

WŁÓDZIMIERZ ZOWCZAK (WARSZAWA)

WŁÓDZIMIERZ ZOWCZAK (WARSZAWA)

O WYMIAROWANIU ELEMENTÓW JARZMOWYCH METODĄ CHARAKTERYSTYK (*)

WŁÓDZIMIERZ ZOWCZAK (WARSZAWA)

Praca poświęcona jest projektowaniu na nośność graniczną płaskich elementów konstrukcyjnych o kształcie zbliżonym do ogniwa łańcucha, współpracujących ze sworzniami o przekroju kołowym. Znalaziono rozwiązania dla szerokiego zakresu wartości parametru charakterystycznego. Wyniki przedstawiono w postaci dogodnej do zastosowania w praktyce konstrukcyjnej.

1. WSTĘP

Połączenia sworzniowe należą do najbardziej rozpowszechnionych elementów konstrukcji maszynowych. Projektowaniu wytrzymałościowemu części jarzmowych tych elementów poświęcony był w ostatnich latach szereg prac. Prace te obejmowały zarówno zagadnienia wymiarowania tych elementów, jak i doświadczalną weryfikację uzyskanych rozwiązań teoretycznych.

Dogodnym narzędziem do ich wymiarowania okazała się, wprowadzona przez W. Szczepińskiego, metoda nośności granicznej. Metoda ta, oparta na wyidealizowanym modelu materiału sztywno-idealnie plastycznego, pozwala na wyznaczenie bezpiecznych oszacowań poszukiwanych konturów elementów konstrukcyjnych drogą budowania odpowiednich statycznie dopuszczalnych pól naprężeń.

Szczegółowy opis tej metody wraz z jej uzasadnieniem teoretycznym zawarty jest w monografii [4]. Omówiono tam również obszernie zagadnienia projektowania elementów jarzmowych. Jak pokazują doświadczenia, stosowanie w tym celu metody nośności granicznej daje bardzo dobre wyniki; dotyczy to zarówno elementów pracujących pod obciążeniem statycznym i uderowym [2], jak i zmęczeniowym [1].

Podstawową metodą konstruowania statycznie dopuszczalnych pól naprężeń wymiarujących omawiane elementy, stosowaną w monografii [4], jest technika pól obszarami jednorodnych. Polega ona na budowaniu bardzo

(*) Praca została wykonana w ramach Centralnego Programu Badań Podstawowych 02.01 koordynowanego przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN.

nieraz złożonych pól z obszarów o jednorodnym stanie naprężenia oddzielonych od siebie liniami nieciągłości naprężeń.

Jak pokazano w pracy [5], dobre wyniki osiągnąć można przez rozszerzenie klasy pól stosowanych do projektowania elementów jarzmowych o proste przypadki pól o ciąglej niejednorodności stanu naprężenia. W pracy [6] natomiast, zaproponowano zastosowanie w tym celu ogólnej metody konstruowania płaskich pól naprężeń w stanie granicznym, jaką jest metoda charakterystyk.

Metoda ta jest podstawową metodą mechaniki plastycznego płynięcia i jej opis znaleźć można w monografiach poświęconych teorii plastyczności lub jej zastosowaniom, np. [3]. Metoda charakterystyk służy do rozwiązywania zagadnień brzegowych opartych na układzie równań równowagi, który po uwzględnieniu warunku plastyczności tworzy układ równań różniczkowych cząstkowych typu hiperbolicznego — posiada więc dwie rodziny charakterystyk rzeczywistych. Efektywny sposób rozwiązywania takiego zadania polega na całkowaniu numerycznym równań charakterystyk.

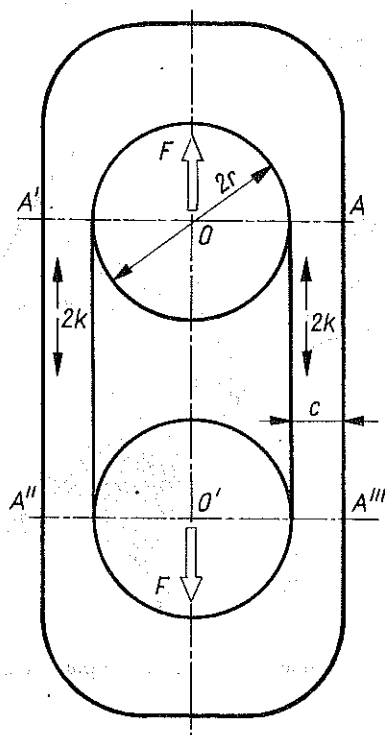
Rozszerzenie klasy pól naprężeń używanych do projektowania umożliwia na ogół uzyskanie lepszych (oszczędniejszych ze względu na wydatek materiału) oszacowań, a często też lepsze odwzorowanie założonych warunków brzegowych.

