

PLASKIE DRGANIA SWOBODNE NIEPODPARTYCH PIERŚCIENI KOŁOWYCH CZEŚĆ I. CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH

BOGDAN OLSZOWSKI (KRAKÓW)

W pracy przeprowadzono analizę porównawczą widm częstości drgań własnych czternastu typów modeli pierścieni kołowych. Wyniki otrzymane przy użyciu różnych modeli uproszczonych zostały porównane z rezultatami uzyskanymi na podstawie modelu najściślejszego, uwzględniającego odkształcalność osiową pierścienia, bezwładność obrotową jego przekrojów poprzecznych oraz wpływ ścinania.

1. WSTĘP

Powszechność i różnorodność zastosowań elementów konstrukcyjnych w postaci pierścieni lub segmentów kołowych stwarza potrzebę dokładnego poznania ich własności dynamicznych. Dotyczy to nie tylko wielu dziedzin dziś już klasycznych (np. budowa maszyn i urządzeń wirnikowych, mostów łukowych, tuneli, obudów górniczych), ale co ważniejsze, również nowoczesnych, a nawet przyszłościowych rozwiązań konstrukcyjnych o dużym stopniu odpowiedzialności, związanych z szeroko pojętą techniką energetyczną, komunikacyjną i kosmiczną (np. budowa silników i turbin wielkiej mocy, raket, pojazdów kosmicznych, stacji orbitalnych).

Dynamiczne własności pierścieni kołowych były badane od bardzo dawna, a wykazy literatury z tej dziedziny można znaleźć w wielu pracach, np. [2-7]. Modele matematyczne pierścieni drgających były stopniowo uściślane i przechodziły podobną ewolucję, jak modele prętów prostych [1]. Najwcześniejsze badania dotyczyły modeli analizowanych w ramach teorii prętów Bernoulliego-Eulera o osi nierozciągliwej. Uwzględnienie wpływu odkształcalności osiowej, a następnie ścinania i bezwładności obrotowej przekroju poprzecznego, doprowadziło do zbudowania modelu w ramach teorii prętów Timoshenki o osi odkształcalnej [3].

Jak wynika z przeglądu dostępnej literatury przedmiotu, analiza własności dynamicznych pierścieni kołowych stanowi dziś temat nadal aktualny i wyma-

gający dalszych opracowań. Temat ten może być przy tym rozwijany w wielu aspektach dotyczących między innymi: 1) pierścieni swobodnych i nieswobodnych (podpartych), 2) pierścieni wirujących i niewirujących, 3) drgań w płaszczyźnie i z płaszczyzny pierścienia lub segmentu, 4) układów płaskich lub przestrzennych złożonych z segmentów kołowych, 5) drgań swobodnych i wymuszonych, 6) uwzględnienia wpływu tłumienia i podłoża sprężystego, 7) zastosowania metody elementów skończonych, 8) szeroko pojętego kształtowania optymalnego, 9) stateczności.

Celem niniejszej pracy jest analiza częstości własnych, niepodpartych (przestrzennie swobodnych) pierścieni kołowych drgających w swej płaszczyźnie, prowadzona na podstawie różnych modeli obliczeniowych. Jakościowe zróżnicowanie własności tych modeli uzyskuje się przez pomijanie lub uwzględnianie efektów związanych z występowaniem w ich opisie ogólnym czterech wielkości fizycznych EI , EA , kGA , J charakteryzujących odpowiednio sztywności zginania, ściskania i ścinania oraz bezwładność obrotową przekrojów poprzecznych pierścienia. Propozycję pewnej klasyfikacji modeli przedstawiono w tabelicy 1, z której wynika, że teoretycznie można analizować aż

Tabelica 1

Typ:	1	2	3	4	5	6	7	
EI	*	∞	∞	*	*	∞	*	$1/EI = c_1$
EA	∞	*	∞	*	∞	*	*	$1/EA = c_2$
kGA	∞	∞	*	∞	*	*	*	$1/kGA = c_3$
$J = 0$ (wariant A), $J \neq 0$ (wariant B) * oznacza wartość skończoną								

czternaście ich typo-wariantów o różnym zresztą znaczeniu praktycznym. Według tej propozycji, stosowane w dynamice prętów prostych modele Bernoulliego–Eulera, Rayleigha, Shear beam i Timoshenki [1] mogą być sklasyfikowane odpowiednio jako modele typów 1A, 1B, 5A i 5B.

W analizie przedstawionej w niniejszej pracy przyjęto za punkt wyjścia opis najdokładniejszego z modeli pierścieniowych (typ 7B) zamieszczony w [3] i wykorzystany tam do analizy układów ciągłych złożonych z segmentów pierścieni kołowych. Autorowi nie są znane żadne prace, w których model ten byłby wykorzystany w analizie dynamicznej pierścieni kołowych zamkniętych i przestrzennie swobodnych. Brak jest również zupełnie prac dotyczących analizy porównawczej wyników otrzymywanych dla takich pierścieni na podstawie modeli uproszczonych różnych typów. Fakty te skłoniły autora do podjęcia próby syntetycznego ujęcia zagadnień własnych dla wszystkich modeli pierścieniowych zestawionych w tabelicy 1 oraz dokonania oceny dokładności

wyników przybliżonych, uzyskiwanych na podstawie modeli uproszczonych. Takie kompleksowe ujęcie zagadnienia wymagało dokonania wyboru odpowiedniej taktyki postępowania, koniecznej ze względu na występowanie osobliwości pojawiających się przy przechodzeniu od modelu ogólnego do któregośkolwiek z modeli uproszczonych. Istotą tych osobliwości jest nieograniczony wzrost wartości niektórych częstości własnych modelu w przypadku, gdy wartości jego parametrów fizycznych zmierzają do wartości granicznych.

