

DYNAMICZNE SZTYWNOŚCI PODŁOŻA W ZAGADNIENIU DRGAŃ FUNDAMENTU BLOKOWEGO POD MASZYNY NIEUDAROWE(*)

JAN LANGER I PIOTR RUTA (WROCŁAW)

W pracy sformułowano uproszczony model półprzestrzeni sprężystej wynikający z pominięcia sprzężeń w klasycznych równaniach elastokinetyki. Stosując całkowite transformacje Fouriera oraz rozwinięcia w szeregi względem wielomianów Czebyszewa, przeanalizowano harmoniczne ruchy translacyjne i rotacyjne prostokątnego stempla spoczywającego na sformułowanym podłożu. Metodami numerycznymi obliczono zespolone sztywności reprezentujące podłoże inercyjne w zagadnieniu stacjonarnych drgań fundamentu blokowego pod maszyny dla różnych wartości parametrów układu. Podano interpretację tych sztywności i przeprowadzono porównanie niektórych rezultatów z wynikami z innych prac.

1. WSTĘP

Problem drgań fundamentów blokowych pod maszyny obrotowe i posuwisto-zwrotne, spoczywających na podłożu odkształcalnym, jest jednym z podstawowych zadań dynamiki budowli o istotnym znaczeniu dla praktyki inżynierskiej. Autorzy prac poświęconych tej tematyce rozwiązywali zagadnienie drgań fundamentu przyjmując rozmaite założenia dotyczące układu fundament-podłoże. Szczególnie interesujący jest dobór modelu podłoża, model ten bowiem stanowi o adekwatności rozwiązań teoretycznych do procesu rzeczywistego, a jednocześnie decyduje o stopniu trudności rozwiązania.

Najprostszym modelem podłoża odkształcalnego jest bezinercyjny model Winklera, wykorzystywany m.in. w pracach [1, 2, 3]. BARKAN [1] i KISIEL [2] analizowali drgania własne i wymuszone bloku traktowanego jako sztywna tarcza (zagadnienie płaskie). Pełne rozwiązanie zagadnienia przestrzennego jest przedstawione w pracy [3], gdzie również omówiono inne prace dotyczące drgań fundamentów blokowych spoczywających na podłożu Winklera. Podłoże Winklera jest także akceptowane w obowiązujących przepisach normowych [4], przy czym niedostatki modelu są kompensowane tym, że moduły sztywności podłoża są uzależnione od proporcji wymiarów stopy fundamentu

(*) Praca wykonana w ramach Centralnego Programu Badań Podstawowych nr 02.01/2.9/22

oraz od rodzaju ruchu fundamentu, niemniej pozostają niezależne od częstości drgań, a więc nie wyrażają wpływu inercji podłoża.

Oddzielną grupę stanowią prace na temat drgań fundamentów blokowych spoczywających na półprzestrzeni sprężystej, w których głównym problemem jest określenie reakcji podłoża, co z matematycznego punktu widzenia sprowadza się do rozwiązania dynamicznego zagadnienia teorii sprężystości z uwzględnieniem warunków kontaktu płaszczyzny ograniczającej półprzestrzeń z ruchomą podstawą fundamentu. Po wyznaczeniu funkcji reakcji podłoża można już bez trudu określić dynamiczne sztywności więzi podporowych fundamentu, a więc sprowadzić problem do klasycznego zagadnienia przestrzennych drgań bryły sztywnej o sześciu stopniach swobody, podobnie jak w [3].

Do omawianej grupy należy m.in. praca ARNOLDA, BYCROFTA, WARBURTONA [5] na temat drgań fundamentu o podstawie kołowej lub praca LUCO [6] uwzględniająca półprzestrzeń uwarstwioną. Zagadnienie płaskie analizowali KARASUDHI, KEER, LEE [7], OIEN [8], LUCO i WESTMAN [9], AWOJOBI [10], stosując metodę równań całkowych, a także BURIAK [11] i SEJMOW [12]. Drgania pionowe fundamentu o podstawie prostokątnej analizowali THOMSON i KOBORI [13], zakładając równomierny rozkład reakcji podłoża oraz jednopunktowy kontakt podłoża z fundamentem.

LYSMER i KUHLEMEYER [14], DASGUPTA i KAMESWARA [15] zastosowali metodę elementów skończonych do analizy dynamicznej podłoża o ograniczonych wymiarach, wprowadzając na brzegach specjalne tłumiki redukujące energię fal odbitych.

W ostatnim okresie pojawiły się prace, w których dynamiczne zagadnienie kontaktowe fundamentu blokowego na półprzestrzeni sprężystej rozwiązuje się metodą elementów brzegowych z równomiernym rozkładem reakcji podłoża w obszarze elementu. Metodę tę zastosowali m.in. KITAMURA i SUKURAI [16] oraz WONG i LUCO [17].

Podjęmowane są również próby budowania uproszczonych modeli inercyjnego podłoża odkształcalnego, które dostatecznie dobrze aproksymują zachowanie się półprzestrzeni sprężystej, a jednocześnie nie nastęrczają tak dużych trudności matematycznych, jakie towarzyszą analizie modelu ścisłego. Przykładem takiego podejścia są prace MURAWSKIEGO [18] i ŚWITKI [19], w których podano modele uproszczone mogące służyć do analizy pionowych drgań stępła na podłożu odkształcalnym.

