametru κ i wyznaczał siłę krytyczną.

5. MODEL STANDARDOWY

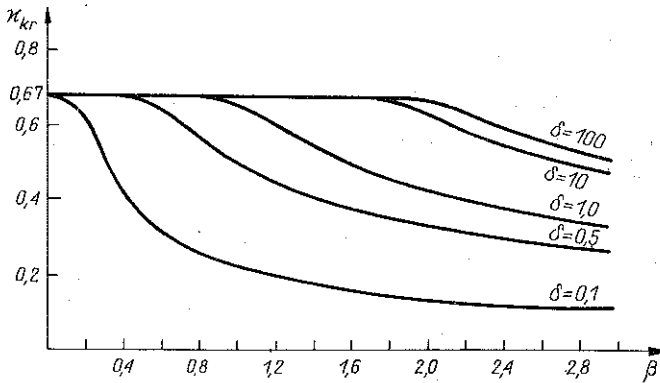
Można przyjąć [14], że model standardowy opisuje dość dobrze właściwości drewna. Dla stałych geometrycznych: $A = 20 \times 10^{-4} \text{ m}^2, I = 30 \times 10^{-8} \text{ m}^4, l = 5 \text{ m}$ i stałych materiałowych (dąb- [14]): $g = 7381,6 \text{ N/m}^3$ (ciężar właściwy), $E_1 = 13600000000 \text{ N/m}^2$, czas retardacji $1/\lambda = 252000 \text{ s}$ (stałe podaje się w układzie SI), opisaną wyżej techniką wyznacza się wartości κ_{kr} dla $\beta \in \langle 0,1 - 100 \rangle$. Wyniki zestawione na rys. 1 — krzywa 1.



Rys. 1

6. MODEL BURGERSA

Opierając się na badaniach BLANDA i LEE'A [2] można przyjąć, że model Burgersa opisuje dobrze zachowanie mas plastycznych i przy takich samych jak dla modelu standardowego stałych geometrycznych, przyjmuje się stałe materiałowe jak dla polichloroku winylu [21]: $\eta_1 = 50 \text{ Ns/m}^2$, $E_1 = 2360000000 \text{ N/m}^2$, $g = 13582 \text{ N/m}^3$. Dla różnych wartości parametru $\delta \in \langle 0,1 - 100 \rangle$ przedstawiono na rys. 2 κ_{kr} jako funkcję parametru β . Dla porównania zestawiono na rys. 1 wykres sporządzony dla modelu standardowego z przyjętymi stałymi materiałowymi jak dla modelu Burgersa – krzywa 2.



Rys. 2

7. WNIOSKI

1. Analiza wykresu sporządzonego dla modelu standardowego (rys. 1) sugeruje, że dla parametru $\beta \Rightarrow 0$, model zachowuje się jak ciało Hooke'a. Wniosek ten znajduje potwierdzenie w podanych niżej obliczeniach.

Dla modelu standardowego współczynniki c , d , e , f , będące funkcją stałych materiałowych (2.6)₁–(2.6)₄ mają następującą postać:

$$(7.1) \quad c = \frac{E_1}{\beta+1} + \frac{\eta_1 \beta}{\beta+1} \gamma,$$

$$(7.2) \quad d = \frac{\eta_1 \beta}{\beta+1} \omega,$$

$$(7.3) \quad e = 1 + \frac{\eta_1 \beta}{E_1(\beta+1)} \gamma,$$

$$(7.4) \quad f = \frac{\eta_1 \beta}{E_1(\beta+1)} \omega.$$

Obliczone granice wyrażen (7.1)–(7.4)

$$(7.5) \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} c = E_1, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} d = 0, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} e = 1, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} f = 0,$$

odpowiadają współczynnikom c , d , e , f dla ciała Hooke'a.

Analizując w podobny sposób model Burgersa (rys. 2) otrzymano następujące granice:

$$(7.6) \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} c = \eta_1 \gamma, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} d = \eta_1 \omega,$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} e = 1 + \frac{\eta_1}{E_1} \gamma, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} f = \frac{\eta_1}{E_1} \omega,$$

odpowiadające współczynnikom c , d , e , f modelu Maxwella. Uzyskana na wykresie wielkość graniczna $\kappa_{kr} = 2/3$ odpowiada obliczonej wartości κ_{kr} modelu Maxwella, w którym stałe geometryczne i materiałowe przyjęto jak dla modelu Burgersa.