2. RÓWNANIE RUCHU MODELU 7B

Za podstawę dalszych rozważań przyjmiemy opis modelu pierścienia kołowego zamieszczony w [3]. Istotę tego opisu stanowi układ sześciu równań różniczkowych cząstkowych

$$\begin{aligned}
 \frac{Q}{kGA} &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R} - \varphi, \\
 \frac{N}{EA} &= \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R}, \\
 \frac{M}{EI} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \\
 (2.1) \quad \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{N}{R} - m\bar{A} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q_u &= 0, \\
 \frac{\partial N}{\partial s} - \frac{Q}{R} - m\bar{A} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q_w &= 0, \\
 \frac{\partial M}{\partial s} - Q + mJ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - q_\varphi &= 0
 \end{aligned}$$

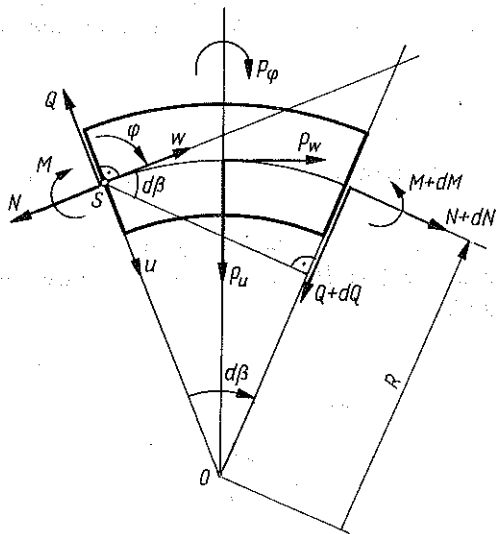
o sześciu niewiadomych funkcjach tworzących wektor

$$(2.2) \quad \mathbf{x}(\beta, t) = [u(\beta, t), w(\beta, t), \varphi(\beta, t), Q(\beta, t), N(\beta, t), M(\beta, t)]^T,$$

którego kolejnymi współrzędnymi są trzy przemieszczenia (środka ciężkości) przekroju poprzecznego i trzy odpowiadające im siły przekrojowe pokazane na rys. 1. Wszystkie wielkości niewiadome są funkcjami dwu zmiennych niezależnych: kąta środkowego β i czasu t , przy czym $ds = R d\beta$, gdzie R jest promieniem krzywizny teoretycznej osi pierścienia, s zaś współrzędną łukową jej punktu bieżącego.

Równania (2.1) zostały wyprowadzone w ramach teorii pierwszego rzędu. Pierwsze z tych równań otrzymuje się przedstawiając całkowity kąt ψ obrotu

stycznej do osi pierścienia na dwa różne sposoby: raz jako sumę $\psi = \varphi + \gamma$ kąta obrotu φ normalnej do przekroju poprzecznego (pochodzącego od zginania) i kąta γ odkształcenia postaciowego wywołanego ścinaniem, drugi raz zaś jako sumę $\psi = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R}$, której składniki reprezentują wpływy przemieszczeń u i w na



Rys. 1

wartość ψ . Z porównania obu wyrażeń na ψ i po uwzględnieniu, że $Q = kGA \cdot \gamma$, wynika związek (2.1)₁. Przyjęcie, że odkształcenie ε_0 osi pierścienia i zmiana jej krzywizny κ wyrażają się wzorami

$$\varepsilon_0 = \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R}, \quad \kappa = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$$

proceedzi do związków (2.1)₂ i (2.1)₃. Pozostałe równania (2.1) uzyskuje się zapisując trzy warunki równowagi sił uwidoczonych na rys. 1 i uwzględniając, że

$$p_u = q_u - m\bar{A} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad p_w = q_w - m\bar{A} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad p_\varphi = q_\varphi - mJ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

przy czym m jest gęstością masy materiału pierścienia, $m\bar{A}$ — masą jego przekroju poprzecznego, a mJ — masowym momentem bezwładności tego przekroju.

Komplet równań (2.1) po uwzględnieniu związku $ds = R d\beta$ możemy napisać w postaci macierzowej

$$(2.3) \quad \mathbf{x}'(\beta, t) = \bar{\mathbf{L}}\mathbf{x}(\beta, t) + \mathbf{f}(\beta, t),$$

posługując się określeniem (2.2) i wprowadzając nowe oznaczenia

$$(2.4) \quad \bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & R & Rc_3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & Rc_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Rc_1 \\ aD^2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & aD^2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -bD^2 & R & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$c_1 = \frac{1}{EI}, \quad c_2 = \frac{1}{EA}, \quad c_3 = \frac{1}{kGA},$$

$$a = m\bar{A}R, \quad b = mJR, \quad (') = \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad D = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\mathbf{f}(\beta, t) = [0, 0, 0, -Rq_u(\beta, t), -Rq_w(\beta, t), Rq_\varphi(\beta, t)]^T.$$

3. RÓWNIANIA CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH

Analizę częstości drgań własnych wszystkich modeli występujących w tabelicy 1 przeprowadzimy na podstawie równania (2.3). Po podstawieniach

$$\mathbf{x}(\beta, t) = \mathbf{X}(\beta) \sin \omega t, \quad \mathbf{f}(\beta, t) = 0$$

przybiera ono postać równania różniczkowego zwyczajnego względem niewiadomej funkcji amplitudowej

$$(3.1) \quad \mathbf{X}'(\beta) = \mathbf{L}(\omega) \mathbf{X}(\beta),$$

przy czym $\mathbf{L}(\omega)$ jest macierzą powstałą z $\bar{\mathbf{L}}$ po formalnej zamianie operatora D^2 na $-\omega^2$.