Zaletą metody charakterystyk, w porównaniu z innymi metodami obliczeniowymi stosowanymi w zagadnieniach wytrzymałościowych (np. metodą elementów skończonych), jest jej relatywna prostota umożliwiająca uzyskanie wyników nawet ręcznie lub wykreślnie, zaś przy użyciu komputera bardzo małym kosztem (czasu obliczeń). Wymaga to jednak posiadania odpowiedniego programu, a metoda wykreślna jest, mimo wszystko, dosyć pracochłonna.

Niniejsza praca stanowi kontynuację badań przedstawionych w pracach [5] i [6]. Jej celem jest znalezienie rozwiązań zadania na kształtowanie elementów jarzmowych dla szerokiego zakresu zmienności parametru charakterystycznego oraz przedstawienie wyników osiągniętych przy zastosowaniu metody charakterystyk w postaci dogodnej do bezpośredniego zastosowania w praktyce konstrukcyjnej.

2. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Przedmiotem analizy w niniejszej pracy jest płaski element w kształcie zbliżonym do ogniwa łańcucha, pokazany schematycznie na rys. 1. Założono, że siły obciążające element działają za pośrednictwem dwóch sworzni o promieniu r , a działanie tych sił powoduje powstanie naprężeń rozciągających równych maksymalnej wartości σ_{pl} w dwóch pasach bocznych o szerokości c pomiędzy osiami AA' i $A''A'''$. Szerokość c pasa bocznego określa więc



Rys. 1. Element podlegający projektowaniu

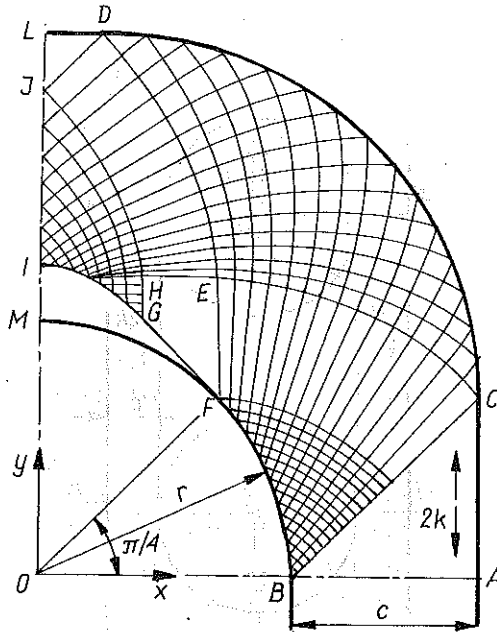
wielkość siły obciążającej element $F = 2c \cdot g \cdot \sigma_{pl}$ (g – grubość). Stosunek c/r stanowi parametr charakterystyczny zadania.

Rozwiązanie zadania polega na znalezieniu bezpiecznego konturu górnej części elementu – powyżej osi AA' (i symetrycznej doń części dolnej) tak, aby nośność tej części nie była niższa niż nośność pasów rozciąganych.

Założono, że materiał, z którego wykonano element jest sztywno-idealnie plastyczny i podlega warunkowi plastyczności Treski. Granica plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu równa jest więc podwójonej granicy plastyczności przy czystym ścinaniu $\sigma_{pl} = 2k$.

Przyjęto, że naprężenia w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku są równe 0, element znajduje się więc w płaskim stanie naprężenia. Uzyskane rozwiązania będą jednak ważne dla elementów o dowolnej grubości, jak również dla elementów znajdujących się w płaskim stanie odkształcenia.

