

OPTYMALNE SPRĘŻENIE ORAZ KSZTAŁTOWANIE TARCZ WIRUJĄCYCH ZE WZGLĘDU NA KRUCHE ZNISZCZENIE W WARUNKACH NIEUSTALONEGO PEŁZANIA

ARTUR GANCZARSKI I JACEK SKRZYPEK (KRAKÓW)

W pracy analizuje się różne rodzaje kruchej zniszczenia wirującego, lepko-sprężystego krążka o zmiennej grubości, obwodowo sprężonego, w zależności od wielkości wstępnego wcisku obręczy sprężającej. W szczególnych przypadkach dysku o stałej grubości optymalnie sprężonego oraz dysku o zmiennej grubości optymalnie ukształtowanego przy dowolnym sprężeniu, pierwsze makropęknięcie pojawia się na obu brzegach jednocześnie. Zaprezentowany w pracy numeryczny algorytm pozwala znacznie zwiększyć czas życia krążka. Zadanie zostało sformułowane i rozwiązane przy użyciu teorii płynięcia (hipoteza umocnienia zależnego od czasu) oraz kontynuualnej mechaniki zniszczenia.

OZNACZENIA

- $\sigma_r, \sigma_\theta, \Sigma_r, \Sigma_\theta$ wymiarowe i bezwymiarowe naprężenia radialne i obwodowe,
 $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, E_r, E_\theta$ wymiarowe i bezwymiarowe odkształcenia radialne i obwodowe,
 u, U wymiarowe i bezwymiarowe przemieszczenia radialne,
 t, T czas fizyczny i bezwymiarowy,
 t_k stała o wymiarze czasu w prawie pęknięcia (3.18),
 t_1, T_1 czas fizyczny i bezwymiarowy po którym następuje pierwsze makropęknięcie (czas inicjacji kończący fazę inkubacji),
 t_{II} czas zniszczenia kończący fazę propagacji „frontu spękań”,
 $f(t)$ funkcja czasu w prawie pełzania (2.12),
 a, r promień wewnętrzny i bieżący krążka w jednostkach fizycznych,
 $X = 1, X_0, X_2$ bezwymiarowy promień wewnętrzny i zewnętrzny krążka z materiału reologicznego oraz promień zewnętrzny sprężystego pierścienia sprężającego (rys. 1),
 $\left. \begin{matrix} P_a, P_b, q \\ P_a, P_b, Q \end{matrix} \right\}$ wymiarowe i bezwymiarowe ciśnienia: wewnętrzne, zewnętrzne i wstępno wcisku,
 E, ν moduł Younga i liczba Poissona,
 σ_0 stała materiałowa o wymiarze naprężenia,
 $\sigma_{red}, \Sigma_{red}$ wymiarowe i bezwymiarowe naprężenie zredukowane w prawie pęknięcia (2.11) i (3.18),
 σ_1 największe naprężenie rozciągające,
 ρ gęstość masy,
 ω prędkość kątowa krążka,
 $\psi(X)$ funkcja ciągłości (damage parameter) w prawie pęknięcia (2.11)
 $\psi \in (0, 1]$

- δ parametr skalarny we wzorze (2.11) $\delta \in [0, 1]$,
 C, n stała i wykładnik potęgi w prawie pęknięcia (2.11),
 m wykładnik potęgi w prawie pełzania (2.12),
 $h(r), H(X)$ wymiarowa i bezwymiarowa grubość tarczy,
 h_0, H_0 wymiarowa i bezwymiarowa grubość tarczy o stałej grubości i objętości równej tarczy o zmiennej grubości (rys. 1),
 κ wykładnik potęgi we wzorze (2.6),
 v, V wymiarowa i bezwymiarowa objętość tarczy.

Uwagi dodatkowe

1. Indeks górny c oznacza wielkości odnoszące się do pełzania.
2. Indeks górny e oznacza wielkości odnoszące się do sprężystości.
3. Indeks dolny i oznacza intensywności.
4. Przecinek ' oznacza różniczkowanie według czasu fizycznego.
5. Kropka $\dot{}$ oznacza różniczkowanie według czasu bezwymiarowego.
6. d poprzedzające symbol oznacza przyrost wielkości w czasie.

1. WSTĘP

Tematyka kruchego zniszczenia w warunkach pełzania wirujących tarcz kołowo-symetrycznych, to grupa zagadnień stosunkowo nowych, lecz rozwijana dynamicznie ze względu na możliwość praktycznego zastosowania, np. w wirnikach turbin, kołach zamachowych itp. Prześledzimy ważniejsze pozycje poświęcone temu zagadnieniu.

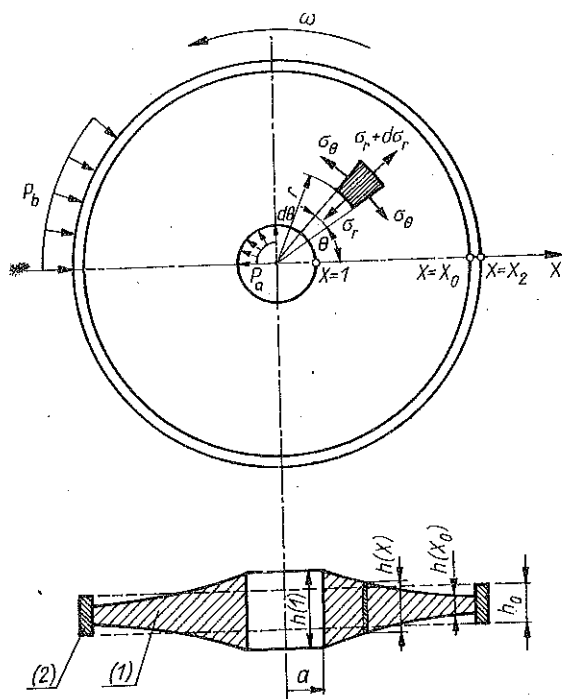
R. K. PENNY i D. L. MARRIOTT [10] w monografii poświęconej elementom konstrukcyjnym pracującym w warunkach pełzania rozważali, między innymi, zagadnienie pełzania tarczy pierścieniowej, poddanej jedoczesnemu wirowaniu i rozciąganiu obwodowemu. Zakładając teorię płynięcia typu ODQVISTA-HULTA [9] oraz przyjmując rozwiązanie sprężyste jako warunek początkowy dla nieustalonego pełzania, zbudowano algorytm do numerycznej analizy redystrybucji naprężeń i odkształceń z uwzględnieniem pełzania pierwszo- i drugorzędowego (ustalonego). J. T. BOYLE i J. SPENCE [4], analizując podobny problem cylindra grubościennego, uwzględnili dodatkowo trzecią fazę pełzania poprzedzającą zniszczenie typu kruchego w wyniku powstawania mikropełknięć opisanych prawem typu ROBINSONA [11] — KACZANOWA [6]. Oprócz wstępnej fazy zniszczenia zakończonej powstaniem pierwszych makropełknięć rozważono również zachowanie pokrytyczne związane z propagacją frontu zniszczenia w cylindrze. Przyjmując małe przemieszczenia i prawo pełzania typu Odqvista H. KOPECKI i J. WALCZAK [7] rozważali pełzanie wirującego dysku o eksponencjalnie zmiennej grubości. Efekt pęknięcia przy pełzaniu uwzględniono postulując istnienie funkcji nazwanej barierą dysypacji, a do całkowania równań zastosowano metodę Rungego-Kutty, Y. MATSUO i H. SATO [8] rozpatrywali wirujący dysk w ujęciu probabilistycznym. W pracy

zwrócono uwagę na możliwość powstania różnych schematów zniszczenia: pęknięcia na brzegu wewnętrznym lub jednoczesnego zniszczenia na brzegu wewnętrznym i w środku krążka. V. K. ARYA, N. S. BHATNAGAR [1], V. K. ARYA, K. DEBNATH, S. BHATNAGAR [2], S. TSUDA, E. SHIRATORI, K. IKEGAMI [13] zajmowali się pełzaniem wirujących tarcz ortotropowych stosując metody elementów skończonych. J. WALCZAK, J. SIENIAWSKI i J. BATHE [15] przeprowadzili analizę zniszczenia wirującego dysku w warunkach pełzania, w przypadku dużych przemieszczeń i modelu ciała termo-sprężysto-lepko-plastycznego na podstawie sformułowania Lagrange'a–Jaumanna. Do obliczeń zastosowano wersję ADINA programu MES. Również przy zastosowaniu programu ADINA H. A. ZIEBARTH [16] rozważał pełzanie drugorzędowe wirujących dysków, zakładając materiał typu Nortona oraz model wzmocnienia mieszanego. J. BIAŁKIEWICZ [3] rozważał zniszczenie w warunkach pełzania wirującego dysku o zmiennej grubości. Proces pełzania opisano prawem Nortona–Odqvista dla odkształceń logarytmicznych: założono model pęknięcia opisany równaniem Kaczanowa i przeanalizowano dwa różne typy zniszczenia: ciągliwy i ciągliwo-kruchy.