Całkę ogólną równania jednorodnego (3.1) można utworzyć na podstawie funkcji

$$(3.2) \quad \mathbf{X}(\beta) = \mathbf{a} \cdot e^{\lambda \beta}$$

spełniających warunek okresowości rozwiązań

$$(3.3) \quad \mathbf{X}(\beta + 2\pi) = \mathbf{X}(\beta)$$

wynikający z faktu, że rozwiązania te dotyczą pierścieni przestrzennie swobodnych, a więc niepodpartych.

Po uwzględnieniu (3.2) stwierdzamy, że warunek (3.3) jest spełniony tylko wtedy, gdy

$$(3.4) \quad \lambda = \pm iN, \quad N = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Jak wynika z (3.2) i (3.4), ustalonej liczbie N odpowiada baza rozwiązań rzeczywistych równania (3.1) o postaci $(\cos N\beta, \sin N\beta)$. Rozwiązania te tworzą więc N pełnych fal na obwodzie pierścienia; w związku z tym istnieje możliwość interpretacji N jako liczby falowej jego form drgań własnych, odbywających się z odpowiednimi częstościami własnymi.

Aby wyznaczyć formy drgań własnych, wyrażenie (3.2) podstawiamy do równania (3.1) i stąd w celu wyznaczenia pary własnej (λ, \mathbf{a}) otrzymujemy równanie algebraiczne

$$(3.5) \quad [\mathbf{L}(\omega) - \lambda \mathbf{I}] \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

o współczynnikach zespolonych. Po wprowadzeniu zapisu $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + i\mathbf{a}''$ oraz uwzględnieniu (2.4) i (3.4), równanie (3.5) można sprowadzić do równoważnego układu dwu równań rzeczywistych

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{a}' + N\mathbf{a}'' &= \mathbf{0} \\ N\mathbf{a}' - \mathbf{L}\mathbf{a}'' &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Istnieją teraz dwie możliwości: 1) wyznaczenie \mathbf{a}' na podstawie równania

$$(3.7) \quad (\mathbf{L}^2 + N^2 \mathbf{I}) \mathbf{a}' = \mathbf{0}$$

i obliczenie \mathbf{a}'' na podstawie związku

$$(3.8) \quad \mathbf{a}'' = -\frac{1}{N} \mathbf{L}\mathbf{a}',$$

albo 2) wyznaczenie \mathbf{a}'' z równania $(\mathbf{L}^2 + N^2 \mathbf{I}) \mathbf{a}'' = \mathbf{0}$ i obliczenie \mathbf{a}' ze związku $\mathbf{a}' = \frac{1}{N} \mathbf{L}\mathbf{a}''$.

W przypadku gdy $N = 0$, układ równań (3.6) ulega rozprzężeniu i każdą z niewiadomych \mathbf{a}' , \mathbf{a}'' można obliczyć na podstawie tego samego równania

$$(3.9) \quad \mathbf{L}\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Struktura macierzy \mathbf{L} sprawia, że układ (3.9) rozpada się na trzy niezależne podukłady równań

$$(3.10) \quad \begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & Rc_2 \\ -a\omega^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ N \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \\ & \begin{bmatrix} -1 & R & Rc_3 \\ -a\omega^2 & 0 & 1 \\ 0 & b\omega^2 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ Q \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \\ & c_1 M = 0. \end{aligned}$$

Częstości drgań własnych modelu 7B, odpowiadające liczbie falowej $N = 0$ i określone wzorami

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \omega_{01} &= \sqrt{\frac{1}{Rc_2a}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{EA}{m\bar{A}}} \\ \omega_{02} &= \sqrt{\frac{R^2a+b}{Rc_3ab}} = \sqrt{\frac{1+r}{r}} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{kGA}{m\bar{A}}}, \quad r = \frac{J}{\bar{A}R^2}, \end{aligned}$$

są niezerowymi pierwiastkami równań powstałych przez przyrównanie do zera wyznaczników macierzy (3.10)₁, (3.10)₂

$$\begin{aligned} \det_1 &= Rc_2a\omega^2 - 1, \\ \det_2 &= \omega^2 [Ra(R - c_3b\omega^2) + b]. \end{aligned}$$

Wyznaczniki \det_1 i \det_2 nie zerują się, gdy odpowiednio $c_2 = 0$ i $c_3 = 0$. W tych przypadkach istnieją tylko rozwiązania trywialne co oznacza, że ω_{01} , ω_{02} są częstościami drgań własnych tylko tych modeli, dla których odpowiednio $c_2 \neq 0$, $c_3 \neq 0$, przy czym $\omega_{02} < \infty$ tylko w wariancie B ($J \neq 0$). Zestawienie częstości własnych odpowiadających liczbie falowej $N = 0$ podano dla wszystkich modeli w tablicy 2.