W celu uniezależnienia otrzymanych wyników od własności materiałów i sposobu smarowania założono, że na powierzchniach styku pomiędzy sworzniem a jarzmem, na ogół nie występuje tarcie. Jest to jednak założenie na korzyść pewności; przyjęcie tarcia na powierzchni styku pozwala na oszczędniejsze zaprojektowanie jarzma.



Rys. 2. Rozwiązanie bezpośrednie metodą charakterystyk

3. ROZWIĄZANIE BEZPOŚREDNIE

Rozwiązanie wyżej sformułowanego zadania metodą charakterystyk dla szczególnego stosunku wymiarowego $c/r = 0,667$ podano w pracy [6]. Analogiczne rozwiązania skonstruować można też dla innych stosunków wymiarowych.

Budowę pola naprężeń rozpoczyna się od brzegu AB (rys. 2) obciążonego, zgodnie z założeniem, równomiernie rozłożonymi naprężeniami rozciągającymi $2k$. Ten sam stan naprężenia — jednorodne rozciąganie — panuje w całym trójkącie ABC . Bok AC tego trójkąta tworzy brzeg swobodny.

Siatkę charakterystyk w obszarze $BCEF$ konstruuje się rozwiązując mieszane zagadnienie brzegowe oparte na znanym stanie naprężenia wzdłuż charakterystyki BC i na założeniu, że wzdłuż brzegu BF (powierzchni styku sworznia z jarzmem) nie występuje tarcie.

Następnie buduje się pole naprężeń w obszarze CDE . Wymaga to rozwiązania tzw. odwrotnego zadania Cauchy'ego opartego na znanym stanie naprężenia wzdłuż charakterystyki CE oraz na warunku, że brzeg CD musi być brzegiem swobodnym. Przebieg krzywej CD nie jest z góry znany i wyznacza się go równocześnie z konstrukcją pola naprężeń. Stanowi to zasadniczą część rozwiązania zadania na kształtowanie jarzma.

Punkt F określający zasięg rozwiązywania zadania mieszane zostało tak

wybrany, aby kąt BOF wynosił $\pi/4$. Wówczas wartość kąta φ wynosi w tym punkcie $\varphi_F = 3\pi/2$, zaś wartość tego kąta w punkcie D równa jest $\varphi_D = \pi$. Oznacza to, że styczna do brzegu swobodnego w tym punkcie ma kierunek poziomy. Przyjęto, że styczna ta określa kontur elementu aż do osi symetrii.

W obszarze LDJ panuje jednorodny stan jednoosiowego rozciągania naprężeniami $2k$. Pole naprężeń w obszarze $FDJG$ znajdujemy jako rozwiązanie zadania charakterystycznego opartego na charakterystykach DJ i DEF . Pole naprężeń w obszarze GIJ natomiast, stanowi rozwiązanie zadania mieszanego opartego na obliczonym uprzednio rozkładzie naprężeń wzdłuż charakterystyki GJ i warunku, że prosta IJ jest osią symetrii (zachodzi więc na niej $\varphi = \pi$).

Ostatnim etapem budowy omawianego pola naprężeń jest wyznaczenie naprężeń w obszarze $FGIM$. Naprężenia te nie spełniają w ogólnym przypadku warunku plastyczności $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$; do ich obliczenia nie można więc stosować metody charakterystyk. Zamiast tego przyjęto szczególną postać pola w tym obszarze, zapewniającą automatyczne spełnienie warunków brzegowych (tzn. niewystępowanie naprężeń stycznych) wzdłuż osi symetrii IM oraz wzdłuż krawędzi otworu FM . Przyjęto mianowicie, że kierunki główne pokrywają się tu z kierunkami biegunowego układu współrzędnych (ϑ, ϱ) ze środkiem w punkcie O . Założono ponadto, że krzywą FI , będącą linią nieciągłości naprężeń wyznacza się w polu $FDJG$ jako trajektorię naprężenia głównego σ_1 . W punktach obszaru $FGIM$ przylegających do krzywej FI panuje więc stan dwuosiowego równomiernego ściskania $\sigma_\varrho = \sigma_\vartheta = \sigma_2$. Naprężenia obwodowe σ_ϑ nie zmieniają się ze zmianą kąta ϑ . Natomiast naprężenia promieniowe σ_ϱ zależą zarówno od ϑ jak i od ϱ i mogą być bez trudu obliczone z równania równowagi.