Celem obecnej pracy jest analiza wpływu kształtu oraz wstępnego sprężenia obwodowego na przebieg procesu nieustalonego pełzania wirującej tarczy oraz na zniszczenie kruche w wyniku powstawania mikropeknięć. Sprężenie uzyskuje się przez nałożenie na tarczę obwodowej, sprężystej obręczy ze wstępnym wciskiem, którego wielkość determinuje (przy określonej prędkości wirowania) miejsce powstania pierwszych makropęknięć. Mechanizm zniszczenia może przy tym odpowiadać pęknięciu na jednym z brzegów, wewnętrznym lub zewnętrznym, względnie wewnątrz krążka. W szczególnych przypadkach, tarcz o stałej grubości optymalnie sprężonych bądź, alternatywnie, optymalnie ukształtowanych (w założonej klasie funkcji) przy założonym wstępnym sprężeniu, może dojść do jednoczesnego powstania makropęknięć na obu brzegach równocześnie. Dzięki takiemu zabiegowi można uzyskać kilkukrotne wydłużenie czasu zniszczenia tarcz t_1 . Ewentualna pokrytyczna praca tarczy w drugiej fazie nie jest analizowana.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Zajmiemy się opisem zagadnienia osiowo-symetrycznego dysku (1) o zmiennej grubości z otworem wewnętrznym, na który nasadzono z wciskiem sprężystą obręcz o stałej grubości (2) rys. 1. Dysk podlega pełzaniu nieustalonemu, z uwzględnieniem efektów pełzania trzeciorzędowego, pod działaniem obciążeń pochodzących od wirowania i obciążeń powierzchniowych. Wprowadzając układ współrzędnych biegunowych o początku w środku dysku i opisując zadanie w przemieszczeniach, za R. K. PENNY i D. L. MARRIOTT [10] oraz zakładając, że całkowite odkształcenia w dysku są sumą odkształceń



Rys. 1. Wirujący krążek pelzający o zmiennej grubości (1) z pierścieniem sprężającym (2)

sprężystych i odkształceń pelzania, otrzymujemy na gruncie teorii ośrodków ciągłych następujący układ równań:

$$(2.1) \quad \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial r} (h\sigma_r) + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho\omega^2 r = 0,$$

$$(2.2) \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^c = \frac{\sigma_r - \nu\sigma_\theta}{E} + \varepsilon_r^c,$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^c = \frac{\sigma_\theta - \nu\sigma_r}{E} + \varepsilon_\theta^c.$$

Odwracając równania (2.1) otrzymujemy:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{u}{r} \right) - (\varepsilon_r^c + \nu\varepsilon_\theta^c) \right\}, \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial r} \right) - (\varepsilon_\theta^c + \nu\varepsilon_r^c) \right\}, \end{aligned}$$

a po wykorzystaniu (2.1) uzyskujemy podstawowe równanie opisujące problem w przemieszczeniach:

$$(2.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{v}{h} \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \frac{u}{r} = \frac{f^*}{r} + \frac{\partial g^*}{\partial r} + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial r} g^* - k^* r,$$

w którym przyjęto następujące oznaczenia:

$$(2.5) \quad f^* = (1-v)(\varepsilon_r^c - \varepsilon_\theta^c), \quad g^* = \varepsilon_r^c + v\varepsilon_\theta^c, \quad k^* = \frac{1-v^2}{E} \rho \omega^2.$$

Równanie (2.4), po wprowadzeniu zależności opisującej grubość tarczy w postaci

$$(2.6) \quad h(r) = h_0 r^\alpha \quad \text{dla} \quad \alpha \in \mathcal{R},$$

staje się równaniem typu Eulera

$$(2.7) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (1+\alpha) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - (1-v\alpha) \frac{u}{r^2} = \frac{\alpha g^* + f^*}{r} + \frac{\partial g^*}{\partial r} - k^* r.$$

W przypadku krążka o stałej grubości ($\alpha = 0$) otrzymujemy odpowiednio (PENNY-MARRIOTT [10]):

$$(2.8) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{f^*}{r} + \frac{\partial g^*}{\partial r} - k^* r.$$

Należy również sprecyzować postać związków konstytutywnych dla pełzania. W tym celu posłużymy się teorią płynięcia w ujęciu przyrostowym, przy założeniu płaskiego stanu naprężenia i nieściśliwości odkształceń pełzania:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} d\varepsilon_r^c &= \frac{d\varepsilon_i}{\sigma_i} \left(\sigma_r - \frac{\sigma_\theta}{2} \right), \\ d\varepsilon_\theta^c &= \frac{d\varepsilon_i}{\sigma_i} \left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_r}{2} \right), \\ d\varepsilon_z^c &= -(d\varepsilon_r^c + d\varepsilon_\theta^c), \end{aligned}$$

gdzie intensywności naprężeń i przyrostów odkształceń wyrażają się wzorami

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \sigma_i &= [\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta]^{1/2}, \\ d\varepsilon_i &= \frac{2}{3^{1/2}} [(d\varepsilon_r^c)^2 + (d\varepsilon_\theta^c)^2 - d\varepsilon_r^c d\varepsilon_\theta^c]^{1/2}. \end{aligned}$$

W celu uwzględnienia dodatkowych efektów kruchego pęknięcia zastosujemy teorię zniszczenia L. M. KACZANOWA [6]:

$$(2.11) \quad \frac{d\psi}{dt} = -C \left(\frac{\sigma_{\text{red}}}{\psi} \right)^n, \quad \sigma_{\text{red}} = \delta \sigma_1 + (1-\delta) \sigma_i.$$

Jeśli w powyższym wzorze przyjmiemy $\delta = 1$, to otrzymujemy znany w litera-

turze wzór KACZANOWA [6], z kryterium A. E. JOHNSONA [5] największego naprężenia normalnego, natomiast w przypadku $\delta = 0,5$ uzyskujemy zależność podaną przez V. P. SDOBYRIEWA [14]. Uogólniając teorię umocnienia zależnego od czasu (time hardening) poprzez uwzględnienie efektów kruchego pęknięcia otrzymujemy (BOYLE-SPENCE [4]):

$$(2.12) \quad d\varepsilon_i = \left(\frac{\sigma_i}{\psi} \right)^m f'(t) dt,$$

$$d\varepsilon_r^c = \frac{\sigma_r^{m-1}}{\psi^m} \left(\sigma_r - \frac{\sigma_\theta}{2} \right) f'(t) dt,$$

$$(2.13) \quad d\varepsilon_\theta^c = \frac{\sigma_\theta^{m-1}}{\psi^m} \left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_r}{2} \right) f'(t) dt,$$

$$d\varepsilon_z^c = -(d\varepsilon_r^c + d\varepsilon_\theta^c).$$

3. RÓWNIANIA PODSTAWOWE

Zestawimy zależności podstawowe przechodząc konsekwentnie do zapisu bezwymiarowego, wprowadzając za PENNY-MARRIOTT [10] bezwymiarowe zmienne zdefiniowane następująco:

$$U = \frac{u}{a\varepsilon_0}, \quad X = \frac{a}{r}, \quad f = \frac{f^*}{\varepsilon_0}, \quad g = \frac{g^*}{\varepsilon_0}, \quad k = k^* \frac{a^2}{\varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E},$$

$$(3.1) \quad \Sigma_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_0}, \quad \Sigma_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0}, \quad \Sigma_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_0}, \quad \Sigma_{red} = \frac{\sigma_{red}}{\sigma_0}, \quad H_0 = \frac{h_0}{a}, \quad V = \frac{v}{2\pi a^3},$$

$$E_r^c = \frac{\varepsilon_r^c}{\varepsilon_0}, \quad E_\theta^c = \frac{\varepsilon_\theta^c}{\varepsilon_0}, \quad T = E\sigma_0^{m-1} f(t), \quad p_{a,b} = \frac{P_{a,b}}{\sigma_0}, \quad Q = \frac{q}{\sigma_0}.$$

Wykorzystując definicje (3.1) oraz dokonując formalnego różniczkowania równania (2.7) względem bezwymiarowego czasu otrzymujemy:

$$(3.2) \quad X^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + (1-\nu)X \frac{\partial U}{\partial X} - (1-\nu\kappa)U = -\frac{k}{X^3} \quad \text{dla } T = 0,$$

$$X^2 \frac{\partial^2 \dot{U}}{\partial X^2} + (1-\nu)X \frac{\partial \dot{U}}{\partial X} - (1-\nu\kappa)\dot{U} = \frac{\kappa\dot{g} + \dot{f}}{X} - \frac{\partial \dot{g}}{\partial X} - \frac{\dot{k}}{X^3} \quad \text{dla } T > 0.$$

W przypadku krążka o stałej grubości odpowiedni układ równań ma postać (PENNY-MARRIOTT [10]):

$$(3.3) \quad \frac{\partial}{\partial X} \left[X^3 \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{U}{X} \right) \right] = -\frac{k}{X^3} \quad \text{dla } T = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[X^3 \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\dot{U}}{X} \right) \right] = \frac{\dot{f}}{X} - \frac{\partial \dot{g}}{\partial X} - \frac{\dot{k}}{X^3} \quad \text{dla } T > 0.$$

Symbole k , \dot{k} , \dot{f} , \dot{g} oznaczają odpowiednio (przy założeniu stałej prędkości wirowania $\dot{\omega} = 0$):

$$(3.4) \quad k = \frac{1-v^2}{\sigma_0} \rho \omega^2 a^2, \quad \dot{k} = 0, \quad \dot{f} = (1-v)(\dot{E}_r^c - \dot{E}_\theta^c), \quad \dot{g} = \dot{E}_r^c + v \dot{E}_\theta^c.$$

Pierwsze z równań (3.2) posiada rozwiązanie (TIMOSZENKO [12]):

$$(3.5) \quad U = -\frac{A}{2} X^{s_1} + B X^{s_2} - \frac{k}{8+(v+3)\kappa} \frac{1}{X^3} \quad \text{dla } T = 0,$$

natomiast rozwiązaniem drugiego jest funkcja o następującej postaci:

$$(3.6) \quad \dot{U} = -\frac{A_1}{2} X^{s_1} + B_1 X^{s_2} + I_1 X \quad \text{dla } T > 0.$$