2. Wykazano, że istnieją wartości długotrwałej siły krytycznej niezależne od czasu trwania obciążenia.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Н. Х. АРУТЮНЯН, В. Б. КОЛЬМАНОВСКИЙ, *Теория ползучести неоднородных тел*, Наука, Москва 1983.
2. D. R. BLAND, E. H. LEE, *On the determination of viscoelastic model for analysis of plastics*, J. Appl. Mech., **23**, 3, 1956.
3. J. BŁACHUTA, M. ŻYCZKOWSKI, *Bimodal optimal design of clamped – clamped columns under creep conditions*, Int. J. Solids Struct., **20**, 6, pp. 571–577, 1984.
4. R. BOGACZ, R. JANISZEWSKI, *Zagadnienie analizy i syntezy kolumn obciążonych siłami śledzącymi, ze względu na stateczność*, Prace IPPT, **6**, 1986.
5. R. BOGACZ, T. KRZYŻAŃSKI, *O belce Bernoulli'ego–Eulera spoczywającej na lepkosprężystym podłożu, poddanej działaniu ruchomego oscylującego obciążenia*, Prace IPPT, **18**, 1986.
6. R. BOGACZ, A. NIESPODZIANA, *O stateczności ciągłych kolumn Beck'a ze zlokalizowaną utratą sztywności*, Prace IPPT, **27**, 1987.
7. Л. Б. БУНАТЯН, *Устойчивость тонкостенных стержней с учетом ползучести материала*, Изв. АНАРМ. ССР, **6**, 2, 43–53, 1953.
8. М. Р. ФЕЛЬДМАН, *Устойчивость колебаний стержней и плит, механические свойства которых меняются во времени*, 1 2. 200–209. Днепропетровск 1955.
9. A. FORYŚ, A. GAJEWSKI, *Parametryczna optymalizacja pręta lepkosprężystego ze względu na stateczność dynamiczną*, Rozpr. Inżyn., **35**, 2, 1987.
10. A. M. FREUDENTHAL, *Some effects in structural analysis*, Report 6th Intern. Congr. Appl. Mech., Paris 1946.
11. В. Г. ГРОМОВ, *Первый четог Ляпунова в динамической устойчивости гибких термовязкоупругих тел*, Докл. АН СССР T223, **4**, 819–822, 1975.
12. H. H. HILTON, *On the nonexistence of finite critical times for generalized linear viscoelastic columns with arbitrary initial curvatures*, J. Aeronaut. Sci., **28**, 8, pp. 655–656, 1961.

13. J. КЕМПNER, F. ПОHLE, *On the nonexistence of a finite critical time for linear viscoelastic columns*, J. Aeronaut. Sci., **20**, 8, pp. 572-573, 1953.
14. J. KWIAŃKOWSKI, *Stateczność płyt trójwarstwowych*, praca doktorska, AR, Katedra Mechaniki i Techniki Ciepłej, 1978.
15. В. И. МАТИЯШ, *О динамической устойчивости шарнирного упруговязкого стержня*, Механика полимеров, **2**, 293-300, 1971.
16. Е. ПОТАПОВ, *Устойчивость вязкоупругих элементов конструкций*, Стройиздат, 1985.
17. А. Р. РЖАНИЦЫН, *Процессы деформирования конструкции из упруговязких элементов*, АН СССР, **52**, 1, 25-28, 1946.
18. И. К. СЕНЧЕНКОВ, *О некоторых особенностях параметрических колебаний вязкоупругого стержня с темпер, зависимыми свойствами*, АН УССР, А, 57-62, 1981.
19. К. К. STEVENS, *On the parametric excitation of viscoelastic column*, AIAA Journ., **12**, pp. 2111-2116, 1966.
20. С. А. ШЕСТЕРИКОВ, *О критерии устойчивости при ползучести*, ПММ, **23**, 6, 1101-1106, 1959.
21. *Poradnik odlewnika*, PWN, 1976.

РЕЗЮМЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ ДЛЯ СТЕРЖНЯ ИЗГОТОВЛЕННОГО ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

В работе определены значения критической силы стержня, изготовленного из вязкоупругого материала, используя динамический критерий устойчивости. Для таких материалов, как дерево и поливинилхлорид, приняты, описывающие наилучшим образом их свойства, модели вязкоупругих тел (стандартная модель и модель Бюргерса). Численно вычислены значения продолжительной критической силы, как функции меняющихся параметров: упругости и вязкости.

SUMMARY

CRITICAL FORCE OF A ROD MADE OF VISCO-ELASTIC MATERIAL

Critical forces are determined for a rod made of visco-elastic material, use being made of the dynamic stability criterion. The standard and Burgers models are used to simulate the behaviour of such materials as wood and PCV. The critical force is determined numerically as a function of two variable parameters: elasticity and viscosity.

AKADEMIA ROLNICZA, POZNAŃ

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 grudnia 1988 r.