Tablica 2

Typ:	1	2	3	4	5	6	7
(2)	—	ω_{01}	—	ω_{01}	—	ω_{01}	ω_{01}
(3)	—	—	ω_{02}	—	ω_{02}	ω_{02}	ω_{02}

W przypadku gdy $N > 0$, formy drgań własnych wyznaczamy na podstawie równania (3.7). Dzięki korzystnej strukturze macierzy L^2 równanie to rozpada się na dwa niezależne podukłady równań

$$(3.13) \quad \begin{bmatrix} N^2 - 1 - Rc_3a\omega^2 & -R(c_2 + c_3) & -R^2c_1 \\ -2a\omega^2 & N^2 - 1 - Rc_2a\omega^2 & 0 \\ -Ra\omega^2 & -R & N^2 - Rc_1b\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ N \\ M \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\begin{bmatrix} N^2 - 1 - Rc_2a\omega^2 & R & R(c_2 + c_3) \\ 0 & N^2 - Rc_1b\omega^2 & -R^2c_1 \\ 2a\omega^2 & -Ra\omega^2 & N^2 - 1 - Rc_3a\omega^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ Q \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Wyznaczniki obydwu macierzy (3.13)₁, (3.13)₂ są identyczne, dzięki czemu otrzymuje się, jako warunek nietrywialności rozwiązań obu układów równań

(3.13), tylko jedno równanie częstości (obowiązujące dla $N > 0$)

$$(3.14) \quad H_3 \omega^6 - H_2 \omega^4 + H_1 \omega^2 - H_0 = 0,$$

którego współczynniki są określone wzorami

$$(3.15) \quad \begin{aligned} H_3 &= c_1 c_2 c_3 a_0^2 b_0, & a_0 &= m\bar{A}R^2, & b_0 &= mJR^2, \\ H_2 &= [(R^2 c_1 + N^2 c_3) c_2 a_0 + (N^2 + 1) c_1 (c_2 + c_3) b_0] a_0, \\ H_1 &= (N^2 + 1) [R^2 c_1 + N^2 (c_2 + c_3)] a_0 + (N^2 - 1)^2 c_1 b_0, \\ H_0 &= N^2 (N^2 - 1)^2. \end{aligned}$$

Równanie (3.14) wynika również bezpośrednio z (3.5) w postaci warunku $\det(\mathbf{L} - \lambda \mathbf{I}) = 0$.

Dla poszczególnych modeli uproszczonych wzory (3.15) przybierają prostszą postać i zostały zestawione w tablicy 3 bez ich zróżnicowania dla wariantów A i B. Jak wynika z tego zestawienia, warianty te nie pojawiają się wcale (brak członu zawierającego parametr b_0) w modelach typów 2, 3 i 6,

Tablica 3

Typ	Własności	Współczynniki wielomianu (3.14)	A/B
1	$c_2 = 0$ $c_3 = 0$	$H_2 = 0$ $H_1 = c_1 [(N^2 + 1) R^2 a_0 + (N^2 - 1)^2 b_0]$	1/1
2	$c_1 = 0$ $c_3 = 0$	$H_2 = 0$ $H_1 = N^2 (N^2 + 1) c_2 a_0$	1
3	$c_1 = 0$ $c_2 = 0$	$H_2 = 0$ $H_1 = N^2 (N^2 + 1) c_3 a_0$	1
4	$c_3 = 0$	$H_2 = c_1 c_2 [R^2 a_0 + (N^2 + 1) b_0] a_0$ $H_1 = (N^2 + 1) (R^2 c_1 + N^2 c_2) a_0 + (N^2 - 1)^2 c_1 b_0$	2/2
5	$c_2 = 0$	$H_2 = (N^2 + 1) c_1 c_3 a_0 b_0$ $H_1 = (N^2 + 1) (R^2 c_1 + N^2 c_3) a_0 + (N^2 - 1)^2 c_1 b_0$	1/2
6	$c_1 = 0$	$H_2 = N^2 c_2 c_3 a_0$ $H_1 = N^2 (N^2 + 1) (c_2 + c_3) a_0$	2
7		$H_3 = c_1 c_2 c_3 a_0^2 b_0$ $H_2 = [(R^2 c_1 + N^2 c_3) c_2 a_0 + (N^2 + 1) c_1 (c_2 + c_3) b_0] a_0$ $H_1 = (N^2 + 1) [R^2 c_1 + N^2 (c_2 + c_3)] a_0 + (N^2 - 1)^2 c_1 b_0$	2/3
$H_3 = 0$ (dla modeli uproszczonych) $H_0 = N^2 (N^2 - 1)^2$ (dla wszystkich modeli) $c_1 = 1/EI$, $c_2 = 1/EA$, $c_3 = 1/kGA$, $a_0 = m\bar{A}R^2$, $b_0 = mJR^2$			

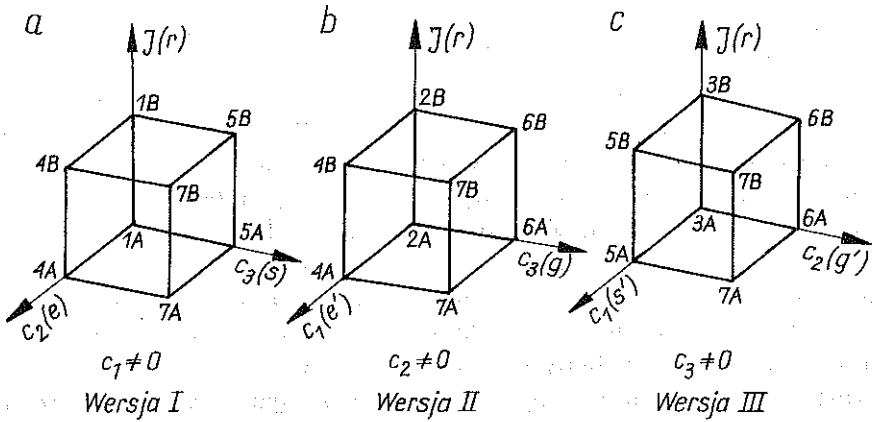
w których obroty przekrojów poprzecznych nie występują w związku z ich nieskończenie wielką sztywnością na zginanie ($c_1 = 0$).