Występujące w powyższych wzorach pierwiastki równania charakterystycznego wynoszą

$$(3.7) \quad s_{1,2} = \frac{\kappa \mp [\kappa^2 + 4(1-v\kappa)]^{1/2}}{2},$$

natomiast symbolem I_1 oznaczono następujące wyrażenie:

$$(3.8) \quad I_1 = \frac{1}{s_2 - s_1} \times \left\{ -X^{s_1-1} \int_1^x \frac{\dot{g}[\kappa - (s_1+1)] + \dot{f}}{X^{s_1+2}} dX + X^{s_2-1} \int_1^x \frac{\dot{g}[\kappa - (s_2+1)] + \dot{f}}{X^{s_2+2}} dX \right\}.$$

W chwili $T = 0$ bezwymiarowe naprężenia i odkształcenia pełzania mają postać:

$$(3.9) \quad \Sigma_r = \frac{1}{1-v^2} \left\{ -(-s_1+v) \frac{A}{2} X^{s_1+1} - (s_2-v) B X^{s_2+1} - \frac{(3+v)k}{8+(v+3)\kappa X^2} \right\},$$

$$\Sigma_\theta = \frac{1}{1-v^2} \left\{ -(1-s_1v) \frac{A}{2} X^{s_1+1} + (1-s_2v) B X^{s_2+1} - \frac{(1+3v)k}{8+(v+3)\kappa X^2} \right\},$$

$$E_r = s_1 \frac{A}{2} X^{s_1+1} - s_2 B X^{s_2+1} - \frac{3k}{8+(v+3)\kappa X^2},$$

$$E_\theta = -\frac{A}{2} X^{s_1+1} + B X^{s_2+1} - \frac{1k}{8+(v+3)\kappa X^2}.$$

Natomiast dla $T > 0$ odpowiednie prędkości naprężeń i odkształceń wynoszą:

$$\begin{aligned}
 \dot{\Sigma}_r &= \frac{1}{1-\nu^2} \left\{ -(-s_1 + \nu) \frac{A_1}{2} X^{s_1+1} - (s_2 - \nu) B_1 X^{s_2+1} + I_2 + I_3 \right\}, \\
 \dot{\Sigma}_\theta &= \frac{1}{1-\nu^2} \left\{ -(1-s_1\nu) \frac{A_1}{2} X^{s_1+1} + (1-s_2\nu) B_1 X^{s_2+1} + \right. \\
 (3.10) \quad &\quad \left. + \frac{-s_1\nu+1}{-s_1+\nu} I_2 + \frac{-s_2\nu+1}{-s_2+\nu} I_3 \right\} - \dot{E}_\theta^c, \\
 \dot{E}_r &= s_1 \frac{A_1}{2} X^{s_1+1} - s_2 B_1 X^{s_2+1} - \frac{s_1 I_2}{-s_1+\nu} - \frac{s_2 I_3}{-s_2+\nu} + \dot{g}, \\
 \dot{E}_\theta &= -\frac{A_1}{2} X^{s_1+1} + B_1 X^{s_2+1} + \frac{I_2}{-s_1+\nu} + \frac{I_3}{-s_2+\nu}.
 \end{aligned}$$

Całki I_2, I_3 określone są następująco:

$$\begin{aligned}
 (3.11) \quad I_2 &= -\frac{-s_1 + \nu}{s_2 - s_1} X^{s_1+1} \int_1^x \frac{\dot{g}[\kappa - (s_1 + 1)] + f}{X^{s_1+2}} dX, \\
 I_3 &= \frac{-s_2 + \nu}{s_2 - s_1} X^{s_2+1} \int_1^x \frac{\dot{g}[\kappa - (s_2 + 1)] + f}{X^{s_2+2}} dX,
 \end{aligned}$$

W przypadku tarczy o stałej grubości ($\kappa = 0$) wzory (3.5)–(3.11) przechodzą w rozwiązanie PENNY–MARRIOTT [10]:

dla $T = 0$

$$\begin{aligned}
 (3.12) \quad U &= -\frac{A}{2X} + BX - \frac{k}{8X^3}; \\
 \Sigma_r &= \frac{1}{1-\nu^2} \left\{ -(1+\nu) \frac{A}{2} - (1-\nu) BX^2 - (3+\nu) \frac{k}{8X^2} \right\}, \\
 \Sigma_\theta &= \frac{1}{1-\nu^2} \left\{ -(1+\nu) \frac{A}{2} + (1-\nu) BX^2 - (1+3\nu) \frac{k}{8X^2} \right\}, \\
 (3.13) \quad E_r &= -\frac{A}{2} - BX^2 - \frac{3k}{8X^2}, \\
 E_\theta &= -\frac{A}{2} + BX^2 - \frac{k}{8X^2},
 \end{aligned}$$

dla $T > 0$

$$\dot{U} = -\frac{A_1}{2X} + B_1 X + I_1 X;$$

(3.14)

$$\dot{\Sigma}_r = \frac{1}{1-\nu^2} \left\{ -(1+\nu) \frac{A_1}{2} - (1-\nu) B_1 X^2 + I_2 + I_3 \right\},$$

$$\dot{\Sigma}_\theta = \frac{1}{1-\nu^2} \left\{ -(1+\nu) \frac{A_1}{2} + (1-\nu) B_1 X^2 + I_2 - I_3 \right\} - \dot{E}_\theta^c,$$

(3.15)

$$\dot{E}_r = -\frac{A_1}{2} - B_1 X^2 + \frac{I_2}{1+\nu} + \frac{I_3}{1-\nu} + \dot{g},$$

$$\dot{E}_\theta = -\frac{A_1}{2} + B_1 X^2 + \frac{I_2}{1+\nu} - \frac{I_3}{1-\nu},$$

w których przyjęto następujące oznaczenia:

$$(3.16) \quad I_1 = -\frac{1}{2X^2} \int_1^x \frac{\dot{f}}{X} dX - \frac{1}{2} \int_1^x \frac{2\dot{g}-\dot{f}}{X^3} dX,$$

$$I_2 = -\frac{1+\nu}{2} \int_1^x \frac{\dot{f}}{X} dX, \quad I_3 = \frac{1-\nu}{2} X^2 \int_1^x \frac{2\dot{g}-\dot{f}}{X^3} dX.$$

Prędkości odkształceń pełzania \dot{E}_r^c , \dot{E}_θ^c , występujące w (3.4) otrzymujemy z (2.13) podstawiając definicje (3.1):

$$(3.17) \quad \dot{E}_r^c = \frac{\Sigma_i^{m-1}}{\psi^m} \left(\Sigma_r - \frac{\Sigma_\theta}{2} \right),$$

$$\dot{E}_\theta^c = \frac{\Sigma_i^{m-1}}{\psi^m} \left(\Sigma_\theta - \frac{\Sigma_r}{2} \right).$$

Aktualne wartości funkcji $\psi(X)$ otrzymujemy z równania (2.11) w zapisie bezwymiarowym

$$(3.18) \quad d\psi = -C\sigma_0^n t_k \left(\frac{\Sigma_{\text{red}}}{\psi} \right)^n dT,$$

w którym wprowadzono dodatkowe oznaczenie

$$(3.19) \quad t_k = \frac{1}{E\sigma_0^{m-1} f'}, \quad T = \frac{t}{t_k}.$$

Równania dla części sprężystej (obręcz sprężająca o stałej grubości) są identyczne z (3.13).

W celu zamknięcia kompletu równań napiszemy jeszcze w postaci bezwymiarowej funkcję zmiennej grubości tarczy

$$(3.20) \quad H(X) = H_0 \alpha^\nu X^{-\nu}$$

oraz warunek stałej objętości

$$(3.21) \quad V = \frac{H_0}{a^2} \begin{cases} a^{\kappa+2} \frac{X_0^{-(\kappa+2)} - 1}{\kappa+2} & \text{dla każdego } \kappa \\ -\ln X_0 & \text{dla } \kappa = -2. \end{cases}$$

Stałe dowolne A, B, A_1, B_1 zostaną określone z odpowiednich warunków brzegowych i początkowych dla procesu pełzania.

3.1. Tarcza pod działaniem stałego ciśnienia wewnętrznego i zewnętrznego

W przypadku stałych obciążeń P_a, P_b (w sensie stałych wypadkowych sił promieniowych niezależnie od grubości kształtowanej tarczy) otrzymujemy: dla $T = 0$

$$(3.22) \quad \begin{aligned} H(1) \Sigma_r^c(1) &= -H_0 P_a, \\ H(X_0) \Sigma_r^c(X_0) &= -H_0 Q, \\ \Sigma_r^e(X_0) &= -Q, \\ \Sigma_r^e(X_2) &= -P_b, \end{aligned}$$

dla $T > 0$

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \dot{\Sigma}_r^c(1) &= 0, \\ H(X_0) \dot{\Sigma}_r^c(X_0) dT &= H_0 d\Sigma_r^e(X_0), \\ \dot{U}^e(X_0) dT &= dU^e(X_0), \\ \Sigma_r^e(X_2) &= -P_b. \end{aligned}$$

3.2. Tarcza zamocowana na sztywnym wale

W przypadku tarczy utwierdzonej na nieodkształcalnym trzpieniu otrzymujemy odpowiednio:

dla $T = 0$

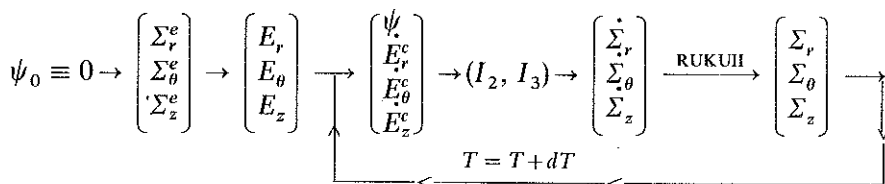
$$(3.24) \quad \begin{aligned} U^c(1) &= 0, \\ H(X_0) \Sigma_r^c(X_0) &= -H_0 Q, \\ \Sigma_r^e(X_0) &= -Q, \\ \Sigma_r^e(X_2) &= -P_b; \end{aligned}$$

dla $T > 0$

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \dot{U}^e(1) &= 0, \\ H(X_0) * \dot{\Sigma}_r^e(X_0) dT &= H_0 * d\Sigma_r^e(X_0), \\ \dot{U}^e(X_0) dT &= dU^e(X_0), \\ \Sigma_r^e(X_2) &= -P_b. \end{aligned}$$

4. ALGORYTM OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Procedura rozwiązania problemu zaczyna się od znalezienia rozwiązania problemu sprężystego. Znając początkowe naprężenia i odkształcenia oraz przyjmując $\psi_0 \equiv 1$ można wyznaczyć prędkości odkształceń pełzania (3.17), całki I_2, I_3 (3.11) oraz prędkości naprężeń (3.10). W kolejnym kroku czasowym obliczane są „nowe” wartości naprężeń i funkcji ciągłości $\psi(X)$. Proces iteracyjny zostaje zakończony z chwilą, gdy funkcja ciągłości $\psi(X)$ osiągnie lokalnie dostatecznie małe wartości.