Opisane pole naprężeń jest statycznie dopuszczalne dla wartości parametru charakterystycznego z przedziału $0,460 \leq c/r \leq 0,733$ (rys. 2 przedstawia rozwiązanie dla $c/r = 0,733$). Dla wartości $c/r > 0,733$ naciski w punkcie M na styku sworznia z jarzmem przekraczają $2k$ — pole przestaje więc być statycznie dopuszczalne. Dla $c/r < 0,460$ krzywa nieciągłości rozpatrywana jako funkcja $\varrho(\vartheta)$ w układzie biegunowym $O\vartheta\varrho$ nie rośnie monotonicznie ze wzrostem ϑ ,

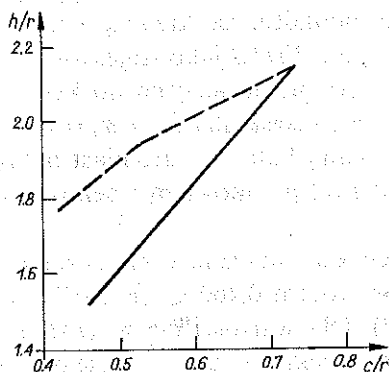
Tablica 1

c/r	x_D/r	y_D/r	R/r
0,460	0,350	1,519	1,655
0,500	0,331	1,610	1,728
0,550	0,307	1,723	1,821
0,600	0,284	1,838	1,917
0,650	0,260	1,951	2,016
0,700	0,236	2,065	2,116
0,733	0,221	2,141	2,184

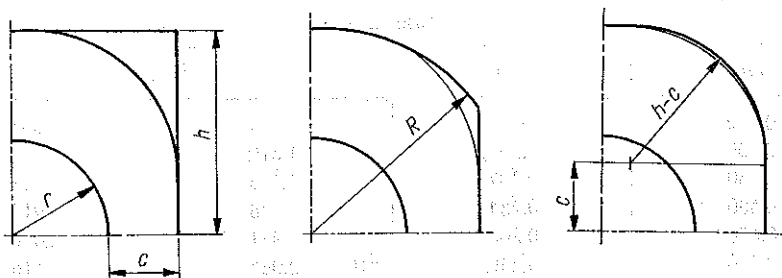
a w pewnym momencie zaczyna maleć. Uniemożliwia to konstrukcję opisanego wyżej pola w obszarze *FGIM*.

Wymienione granice przedziału dopuszczalności opisanego rozwiązania wynikają jednak z własności przyjętego w obszarze *FGIM* pola naprężeń i możliwe jest, że konstrukcja pól w tym obszarze inną metodą pozwoli na pewne rozszerzenie tych granic.

Otrzymany w wyniku opisaney procedury kontur elementu jest krzywoliniowy. W praktyce, ze względu na łatwość wymiarowania i wykonania, wygodniej jest posługiwać się kształtem prostszym złożonym z odcinków prostych i łuków okręgow. W celu ułatwienia konstruowania takich przybliżonych kształtów podano w tablicy 1 współrzędne punktu *D* oraz promień *R* okręgu opisanego na konturach skonstruowanych dla różnych wartości parametru *c/r*. Zależność wysokości $h = y_D$ jarzma ponad osią sworznia od wartości parametru charakterystycznego podana jest ponadto na rys. 3. Linią przerywaną zaznaczono oszacowania *h* uzyskane za pomocą pól naprężeń o skokowej niejednorodności. Jak widać, omawiane rozwiązanie jest znacznie oszczędniejsze. Na rys. 4 podano różne sposoby aproksymacji teoretycznego rozwiązania.



Rys. 3. Zależność między wysokością jarzma ponad osią sworznia i parametrem reprezentującym wielkość obciążenia, dla rozwiązania metodą charakterystyk (linia ciągła) oraz metodą pól skokowo niejednorodnych (linia przerywana)



Rys. 4. Sposoby aproksymacji rozwiązania bezpośredniego

4. ROZWIĄZANIA METODĄ ODWROTNĄ

W omówionym wyżej przykładzie poszukiwany kontur elementu otrzymuje się bezpośrednio w wyniku procesu budowy pola naprężeń. Możliwa jednak i celowa bywa odwrotna metoda postępowania — założenie z góry kształtu elementu, a następnie budowa statycznie dopuszczalnego pola naprężeń dla oceny jego nośności. Ten sposób postępowania przyjęto dla mniejszych wartości współczynnika c/r , dla których bezpośrednia konstrukcja pola naprężeń metodą charakterystyk napotyka trudności.