Uwidocznione w tablicy 3 zróżnicowanie wzorów na współczynniki H_i powoduje uzależnienie stopnia wielomianu (3.14) od rodzaju rozważanego modelu. Stopnie odpowiednich wielomianów (względem zmiennej ω^2) zostały podane w ostatniej kolumnie tablicy 3 dla każdego typu/wariantu modelu. Z zestawienia tego wynika, że równania częstości dla wariantów A i B tego samego modelu mogą być zarówno tych samych (typy 1 i 4), jak też i różnych stopni (typy 5 i 7). Świadczy to o tym, że pomijaniu bezwładności obrotowej przekrojów poprzecznych (wariant A) nie zawsze towarzyszy „efekt znikania” dynamicznych stopni swobody modelu, którego można by w tym przypadku oczekiwać niesłusznie jako reguły. Nie mniej interesujący i bardzo charakterystyczny dla rozważanych modeli fakt ma miejsce w przypadku, gdy równanie częstości nie jest stopnia pierwszego względem ω^2 . Tej samej bowiem liczbie N odpowiadają wtedy dwie lub nawet trzy częstości własne. Oznacza to, że model może w tym przypadku wykonywać drgania o ustalonej liczbie N fal obwodowych, ale różniące się częstościami i formami własnymi. Omawiany fakt świadczy o pewnym podobieństwie własności dynamicznych pierścieni kołowych i powłok obrotowo symetrycznych.

Dla wszystkich modeli uproszczonych $H_3 = 0$, dzięki czemu ich częstości drgań własnych można obliczać na podstawie wzorów jawnych.

4. ANALIZA NUMERYCZNA CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH

Ze względu na dość złożoną zależność własności rozważanych modeli od czterech parametrów fizycznych, analiza numeryczna ich częstości drgań własnych w funkcji tych parametrów musiała być przeprowadzona na trzy różne sposoby, określane w dalszym ciągu jako wersje I, II i III. W kolejnych wersjach tylko jeden, odpowiedni z parametrów c_1, c_2, c_3 , przyjmowano jako wielkość odniesienia dla dwu wielkości pozostałych, mogących przyjmować w granicy wartości zerowe. W obliczeniach przyjęto jeszcze dodatkowe założenie polegające na tym, że każde przejście graniczne prowadzące od modelu 7B do dowolnego modelu uproszczonego odbywa się wzdłuż odcinka prostoliniowego łączącego odpowiednie punkty w trójwymiarowej przestrzeni parametrów swobodnych. Założenie takie pozwoliło analizować i interpretować zmiany częstości własnych jako funkcji tylko jednej zmiennej niezależnej, określającej położenie punktu bieżącego na linii prostej. Układy współrzędnych, którymi posługiwano się w wersjach I, II i III zostały pokazane na rys. 2a,b,c. Jak wynika z tych rysunków, analiza modeli typów 1, 2 i 3 jest możliwa tylko w odpowiedniej wersji I, II i III. Modele typów 4, 5 i 6 mogą być analizowane na dwa, a model typu 7 aż na trzy różne sposoby.



Rys. 2

Tablica 4

Wersja	Modele	Współczynniki równania (3.16)	Oznaczenia
I	1,4,5,7	$H_3 = ers$ $H_2 = (N^2 s + 1)e + (N^2 + 1)(e + s)r$ $H_1 = (N^2 + 1)[N^2(e + s) + 1] + (N^2 - 1)^2 r$	$e = \frac{EI}{R^2 EA}$ $\omega = p \sqrt{\frac{EI}{m \bar{A} R^4}}$ $s = \frac{EI}{R^2 kGA}$
II	2,4,6,7	$H_3 = e' gr$ $H_2 = N^2 g + (N^2 + 1)(g + 1)e' r + e'$ $H_1 = (N^2 + 1)[N^2(g + 1) + e'] + (N^2 - 1)^2 e' r$	$e' = \frac{R^2 EA}{EI}$ $\omega = p \sqrt{\frac{EA}{m \bar{A} R^2}}$ $g = \frac{EA}{kGA}$
III	3,5,6,7	$H_3 = g' rs'$ $H_2 = (N^2 + s')g' + (N^2 + 1)(g' + 1)rs'$ $H_1 = (N^2 + 1)[N^2(g' + 1) + s'] + (N^2 - 1)^2 rs'$	$g' = \frac{kGA}{EA}$ $\omega = p \sqrt{\frac{kGA}{m \bar{A} R^2}}$ $s' = \frac{R^2 kGA}{EI}$
$H_0 = N^2(N^2 - 1)^2$			$r = \frac{J}{\bar{A} R^2}$

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych, określonych wzorami zestawionymi w tablicy 4, równanie (3.15) przybiera postać wielomianu

$$(3.16) \quad H_3 p^6 - H_2 p^4 + H_1 p^2 - H_0 = 0$$

względem niewiadomej bezwymiarowej częstotliwości kołowej p , o współczynnikach H_i odpowiednio zróżnicowanych dla wersji I, II i III (tablica 4).