Opracowano algorytm numeryczny dla komputera typu IBM PC wykorzystując procedury całkowania metodą trapezów dla kroku przestrzennego (obliczanie I_2, I_3) oraz metodą Rungego–Kutty 2-stopnia dla kroku czasowego. Wielkości kroków czasowego i przestrzennego dobrano wykonując serię następujących testów numerycznych: a) Dla kroku przestrzennego ustalono minimalną liczbę równomiernego podziału przedziału całkowania na 50 części (przy ustalonych pozostałych parametrach był to najmniejszy podział nie powodujący mierzalnych zmian czasu inicjacji). b) W przypadku doboru kroku czasowego okazało się konieczne zastosowanie kroku zmiennego tak, aby przyrost funkcji ciągłości zawierał się w przedziale 0,01–0,003 (powyższa szerokość przedziału została ustalona eksperymentalnie jako zapewniająca dobrą stabilność numeryczną procesu). W okresie pełzania pierwszorzędowego następował stopniowy wzrost kroku czasowego, w okresie pełzania ustalonego krok nie zmieniał się, by z chwilą przejścia do okresu trzeciorzędowego maleć. Średnia liczba kroków czasowych wahała się pomiędzy 150 i 300, a jedynie w przypadku badania punktu załomu na krzywej odpowiadającej prędkości wirowania $\omega = 320 \text{ s}^{-1}$ (rys. 5) ze względu na silny efekt ostrza (słaba stabilność numeryczna) zastosowano 350 kroków czasowych.

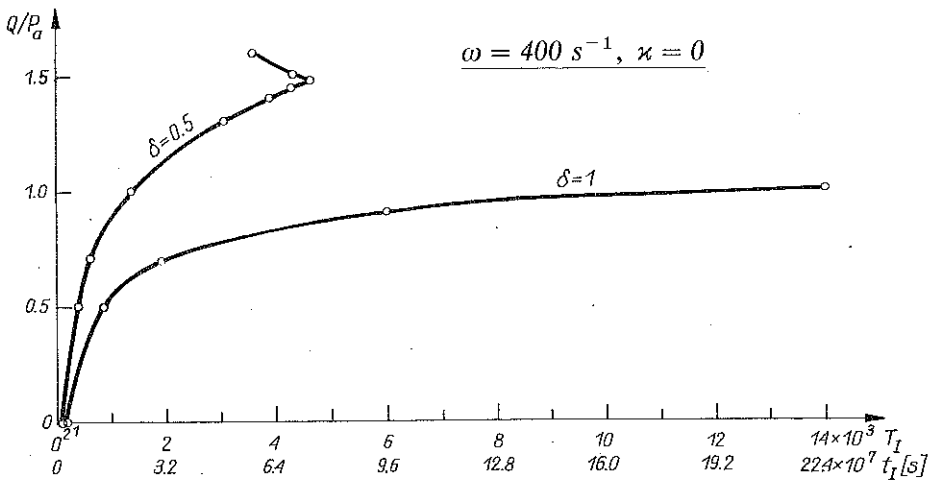
5. DOBÓR OPTIMALNEGO WSTĘPNEGO WCISKU DLA KRĄŻKA O STAŁEJ GRUBOŚCI

Obliczono kilkanaście przykładów numerycznych używając następujących danych liczbowych zaczerpniętych z pracy F. K. G. ODQVISTA [10], dla krążka wykonanego ze stali ASTM-321-18Cr, 8Ni, 0,45Si, 0,4Mn, 0,1C pozostającego w temperaturze 873 K: $E = 1,5 \times 10^5$ MPa, $\sigma_0 = 10$ MPa, $\nu = 0,3$, $n = 3$, $C = 1,23 \times 10^{-29}$ Pa $^{-n}$ /s, $m = 4,5$, $a = 0,01$ m, $h_0 = 0,002$ m, $X_0 = 0,20$, $X_2 = 0,19$, $P_a = 0,10$, $P_b = 0,0$, $Q = 0,0 \div 0,25$, $\rho = 7,8 \times 10^{-2}$ MN/m 3 , $\omega = 0 \div 560$ s $^{-1}$, $t_k = 1,6 \times 10^4$ s.

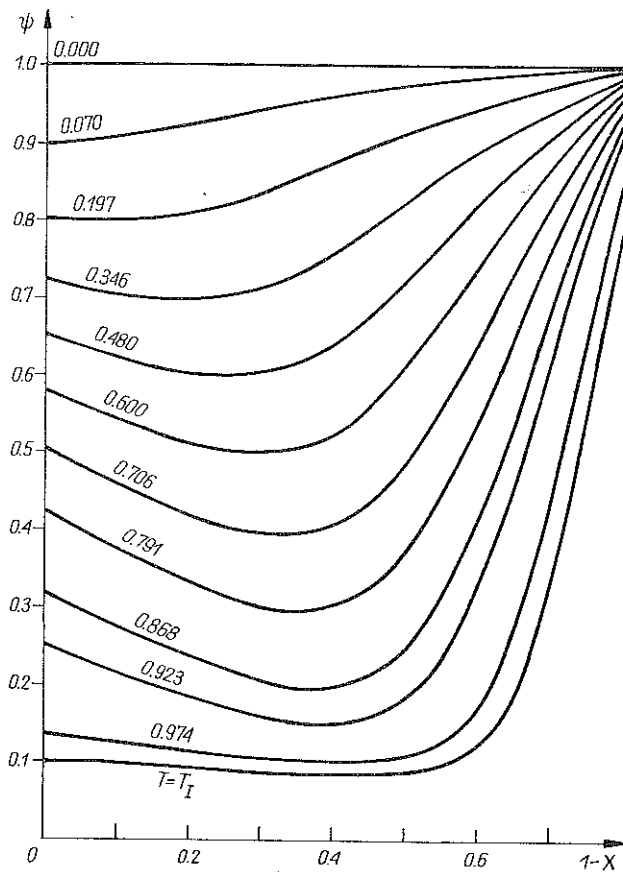
Zasadniczy wpływ na rodzaj zniszczenia sprężonego krążka o stałej grubości ($\kappa = 0$) i poddanego zespołowi dwóch niezależnych ciśnień (grupa warunków brzegowych (3.22) i (3.23)) mają: rodzaj użytego kryterium w prawie pęknięcia δ , wartość wstępnego wcisku Q oraz prędkość kątowna wirowania ω . Omówimy obecnie szczegółowo każdy z nich.

5.1. Tarcza wirująca poddana działaniu ciśnienia wewnętrznego i zewnętrznego

Na rys. 2 przedstawiono zależność czasu powstania pierwszych makropęknięć od względnej wartości wcisku przy ustalonych obrotach dla dwóch różnych hipotez naprężenia zredukowanego w prawie pęknięcia. W przypadku występowania wyłącznie naprężeń ściskających i przyjęcia kryterium Johnsona, rozwój mikrouszkodzeń nie następuje. Fakt ten znajduje swoje odzwierciedlenie w asymptotycznym kształcie krzywej uzyskanej dla parametru $\delta = 1$ (dla wcisków o wartościach $Q/P_a = 1,0$ czas inicjacji dąży do nieskończoności). Na rys. 3 przedstawiono ewolucję funkcji ciągłości $\psi(X)$ w przypadku inicjacji



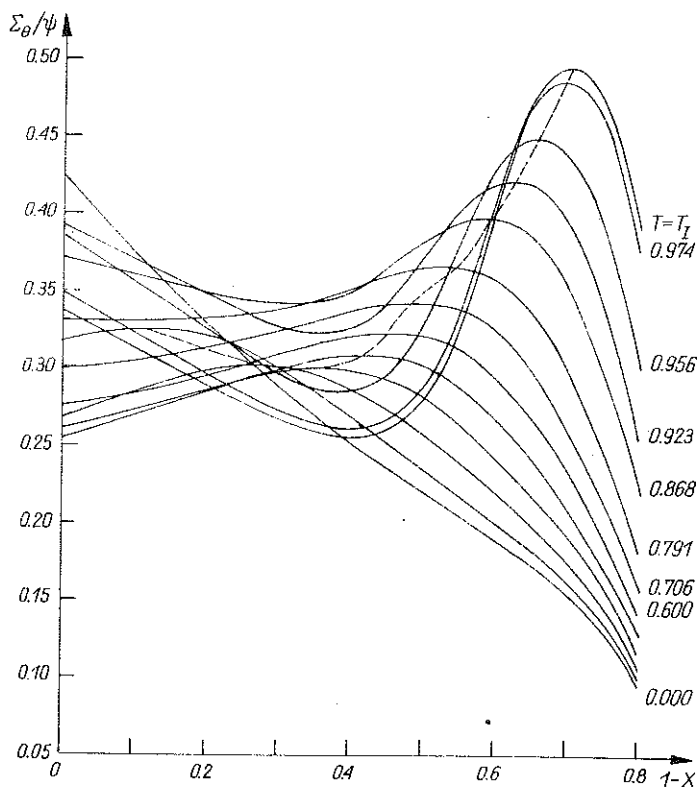
Rys. 2. Porównanie czasu kruchego zniszczenia krążków o stałej grubości ($\kappa = 0$) poddanych obciążeniu powierzchniowym przy ustalonych obrotach ($\omega = 400 \text{ s}^{-1}$) wg hipotezy Kaczanowa ($\delta = 1$) oraz Sdobyrciewa ($\delta = 0,5$)