Na rys. 5 przedstawiony jest przykład takiego rozwiązania. Założono, że pole składa się z dwóch symetrycznych części, z których każda ma oś symetrii pod kątem $\pi/4$ do poziomemu. Zewnętrzny kontur elementu proponuje się w postaci dwóch odcinków prostych AC i A^1C^1 oraz łączącego je łuku koła CC^1 stycznego do obydwu prostych.

Ze względu na symetrię rozważony zostanie tylko wycinek pola o kącie wierzchołkowym $\pi/4$. Zakładając, że materiał w otoczeniu brzegu swobodnego jest w stanie plastycznym, otrzymujemy natychmiast, że w trójkącie ABC panuje jednoosiowe rozciąganie naprężeniami $2k$, w obszarze zaś $CDEF$ osiowosymetryczny stan naprężenia opisany wzorami Lamé'go

$$\sigma_1 = \sigma_\varrho = 2k \ln \frac{\varrho}{r},$$

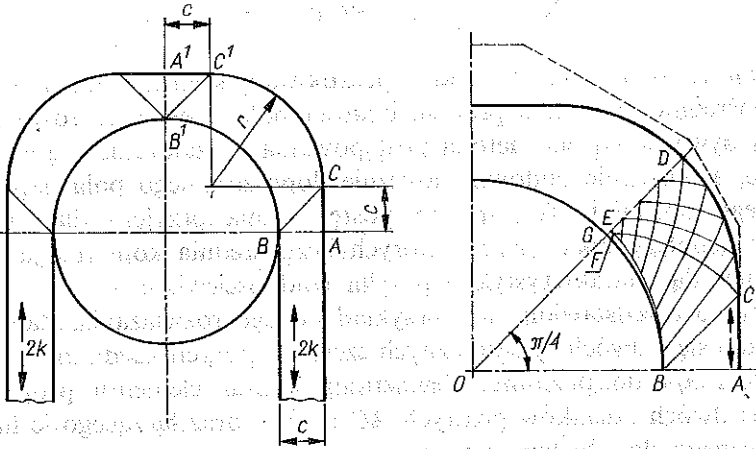
$$\sigma_2 = \sigma_\theta = 2k \left(\ln \frac{\varrho}{r} + 1 \right),$$

gdzie ϱ oznacza promień bieżący względem środka s .

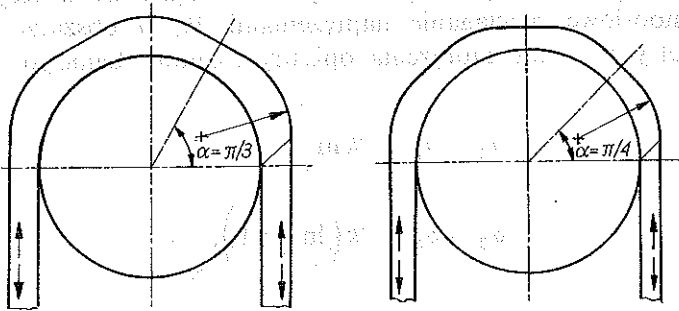
Pole naprężeń w obszarze BCF wyznacza się przez rozwiązanie charakterystycznego zadania brzegowego opartego na charakterystykach BC i CF . Następnie konstruuje się pole naprężeń w obszarze $BFEG$. Budowa tego pola jest taka sama jak opisanego wyżej pola $FGIM$. Linia nieciągłości BFE jest trajektorią naprężenia σ_2 w obszarze $BCDEF$, a kierunki główne w obszarze pola $BFEG$ pokrywają się z liniami biegunowego układu współrzędnych ze środkiem w punkcie O .

Przedstawione rozwiązanie jest możliwe do skontruowania dla $c/r \leq 0,396$. Dla wartości parametru c/r bliskich górnej granicy przedziału krzywa BFE jako obraz funkcji $\varrho(\vartheta)$ przestaje być monotoniczna w układzie współrzędnych $O\vartheta\varrho$; jednak odchylenia od monotoniczności są bardzo małe i mogą być pominięte. Dla małych wartości c/r krzywa BFE pokrywa się praktycznie z otworem.