Tablica 5

Gałąź (1)

Typ	War.	N = 0	1	2	3	4	5
1	A			2,6833	7,5895	14,552	23,534
	B			2,6718	7,4755	14,111	22,374
3				10,825	20,412	29,354	37,978
4	A			2,6668	7,5295	14,422	23,305
	B			2,6557	7,4199	14,000	22,198
5	A			2,6045	7,1137	13,038	20,004
	B			2,5945	7,0306	12,777	19,461
6				9,7995	19,147	28,128	36,858
7	A			2,5894	7,0644	12,946	19,867
	B			2,5798	6,9841	12,693	19,342

Gałąź (2)

2		14,434		19,365	36,515	52,511	67,937
4	A	14,434	20,461	32,474	46,007	60,047	74,321
	B	14,434	20,364	32,226	45,605	59,481	73,572
6		14,434	23,385	35,653	48,660	62,107	75,835
7	A	14,434	20,461	32,462	45,962	59,937	74,105
	B	14,434	20,363	32,225	45,604	59,480	73,572

Gałąź (3)

3	A						
	B	116,74					
5	A						
	B	116,74	117,35	120,45	125,72	132,65	140,84
6	A						
	B	116,74					
7	A						
	B	116,74	117,91	121,32	126,67	133,59	141,75

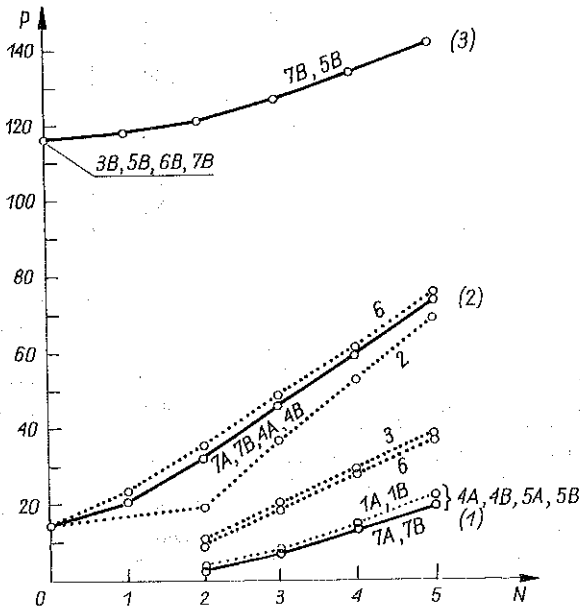
Na podstawie równań wyprowadzonych w p. 3 przeprowadzono analizę częstości drgań własnych żeliwnego pierścienia kołowego o prostokątnym przekroju poprzecznym: $b = 10$ cm, $h = 24$ cm i promieniu krzywizny osi teoretycznej: $R = 100$ cm. W analizie przyjęto, że $J = I$ oraz $G/E = 0,375$. Z tych założeń i ze wzorów zestawionych w tablicy 4 wynikają następujące wartości parametrów bezwymiarowych dla wersji I:

$$e = r = \frac{1}{12}(h/R)^2 = 0,0048,$$

$$s = 3,2e = 0,01536$$

oraz odpowiednie wartości pozostałych parametrów e' , s' , g , g' .

Wyniki obliczeń bezwymiarowych, kołowych częstości drgań własnych p dla wartości $N = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ i dla wszystkich typów modeli, zestawiono w tablicy 5 oraz przedstawiono na rys. 3. W celu umożliwienia porównań



Rys. 3

wartości częstości otrzymanych na podstawie różnych wersji obliczeniowych, wszystkie wyniki sprowadzono do zakresu wersji I. Oznacza to, że wartości p_{II} i p_{III} obliczone w wersjach II i III są reprezentowane w tablicy 5 i rys. 3 przez wartości zastępcze otrzymane na podstawie wzorów

$$p_{II}^{\text{zast}} = p_{II}/\sqrt{e}, \quad p_{III}^{\text{zast}} = p_{III}/\sqrt{s}.$$

Rzeczywiste wartości częstości kołowych określone są wzorami

$$\omega_I = p_I \sqrt{\frac{EI}{m\bar{A}R^4}}$$

$$\omega_{II} = p_{II} \sqrt{\frac{EA}{m\bar{A}R^2}} = p_{II}^{zast} \sqrt{\frac{EI}{m\bar{A}R^4}}$$

$$\omega_{III} = p_{III} \sqrt{\frac{kGA}{m\bar{A}R^2}} = p_{III}^{zast} \sqrt{\frac{EI}{m\bar{A}R^4}}$$

Przedstawione na rys. 3 zestawienie widm częstości drgań własnych wszystkich modeli w funkcji liczby falowej N pozwala ocenić ich podstawowe

Tablica 6

Gałąź (1)