Rys. 3. Ewolucja funkcji zniszczenia $\psi(X)$ wg teorii Kaczanowa p. 1 ($\delta = 1$, $\omega = 400 \text{ s}^{-1}$, $Q/P_a = 0$)

zniszczenia w środku krążka p. 1 z rys. 2. W okresie pełzania pierwszorzędowego mikropęknięcia koncentrują się głównie na brzegu wewnętrznym, natomiast po przejściu procesu w fazę ustaloną rozprzestrzeniają się w kierunku brzegu zewnętrznego. Okres pełzania trzeciorzędowego charakteryzuje się stosunkowo dużą jednorodnością i „rozmyciem” strefy zniszczenia na niemal całym promieniu krążka. Rys. 4, korespondujący z rys. 3, pokazuje redystrybucję rzeczywistych naprężeń obwodowych Σ_θ/ψ (jest to w przypadku $\delta = 1$ wielkość decydująca o procesie pęknięcia). Można zaobserwować, że z chwilą powstania maksimum naprężeń obwodowych Σ_θ/ψ rozpoczyna się „wędrówka” punktu odpowiadającego maksymalnemu zniszczeniu w kierunku brzegu zewnętrznego, wraz z przemieszczaniem się punktów maksymalnych naprężeń (rys. 4).

Natomiast jakościowo i ilościowo różne wyniki uzyskano przy zastosowaniu kryterium Sdobyriewa $\delta = 0,5$, według którego mikrouszkodzenia rozwijają się zarówno przy rozciąganiu jak i ściskaniu. W początkowym stadium

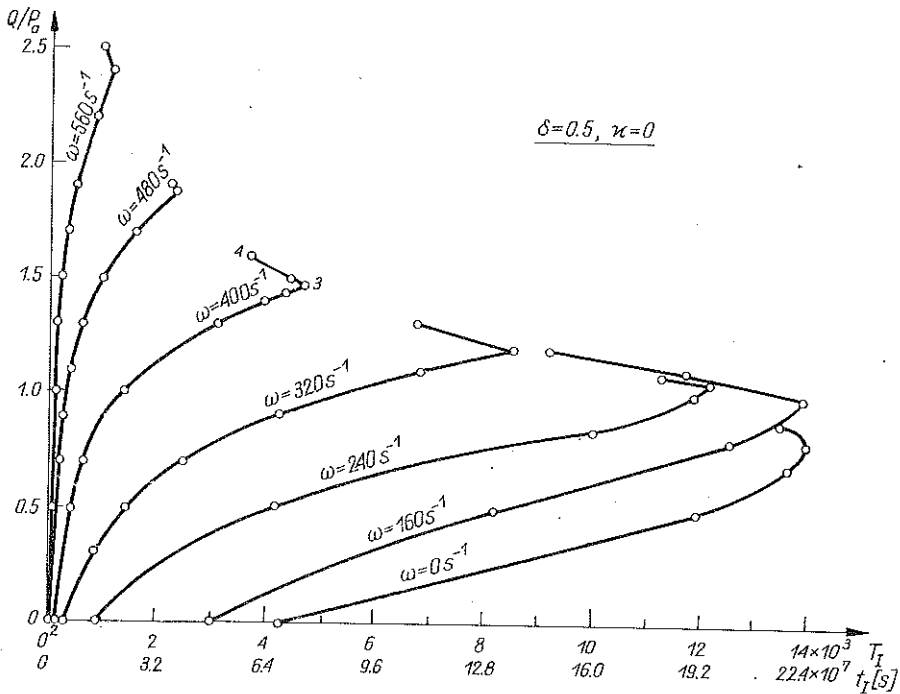


Rys. 4. Redystrybucja naprężeń obwodowych Σ_{θ}/ψ wg teorii Kaczanowa; p. 1 ($\delta = 1$, $\omega = 400 \text{ s}^{-1}$, $Q/P_a = 0$)

wykreś wykazuje duże podobieństwo z otrzymanym w przypadku kryterium Kaczanowa $\delta = 1$, aż do chwili przeniesienia punktu zniszczenia z brzegu wewnętrznego na zewnętrzny. Na odpowiedniej krzywej można zaobserwować charakterystyczny punkt narożny oddzielający gałęzie krzywej odpowiadające różnym schematom zniszczenia. Na rys. 5 zestawiono rodzinę krzywych zniszczenia wg kryterium Sdobryiewa $\delta = 0,5$ dla różnych prędkości wirowania ω i obciążenia dwoma niezależnymi ciśnieniami (grupa warunków brzegowych (3.22) i (3.23)).

Na podstawie rys. 5 można zauważyć następujące prawidłowości:

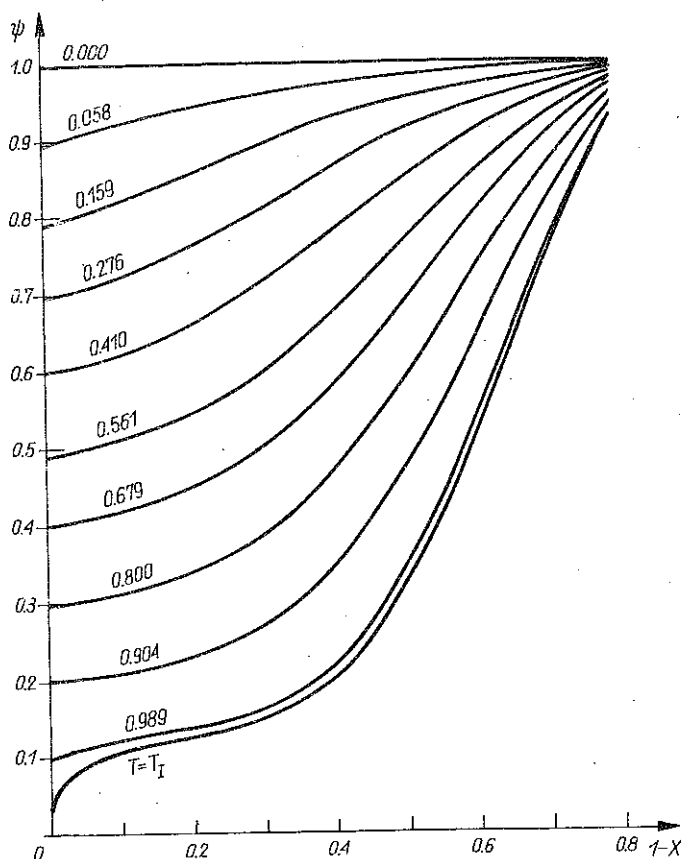
1. W przypadku małych prędkości obrotowych $\omega < 160 \text{ s}^{-1}$ i niedużych wielkości wcisków $Q/P_a = 0-0,8$ zniszczenie rozpoczyna się od brzegu wewnętrznego (pierwsze makropęknięcie zachodzi w punkcie $X = 1$). Przy zwiększaniu wartości wcisku czas inicjacji T_1 rośnie, aż do momentu osiągnięcia maksimum, po przekroczeniu którego, dalsze zwiększanie wcisku powoduje skrócenie czasu T_1 . Na całej krzywej zniszczenie występuje na brzegu wewnętrznym, tam bowiem rzeczywiste naprężenie zredukowane Σ_{red}/ψ (wielkość od której zależy proces pęknięcia) jest największe.



Rys. 5. Wpływ prędkości wirowania i wstępnego wcisku na formy i czas zniszczenia kruchego tarczy o stałej grubości poddanej obciążeniom powierzchniowym wg hipotezy Sdobyriewa ($\delta = 0,5$)

2. W zakresie prędkości obrotowych $\omega = 160 - 560 \text{ s}^{-1}$ i umiarkowanych wcisków $Q/P_a = 0 - 1,3$ pierwsze makropęknięcie również powstaje na brzegu wewnętrznym $X = 1$. W miarę wzrostu wstępnego ciśnienia wciskowego rośnie znacznie czas inicjacji T_i , aż do osiągnięcia załomu odpowiadającego jednoczesnemu makropęknięciu na obu brzegach (brzegu wewnętrznym $X = 1$ i zewnętrznym $X = X_0$). Przy dalszym wzroście wcisku $Q/P_a > 1,3$ następuje gwałtowne skrócenie czasu inicjacji T_i w wyniku zniszczenia na brzegu zewnętrznym.