Na rys. 5 zaznaczono też, linią przerywaną, analogiczne rozwiązanie otrzymane metodą pól obszarami jednorodnych. Rozwiązanie to, pochodzące z monografii [4] jest, jak widać, mniej ekonomiczne pod względem zużycia



Rys. 5. Konstrukcja metodą odwrotną rozwiązania złożonego z dwóch jednakowych członów



Rys. 6. Rozwiązania odwrotne złożone odpowiednio z trzech oraz z czterech jednakowych członów

materiału od zaproponowanego w niniejszej pracy. Rozszerzenie klasy pól naprężeń użytych przy projektowaniu elementu pozwoliło więc na uzyskanie znacznie oszczędniejszego wyniku.

Opisane pole naprężeń składa się z dwóch identycznych członów obroconych o kąt $\pi/2$. Możliwe jest jednak również zbudowanie analogicznych pól złożonych z trzech, czterech i większej liczby członów (rys. 6). Pole złożone z trzech elementów obroconych o kąt $\pi/3$ daje się skonstruować dla $c/r \leq 0,262$, a pole z czterech członów dla $c/r \leq 0,196$. Pola te, w swoich zakresach dopuszczalności dają nieco lepsze oszacowania kształtu niż pole złożone z dwóch członów.

5. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawione w p. 3 wyniki umożliwiają znalezienie w prosty sposób właściwego kształtu i wymiarów jarzma dla wartości parametru obciążenia zawierającego się w granicach $0,460 \leq c/r \leq 0,733$, natomiast sposób podany w p. 4 pozwala projektować elementy dla $c/r \leq 0,396$. W pozostałych zakresach c/r stosować należy rozwiązania o skokowej niejednorodności opisane szczegółowo w monografii [4].

Wprowadzenie bardziej złożonych pól naprężeń punktowo-symetrycznych w obszarach przylegających do powierzchni styku jarzma ze sworzniem może w przyszłości pozwolić na rozszerzenie zakresu statycznej dopuszczalności omówionych wyżej pól naprężeń.

Należy też podkreślić, że uwzględnienie tarcia na powierzchni styku umożliwia w ogólnym przypadku uzyskanie znacznie oszczędniejszych oszacowań kształtu jarzma (por. [6]).

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. L. DIETRICH, *Wymiarowanie połączeń sworzniowych metodą nośności granicznej w świetle badań zmęczeniowych*, Arch. Bud. Masz. **25**, 3, 513–524, 1978.
2. L. DIETRICH, J. MIASKOWSKI, *Doświadczalne badania nośności granicznej połączeń sworzniowych*, Arch. Bud. Masz., **18**, 4, 555–574, 1971.
3. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej*, PWN, Warszawa 1967.
4. W. SZCZEPIŃSKI, J. SZLAGOWSKI, *Projektowanie konstrukcji metodą granicznych pól naprężeń*, PWN, Warszawa 1985.
5. W. ZOWCZAK, *Projektowanie i nośność graniczna elementów połączeń sworzniowych*, Rozpr. Inż., **29**, 2, 267–278, 1981.
6. W. ZOWCZAK, *Projektowanie elementów konstrukcyjnych przy pomocy ciągłych pól statycznie dopuszczalnych*, Mech. Teor. Stos., **19**, 4, 563–573, 1981.

РЕЗЮМЕ

О ОПРЕДЕЛЕНИИ РАЗМЕРОВ КУЛИСТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МЕТОДОМ
ХАРАКТЕРИСТИК

Работа посвящена проектированию предельной несущей способности плоских конструктивных элементов с формой, сближенной к звену цепи, взаимодействующих с пальцами с круговым сечением. Найденны решения для широкого интервала значений характеристического параметра. Результаты представлены в виде пригодном для применения в конструкционной практике.

SUMMARY

DESIGN OF YOKE ELEMENTS BY THE METHODS OF CHARACTERISTICS

The paper deals with the limit analysis design of plane structural elements resembling chain links attached to bolts of circular cross-section. Solutions are found for a broad range of characteristic parameter values. The results are presented in a form suitable for direct engineering application.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 lutego 1989 r.