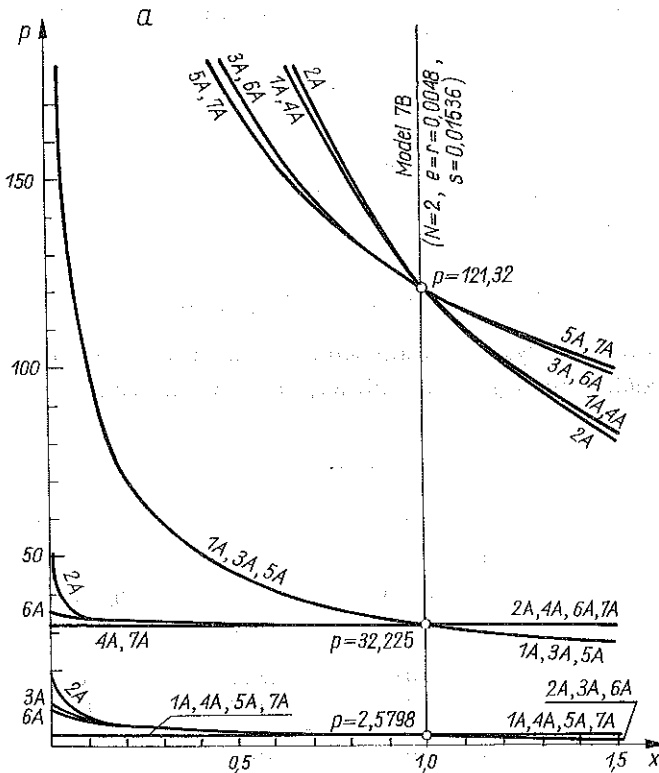
Typ	War.	N = 1	2	3	4	5
1	A		0,040	0,087	0,146	0,217
	B		0,036	0,070	0,112	0,157
4	A		0,034	0,078	0,136	0,205
	B		0,029	0,062	0,103	0,148
5	A		0,010	0,019	0,027	0,034
	B		0,006	0,007	0,007	0,006
7	A		0,004	0,012	0,020	0,027
	B		0,000	0,000	0,000	0,000

Gałąź (2)

2			-0,400	-0,199	-0,118	-0,076
4	A	0,005	0,008	0,009	0,010	0,010
	B	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6		0,148	0,106	0,067	0,044	0,031
7	A	0,005	0,007	0,008	0,008	0,007
	B	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Gałąź (3)

5	A					
	B	-0,005	-0,007	-0,007	-0,007	-0,006
7	A					
	B	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

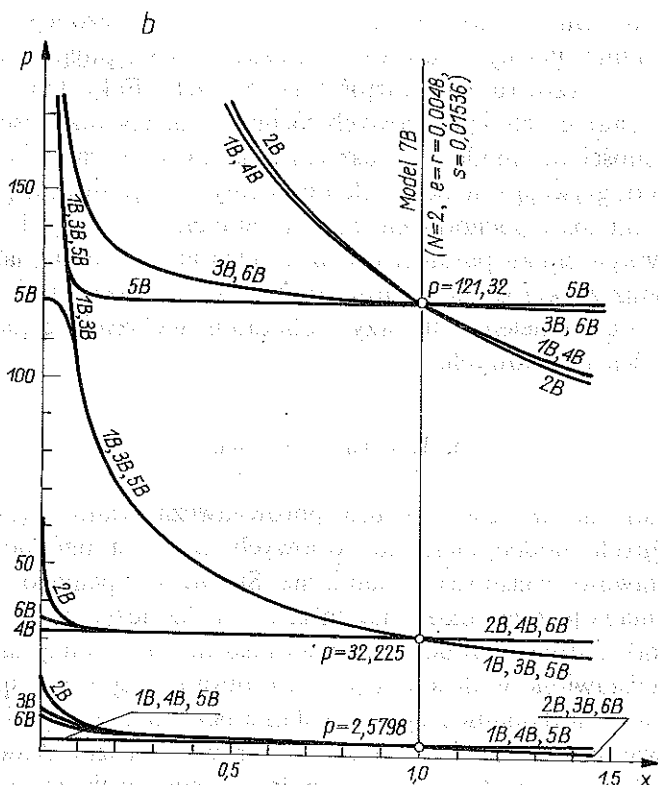


Rys. 4a

własności dynamiczne oraz możliwości aproksymacji widma modelu 7B za pomocą widm modeli uproszczonych. Zwraca przy tym uwagę fakt, że aproksymacja ta odbywa się w poszczególnych przypadkach zarówno z nadmiarem, jak też i z niedomiarem, mimo że wszystkie modele uproszczone są przeszywnione w porównaniu z modelem 7B. Fakt ten świadczy o złożoności badanych modeli w aspekcie ich własności dynamicznych.

Z rysunku 3 wynika przede wszystkim, że pełne widmo modelu 7B składa się z trzech gałęzi (1), (2) i (3). Gałęzie te są skojarzone z takimi formami drgań własnych, które wykazują przewagę deformacji związanych odpowiednio ze zginaniem (1), odkształceniem osiowym (2) i ścinaniem (3). W pobliżu tych gałęzi grupuje się większość elementów widm modeli uproszczonych, przy czym wyjątki stanowią tu modele 2, 3 i 6 o wspólnej własności $c_1 = 0$ decydującej o ich znacznym przeszywnieniu.

W celu uzyskania lepszej informacji na temat dokładności omawianej aproksymacji, w tabelicy 6 zestawiono wartości błędów względnych, jakie są popełnianie przy obliczaniu częstości drgań własnych na podstawie modeli uproszczonych. W zestawieniu tym pominięto model 3 oraz dolną gałąź modelu 6, które nie nadają się dla celów aproksymacji ze względu na



Rys. 4b

powstające w tych przypadkach zbyt duże błędy. Dane dotyczące modelu 2 podano w celu lepszego zobrazowania nietypowego zachowania się jedynej gałęzi jego widma, która wraz ze wzrostem liczby N coraz bardziej przybliża się do gałęzi (2) widma modelu 7B. Podobną własność wykazuje również, choć w mniejszym stopniu, gałąź (2) widma modelu 6. We wszystkich pozostałych przypadkach obserwuje się wzrost wartości błędów wraz ze wzrostem liczby N , a więc tendencję bardziej zgodną z intuicją.