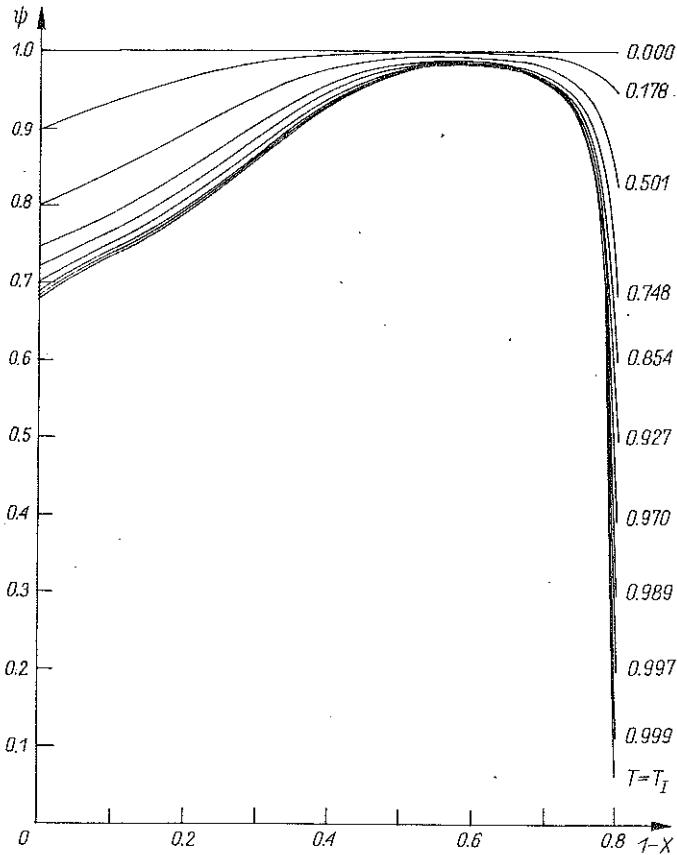
Na rysunku 6 pokazano wykres zmienności funkcji ciągłości $\psi(X)$ dla przypadku gdy pierwsze makropęknięcie występuje na brzegu wewnętrznym (p. 2 z rys. 5). Ewolucja funkcji ciągłości $\psi(X)$ w przypadku inicjacji zniszczenia na brzegu zewnętrznym (p. 4) została przedstawiona na rys. 7. W początkowej fazie procesu pełzania (okres pierwszorzędowy) mikropęknięcia następują głównie w miejscu największej koncentracji naprężeń (brzeg wewnętrzny $X = 1$), by dopiero pod koniec fazy inkubacji umiejscowić się na brzegu zewnętrznym, prowadząc w ostateczności do powstania pierwszego makropęknięcia na brzegu zewnętrznym $X = X_0$.



Rys. 6. Ewolucja funkcji zniszczenia $\psi(X)$ w przypadku gdy pierwsze makropęknięcie powstaje na brzegu wewnętrznym p. 2 ($\delta = 0,5$, $\omega = 400 \text{ s}^{-1}$, $Q/P_a = 0$)

5.2. Tarcza wirująca zamocowana na sztywnym wale

Rysunek 8 przedstawia rodzinę krzywych zniszczenia wg kryterium Sdobyriewa $\delta = 0,5$ dla różnych prędkości ω w przypadku, gdy krążek osadzony jest na sztywnym wale (warunki brzegowe (3.24) i (3.25)). Wykres wykazuje duże podobieństwo do rys. 5, pozostają słuszne również wszystkie poprzednio uczynione spostrzeżenia. Wyjątkiem jest jedynie zakres małych prędkości obrotowych $\omega \leq 240 \text{ s}^{-1}$ i niewielkich wcisków $Q = 0 - 0,05$, w którym zniszczenie rozpoczyna się od brzegu wewnętrznego, by ze wzrostem wartości wstępnego wcisku przenieść się na brzeg zewnętrzny i tam też osiągnąć maksimum czasu inicjacji T_I (w oknie na rys. 8 pokazano powiększony szczegół wykresu obejmujący okolice punktu równoczesnego zniszczenia p. 5 i maksimum czasu inicjacji p. 6).



Rys. 7. Ewolucja funkcji zniszczenia $\psi(X)$ w przypadku gdy pierwsze makropęknięcie powstaje na brzegu zewnętrznym p. 4 ($\delta = 0,5$, $\omega = 400 \text{ s}^{-1}$, $Q/P_a = 1,6$)

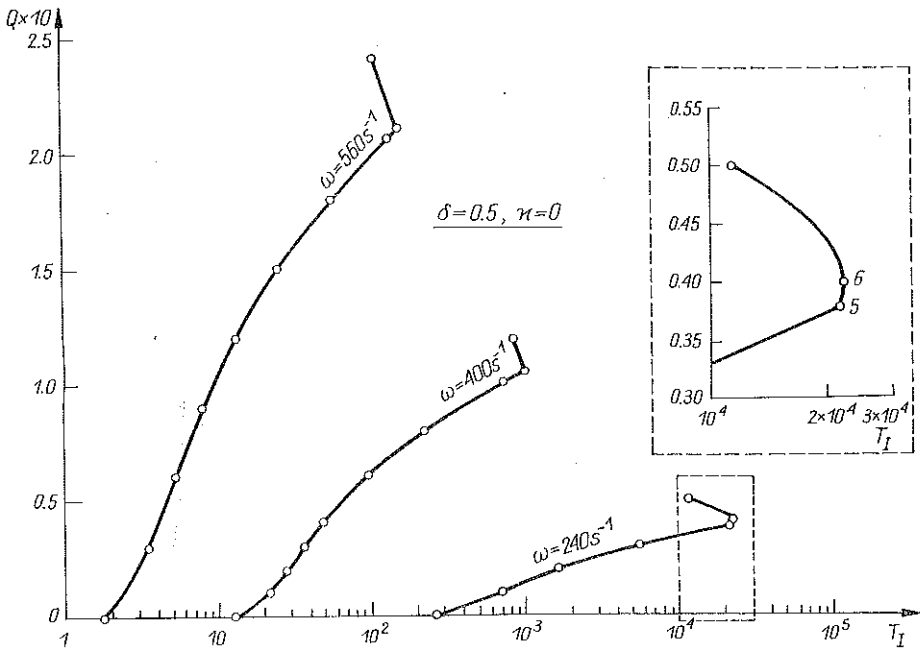
5.3. Dobór optymalnego wcisku

Na podstawie rys. 5 i rys. 8 można sformułować następujące warunki zapewniające optymalny wcisk:

1. W przypadku $\omega < 160 \text{ s}^{-1}$ optymalny wcisk Q_{OPT} krążka poddanego zespołowi dwóch ciśnień i zapewniający maksymalny czas inicjacji, prowadzący do powstania pierwszych makrouszkodzeń wyłącznie na brzegu wewnętrznym $X = 1$, wyznaczamy z warunku

$$(5.1) \quad T_{\text{Imax}} = \max_Q T_1(X = 1).$$

2. Odpowiednio dla dysku osadzonego na sztywnym wałku i obracającego się z prędkością kątową $\omega \leq 240 \text{ s}^{-1}$ warunek zapewniający optymalny wcisk



Rys. 8. Wpływ prędkości wirowania i wstępnego wcisku na formy i czas zniszczenia kruchego tarczy o stałej grubości osadzonej na sztywnym wale wg hipotezy Sdobyriewa ($\delta = 0,5$)

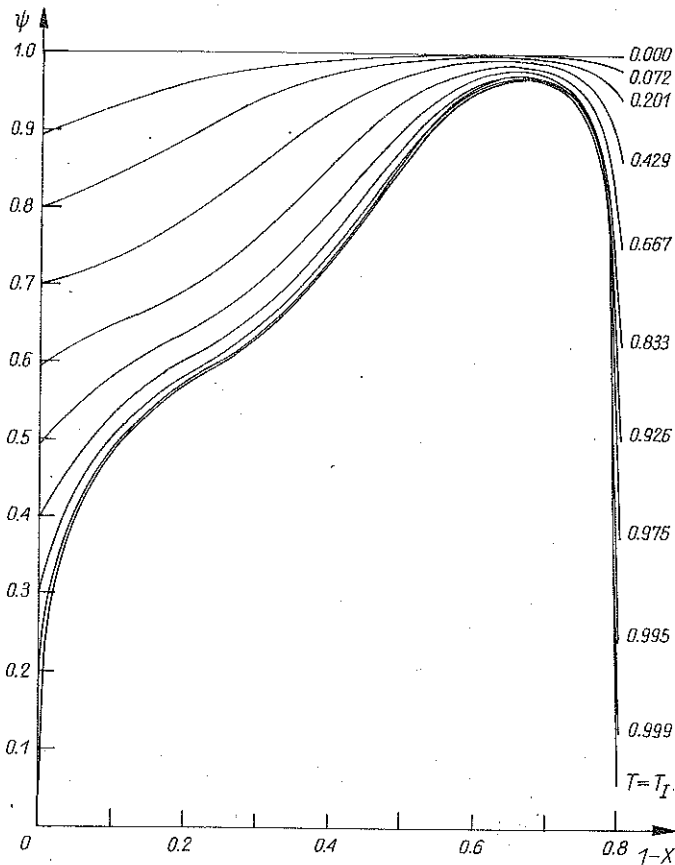
Q_{OPT} przyjmuje postać

$$(5.2) \quad T_{I_{max}} = \max_Q T_I(X = X_0).$$

3. W przypadku $\omega > 160 \text{ s}^{-1}$ dla krążka poddanego zespołowi dwóch ciśnień i $\omega > 240 \text{ s}^{-1}$ dla dysku osadzonego na sztywnym wałku optymalny wcisk Q_{OPT} należy dobierać z warunku równoczesnego powstania pierwszych makrouszkodzeń na obu brzegach $X = 1$ i $X = X_0$:

$$(5.3) \quad T_{I_{max}} = T_I(X = 1) = T_I(X = X_0).$$

W celu zilustrowania punktów jednoczesnego zniszczenia na rys. 9 pokazano funkcję ciągłości $\psi(X)$ (p. 3 na rys. 5). Z analizy przebiegu krzywych $\psi(X)$ na rys. 9 można zaobserwować nierównomierną prędkość rozwoju uszkodzeń na obu brzegach oraz niejednorodną koncentrację mikrodefektów wzdłuż promienia. Brzeg wewnętrzny tarczy podlega bardziej równomiernemu spękaniu niż część zewnętrzna, w której zniszczenie koncentruje się w bardzo wąskim obszarze i dokonuje się ono w końcowej fazie inkubacji.

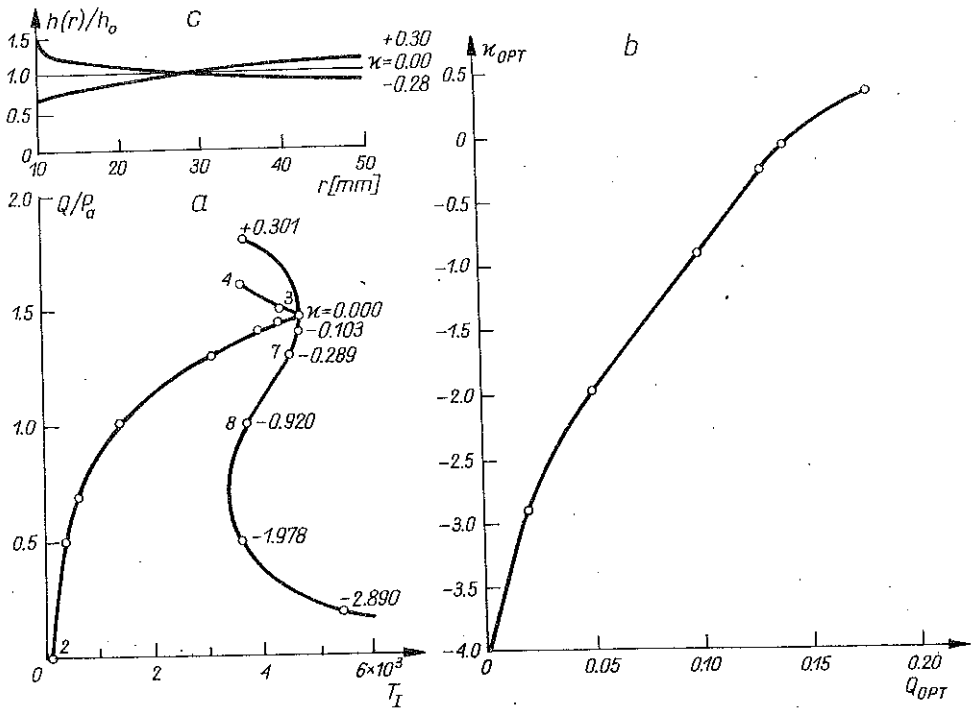


Rys. 9. Ewolucja funkcji zniszczenia $\psi(X)$ w przypadku optymalnego sprężenia tarczy o stałej grubości ($\kappa = 0$); p. 3 ($\delta = 0,5$, $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$, $Q/P_a = 1,468$)

6. OPTIMALNE KSZTAŁTOWANIE TARCZY O ZMIENNEJ GRUBOŚCI

Poszukiwać będziemy takiego rozkładu grubości tarczy sprężonej poddanej zespołowi dwóch ciśnień (w klasie kształtów opisanych równaniem (2.6)), która spełnia warunek stałej objętości (3.21) i daje największy czas inicjacji makrouszkodzeń. W tym celu przy ustalonych obrotach $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$, ciśnieniu wewnętrznym $P_a = 0,1$, $P_b = 0,0$ i kryterium Sdobyriewa $\delta = 0,5$ zbadano czas powstania jednoczesnego makrouszkodzenia na obu brzegach w zależności od wartości wstępnego wcisku Q oraz wykładnika κ w prawie zmiany grubości tarczy (2.6). Otrzymano następujące rezultaty (rys. 10a):

1. W zakresie $\kappa \in [0,301, 0)$ i $Q/P_a \geq 1,468$ (krążki o profilu potęgowym nadmiernie sprężone rys. 10c) malejącym wykładnikom κ odpowiadają coraz większe czasy inicjacji.



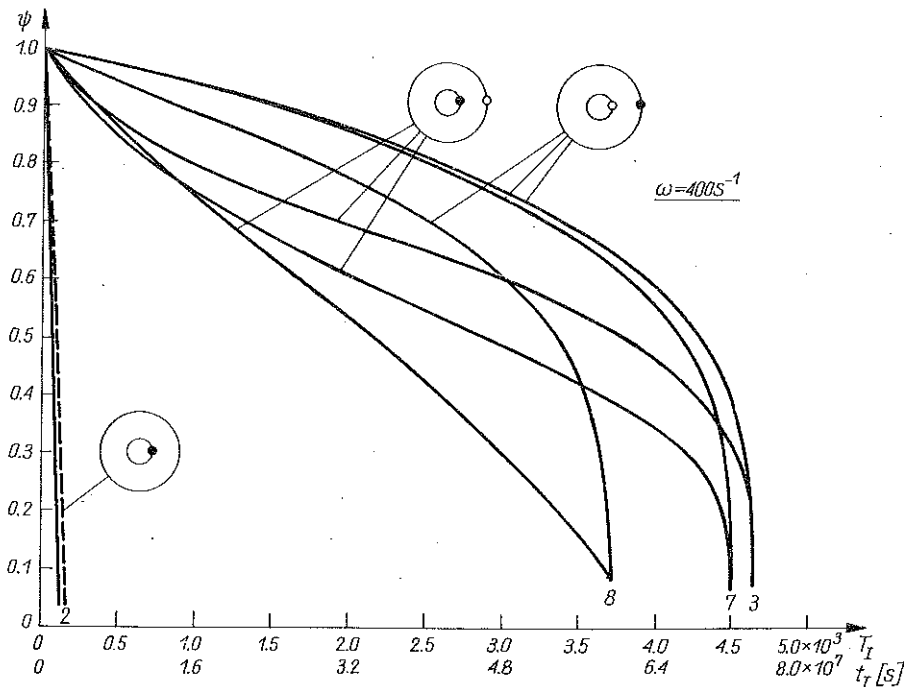
Rys. 10a. Wpływ kształtowania parametrycznego na czas zniszczenia krędków wstępnie sprężonych. b. Zależność optymalnego wykładnika κ_{OPT} od wartości wstępnego wcisku Q_{OPT} . c. Kształty krędków optymalnie ukształtowanych

2. Dla $\kappa = 0$ i $Q/P_a = 1,468$ zaobserwować można istnienie lokalnego maksimum czasu inicjacji T_I , przy czym optymalnym jest krążek o stałej grubości (rys. 10c).

3. Przy dalszym zmniejszaniu wartości wykładnika $\kappa < 0$ i $Q/P_a \leq 1,468$ (krążki o profilu hiperbolicznym rys. 10c) czas inicjacji T_I początkowo maleje, by począwszy od wartości $\kappa \cong -1,5$ (krążki o silnie hiperbolicznym profilu słabo sprężone) zacząć rosnąć. Przy wstępnym sprężeniu malejącym do zera $Q = 0$ oraz obciążeniu zewnętrznym $P_a = 0,1$ „optymalny” kształt odpowiada skupieniu całej jego masy na promieniu wewnętrznym. Z uwagi na przyjęte założenie płaskiego stanu naprężenia, praktyczne znaczenie posiadają jedynie rozwiązania dla tarcz o słabo zmiennej grubości. Na rys. 10b pokazano zależność optymalnego wykładnika κ_{OPT} od optymalnego wcisku Q_{OPT} .

7. WNIOSKI KOŃCOWE

Na rys. 11 przedstawiono zmianę charakterystycznych wartości funkcji ciągłości w punktach zniszczenia $\psi(X)$ w czasie, przy ustalonych obrotach

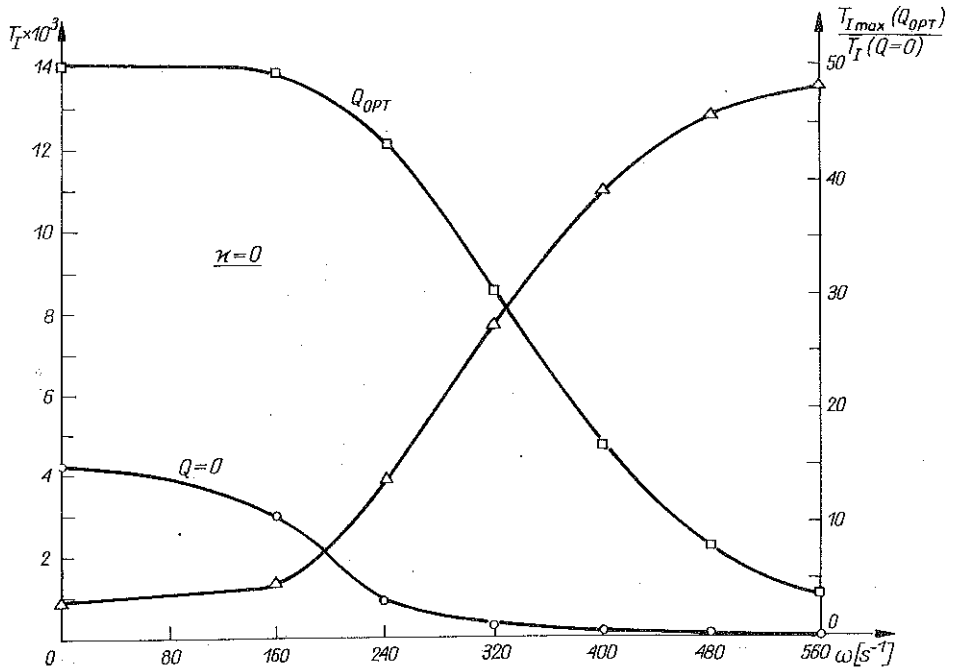


Rys. 11. Porównanie czasów zniszczenia i ewolucji funkcji $\psi(X)$; (2) tarcza o stałej grubości—niesprężona ($\kappa = 0$, $Q/P_a = 0$); (3) tarcza o stałej grubości—optymalnie sprężona ($\kappa = 0$, $Q/P_a = 1,468$); (7) tarcza o kształcie hiperbolicznym—silnie sprężona ($\kappa = -0,289$, $Q/P_a = 1,3$); (8) tarcza o kształcie hiperbolicznym—słabo sprężona ($\kappa = -0,920$, $Q/P_a = 1,0$)