W celu zilustrowania zależności częstości drgań własnych modeli od ich parametrów fizycznych, na rys. 4a,b pokazano wybrane wykresy wartości bezwymiarowych częstości kołowych p jako funkcji zmiennej x określającej położenie punktu bieżącego na prostej przechodzącej przez punkty: P (początkowy $x = 1$) i K (końcowy $x = 0$) na rys. 2a,b,c. W zależności od położenia punktu K na płaszczyznach odpowiedniego układu współrzędnych otrzymuje się różne wykresy $p(x)$. Obrazują one zmiany częstości drgań własnych towarzyszące przejściu, wzdłuż odcinka prostoliniowego łączącego punkty P i K , od modelu 7B (punkt P) do modelu uproszczonego o wartościach parametrów określonych przez współrzędne punktu K .

Jak wynika z wykresów $p(x)$ przedstawionych na rys. 4a,b, każdemu

przejściu od modelu 7B do dowolnego modelu uproszczonego towarzyszy znikanie z widma pewnych częstości własnych, następujące w rezultacie nieograniczonego wzrostu ich wartości liczbowych. Fakt ten ma związek z istnieniem zasadniczych, jakościowych różnic pomiędzy własnościami modelu 7B a własnościami modeli uproszczonych, które w ramach omawianej w pracy teorii odgrywają rolę pewnych szczególnych przypadków granicznych.

Z analizy wartości pochodnych $p'(x)$ w punkcie $x = 1$ wynika oczywisty wniosek, że wpływ zmian parametrów fizycznych na częstości własne modelu 7B wzrasta wraz ze wzrostem wartości tych częstości. Uzasadnia to potrzebę posługiwania się modelem 7B przy obliczaniu wyższych częstości drgań własnych pierścieni kołowych.

5. UWAGI KOŃCOWE

Przeprowadzona w pracy analiza porównawcza widm częstości drgań własnych różnych modeli pierścieni kołowych, pozwala ogólnie ocenić ich istotne, podstawowe własności dynamiczne. Stworzenie pełnego obrazu tych własności wymaga jeszcze dokonania dalszych analiz dotyczących form drgań własnych, a także drgań swobodnych i wymuszonych. Analizy takie zostaną podjęte i przedstawione w dalszych pracach autora, przy czym sposób opisu badanego problemu dynamicznego pozostanie bez zmiany. Jego istotę będzie nadal stanowić układ sześciu cząstkowych równań różniczkowych ruchu, przyjmujący w przypadku harmonicznym drgań ustalonych, zwyczajną postać normalną. Wykorzystanie tej właśnie postaci w połączeniu z zapisem macierzowym pozwala na operowanie jako niewiadomą całym wektorem stanu przekroju poprzecznego. Ten sposób postępowania okazuje się szczególnie wygodny zarówno przy formułowaniu algorytmów obliczeniowych, jak też i przy interpretacji otrzymanych wyników.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. L. FRYBA, *Vibration of solids and structures under moving loads*, Academia, Prague 1972.
2. S. C. HUANG, W. SOEDEL, *Effects of Coriolis acceleration on the free and forced in-plane vibrations of rotating rings on elastic foundation*, J. Sound and Vibr., **115**, 2, 253–274, 1987.
3. M. S. ISSA, T. M. WANG, B. T. HSIAO, *Extensional vibrations of continuous circular curved beams with rotary inertia and shear deformation, I. Free vibration*, J. Sound and Vibr., **114**, 2, 297–308, 1987.
4. R. SOLECKI, J. SZYMKIEWICZ, *Układy prętowe i powierzchniowe*, Obliczenia dynamiczne, Arkady, Warszawa 1964.
5. T. M. WANG, M. S. ISSA, *Extensional vibrations of continuous circular curved beams with rotary inertia and shear deformation, II; Forced vibration*, J. Sound and Vibr., **114**, 2, 309–323, 1987.
6. *Прочность — устойчивость — колебания, I*, Машиностроение, Москва 1968.
7. *Вибрации в технике, 3, Колебания машин, конструкций и их элементов*, Машиностроение, Москва 1980.

РЕЗЮМЕ

ПЛОСКИЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БЕЗОПОРНЫХ КРУГОВЫХ КОЛЕЦ.
ЧАСТЬ I. ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

В статье произведен сравнительный спектральный анализ 14 типов моделей круговых колец. Результаты, полученные на основе упрощенных моделей, сравнены с результатами для наиболее точной модели, учитывающей осевую деформацию, инерцию ее поперечного сечения и деформацию сдвига.

SUMMARY

FREE IN-PLANE VIBRATIONS OF UNSUPPORTED CIRCULAR RINGS
PART I. NATURAL FREQUENCIES

The paper deals with comparative analysis of free vibration frequency spectra of 14 types of circular rings models. The results obtained by means of various simplified models are compared with those derived from the most accurate one in which axial deformation of the ring, rotary inertia of its cross-sections and shear effects were taken into account.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 stycznia 1989 r.