$\omega = 400 \text{ s}^{-1}$ oraz czterech różnych wartościach wstępnego wcisku odpowiadających odmiennym mechanizmom zniszczenia dla krążka o stałej grubości i krążka ukształtowanego optymalnie. Oznaczenia korespondują z punktami na rys. 5, 8 i 10a mianowicie: 2 — $Q/P_a = 0$ i $\kappa = 0$ (krążek o stałej grubości, niesprężony — zniszczenie na brzegu wewnętrznym $X = 1$), 3 — $Q/P_a = 1,468$, $\kappa = 0$ (krążek o stałej grubości, optymalnie sprężony — równoczesne zniszczenie na obu brzegach $X = 1$ i $X = X_0$, przypadek optymalny), 7 — $Q/P_a = 1,3$, $\kappa = -0,289$ (równoczesne zniszczenie na obu brzegach, krążek o kształcie hiperbolicznym silnie sprężony), 8 — $Q/P_a = 1,0$, $\kappa = -0,920$ (równoczesne zniszczenie na obu brzegach, krążek o kształcie silnie hiperbolicznym).

Na podstawie analizy rys. 5, 8, 10, 11 oraz rys. 12, na którym przedstawiono zależność czasów inicjacji T_I od prędkości obrotowej tarcz o stałej grubości ($\kappa = 0$), niesprężonej ($Q = 0$) i sprężonej optymalnie (Q_{OPT}), można sformułować następujące wnioski:

1. W przypadku krążków o stałej grubości wstępnie sprężonych największe wydłużenie czasu inicjacji zniszczenia T_I występuje w zakresie małych i umiarkowanych prędkości wirowania tarczy ($\omega = 0 - 240 \text{ s}^{-1}$), a względny zysk na



Rys. 12. Porównanie czasów zniszczenia w funkcji prędkości wirowania ω oraz względny zysk: (○) tarcza niesprężona, (□) tarcza optymalnie sprężona, (Δ) względny zysk

czasie inicjacji kształtuje się pomiędzy $\frac{T_{i\max}(Q_{OPT})}{T_i(Q=0)} = 5-10$ (na rys. 12 trzecia krzywa). W miarę wzrostu prędkości wirowania tarczy czasy inicjacji szybko maleją, ale odpowiednie względne zyski rosną osiągając przy dużych obrotach ($\omega = 560 s^{-1}$) poziom $\frac{T_{i\max}(Q_{OPT})}{T_i(Q=0)} \cong 50$ (rys. 12).

2. Zastosowanie krążków o stałej grubości z wciskami o bardzo małej wielkości (p. 2 linia ciągła na rys. 11) jest niepożądane, gdyż wykazują one krótsze czasy inicjacji w stosunku do krążków bez obręczy sprężającej (na rys. 11 linia przerywana). Fakt ten tłumaczyć można dominacją sił bezwładności obręczy nad efektem wstępnego sprężenia obwodowego. Stosowanie wcisków o zbyt dużej wartości (powyżej wcisku optymalnego Q_{OPT}) jest niecelowe (skrócenie czasu inicjacji T_i na rys. 5 i 8).

3. W przypadku krążków o zmiennej grubości, przy założeniu klasy funkcji (2.6), wykazano iż lokalne optimum czasu inicjacji odpowiada rozwiązaniu tarczy o stałej grubości optymalnie sprężonej. Przy zastosowaniu sprężenia innego niż optymalne można uzyskać w drodze kształtowania pewne wydłużenie czasu T_i przy czym dla wcisków niższych niż optymalne otrzymujemy

profile hiperboliczne ($\kappa < 0$), natomiast w przypadku wcisków większych niż optymalne profile potęgowe ($\kappa > 0$).

4. Wydłużenie żywotności krążków o stałej grubości (z uwagi na kruche pęknięcie) przez zastosowanie optymalnie dobranego sprężenia wydaje się technicznie łatwiejszym niż stosowanie krążków o optymalnie zmiennej grubości (dobrej do zastosowanego wstępnego wcisku) (rys. 10b). Ponadto, należy zwrócić uwagę, iż wynikający stąd gradient zmiany grubości nie może być zbyt duży ze względu na odstępstwa od płaskiego stanu naprężenia. Na przykład, przyjmując ograniczenie $\max|\text{grad}H(X)| \leq 1$, otrzymujemy bardzo wąski przedział dopuszczalnych wykładników $-0,1 \leq \kappa \leq +0,1$, a maksymalne wydłużenie czasu inicjacji w stosunku do tarcz niekształtowanych nie przekracza 10%. Jeszcze lepsze efekty wydłużenia żywotności konstrukcji można by prawdopodobnie uzyskać na drodze jednoczesnego sprężenia i kształtowania wariacyjnego, które jednak wykracza poza klasę krążków opisanych prawem (2.6).

5. Wielkość wstępnego sprężenia może być dodatkowo ograniczona poprzez kryterium stateczności tarczy wskutek wyboczenia pełzającego bądź też przez kryterium wytrzymałościowe.

Powyższe wnioski mogą stanowić praktyczną wskazówkę podczas projektowania obwodowo sprężanych wirujących tarcz, jakie powszechnie stosuje się w szybkobieżnych silnikach.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. V. K. ARYA, N. S. BHATNAGAR, *Creep analysis of rotating orthotropic disks*, Nucl. Engng. Des., 55, 4, 1979.
2. V. K. ARYA, K. K. DEBNATH, N. S. BHATNAGAR, *Non steady creep analysis of orthotropic rotating disks*, Proc. Natn. Acad. Sci. India, A51, 2, 1981.
3. J. BIAŁKIEWICZ, *Dynamic creep rupture of a rotating disk of variable thickness*, Int. Mech. Sci., 28, 10, pp. 671-681, 1986 (printed in Great Britain).
4. J. T. BOYLE, J. SPENCE, *Stress analysis for creep*, London, Boston, Butterworths 1973.
5. A. E. JOHNSON, J. HENDERSON, B. KHAN, *Complex-stress creep, relaxation and fracture of metallic alloys*, Department of Scientific and Industrial Research of National Engineering Laboratory, Edinburg 1962.
6. Л. М. КАЧАНОВ, *Основы механики разрушения*, Издат. Наука, Москва 1974.
7. H. KOPECKI, J. WALCZAK, *The energy dissipation barrier as a criterion of creep failure of rotating disks*, Arch. Bud. Masz., 4, 1976.
8. Y. MATSUO, H. SATO, *A probabilistic treatise of rupture of brittle rotating disks*, Bull. J. S. M. E., 22, 172, 1979.
9. F. K. G. ODQVIST, *Mathematical theory of creep and creep rupture*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, 1966.
10. R. K. PENNY, D. L. MARRIOTT, *Design for creep*, McGraw-Hill, Maidenhead-Bakshire 1971.
11. E. L. ROBINSON, *Effect of temperature variation on the long time rupture of steel*, Trans. ASME, 74, 5, pp. 777-780, 1952.

12. S. TIMOSZENKO, J. N. GOODIER, *Theory of elasticity*, McGraw-Hill Book Comp. Inc., pp. 77-78, 1951.
13. S. TSUDA, E. SHIRATORI, K. IKEGAMI, *Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs*, A45, 398, 1979.
14. В. П. СДОБЫРЕВ, *Критерий длительной прочности для некоторых жаропрочных сплавов при сложном напряженном состоянии*, Известия АН СССР, Мех. и машиностр., 6, 1959.
15. J. WALCZAK, J. SIENIAWSKI, K. VATNE, *On the analysis of creep stability and rupture*, *Comp. Struct.*, 17, 5-6, pp. 783-792, 1983.
16. H. A. ZIEBARTH, *Calculation of turbine rotors in secondary creep range*, *Comp. Struct.*, 17, 5-6, pp. 809-818, 1983.

РЕЗЮМЕ

**ПОДБОР ОПТИМАЛЬНОГО ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ
И ФОРМИРОВАНИЕ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКАХ УЧИТЫВАЯ ЛОМКОЕ
РАЗРУШЕНИЕ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ**

В работе исследовано влияние величины внешнего предварительного напряжения и формирования места разрушения во вращающихся вязкоупругих дисках в условиях ползучести. В особых случаях оптимально-напряженных дисков постоянной толщины или дисков оптимальной переменной толщины, при любом напряжении, первое ломкое разрушение возникает одновременно на внутреннем и внешнем краях. Предложенный численный алгоритм позволяет значительно увеличить время до разрушения диска. Проблема сформулирована и решена методами теории пластичности (упрочнение зависящее от времени) и методами непрерывной механики разрушения.

SUMMARY

**OPTIMAL PRESTRESSING AND DESIGN OF ROTATING
DISKS AGAINST BRITTLE RUPTURE UNDER UNSTEADY
CREEP CONDITIONS**

The aim of the present paper is the investigation of the influence of the initial prestressing and the optimal shape on the localization of brittle creep rupture of rotating disks. For particular cases of either the disks of constant thickness with optimal initial prestressing or the optimal design of disks of variable thickness with arbitrary prestressing, the first macrocracks may appear at both disk edges simultaneously. The proposed numerical procedure may result in a significant increase of the disk life-time. The analysis is formulated on the basis of the plastic flow theory (the time dependent hardening hypothesis) and the continuum failure mechanics.

INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN
POLITECHNIKA KRAKOWSKA, KRAKÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 października 1988 r.