W niniejszej pracy wykorzystamy również uproszczony model inercyjnej półprzestrzeni sprężystej, zaproponowany przez autorów w pracach [20, 21], którego opis wynika z równań klasycznej elastokinetyki po pominięciu sprzężeń. Model ten, będący uogólnieniem modelu Świtki (jedno z równań opisujących model jest zgodne z równaniami uzyskanymi inną drogą w [18, 19]), umożliwi przeprowadzenie pełnej analizy zagadnienia przestrzennego. Praktyczna przydatność omawianego modelu została sprawdzona w pracach [19, 20, 21].

2. UPROSZCZONY MODEL PÓLPRZESTRZENI SPRĘŻYTEJ

Założmy, że w ortokartezjańskiej przestrzeni $\mathbf{r} = \text{col}(x, y, z)$ jest poszukiwane pole przemieszczeń $\mathbf{q} = \text{col}(u, v, w)$ ośrodka o gęstości ρ , spełniające sprzężony układ liniowych cząstkowych równań różniczkowych

$$(2.1) \quad \mathcal{L}\mathbf{q} + \rho\mathbf{Q} = \mathbf{0},$$

gdzie $\mathbf{Q} = \text{col}(X, Y, Z)$ jest polem sił masowych niezależnych od przemieszczeń. Ponadto na pewnej powierzchni granicznej dane są warunki brzegowe typu Neumanna

$$(2.2) \quad \mathcal{B}\mathbf{q} + \mathbf{p} = \mathbf{0},$$

gdzie $\mathbf{p} = \text{col}(p_x, p_y, p_z)$ jest wektorem intensywności obciążeń na tej powierzchni. \mathcal{L} i \mathcal{B} są kwadratowymi macierzami operatorowymi.

Rozłóżmy macierze \mathcal{L} i \mathcal{B} odpowiednio na części diagonalne i pozadiagonalne:

$$(2.3) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_1,$$

a rozwiązanie \mathbf{q} przedstawmy w postaci szeregu

$$(2.4) \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \dots$$

zakładając, że szereg ten jest zbieżny.

Równania (2.1) i (2.2) przybiorą postać

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_0\mathbf{q}_0 + \mathcal{L}_0\mathbf{q}_1 + \dots + \mathcal{L}_1\mathbf{q}_0 + \mathcal{L}_1\mathbf{q}_1 + \dots + \rho\mathbf{Q} &= \mathbf{0}, \\ \mathcal{B}_0\mathbf{q}_0 + \mathcal{B}_0\mathbf{q}_1 + \dots + \mathcal{B}_1\mathbf{q}_0 + \mathcal{B}_1\mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{p} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Równania te będą spełnione, gdy spełniony będzie następujący rekurencyjny ciąg równań różniczkowych z odpowiadającymi im warunkami brzegowymi:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_0\mathbf{q}_0 + \rho\mathbf{Q} &= \mathbf{0}, & \mathcal{B}_0\mathbf{q}_0 + \mathbf{p} &= \mathbf{0}, \\ \mathcal{L}_0\mathbf{q}_1 + \mathcal{L}_1\mathbf{q}_0 &= \mathbf{0}, & \mathcal{B}_0\mathbf{q}_1 + \mathcal{B}_1\mathbf{q}_0 &= \mathbf{0}, \\ \mathcal{L}_0\mathbf{q}_2 + \mathcal{L}_1\mathbf{q}_1 &= \mathbf{0}, & \mathcal{B}_0\mathbf{q}_2 + \mathcal{B}_1\mathbf{q}_1 &= \mathbf{0}, \\ \dots & & \dots & \end{aligned}$$

W ten sposób zagadnienie opisane za pomocą sprzężonych macierzy operatorowych zostaje formalnie zastąpione rekurencyjnym ciągiem zagadnień (2.6), w których aktualny wektor niewiadomych jest skojarzony z operatorową macierzą diagonalną. Zadanie sprowadza się więc do równań separowanych względem niewiadomych funkcji przemieszczeń. W praktyce można zrealizować jedynie pierwszy krok iteracji określony relacjami (2.6)₁, dalsze etapy stają się bowiem zbyt trudne do opisu. W tym kontekście opisana procedura nie

może stanowić podstawy do zbudowania efektywnego algorytmu prowadzącego do rozwiązania ścisłego, określa ona jednak pozycję, jaką zajmuje przybliżony model ośrodka opisany relacjami (2.6)₁ w stosunku do modelu ścisłego.

Interpretacja równań modelu uproszczonego jest następująca: w wyniku działania obciążeń o określonym kierunku punkty należące do badanego ośrodka przemieszczają się wyłącznie w kierunku tych obciążeń. Sytuacja taka nie odpowiada modelowi ścisłemu, stąd już po pierwszym kroku iteracji w modelu tym pojawiłyby się resztkowe stany napięcia, które w dalszych krokach ulegałyby sukcesywnemu wygaszaniu. W modelu uproszczonym resztkowy stan napięcia zostaje pominięty.

Stan przemieszczeń izotropowego inercyjnego ośrodka liniowo-sprężystego jest opisany równaniami Lamégo, które po pominięciu sił masowych i oporów ruchu mają następującą postać:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + G \nabla^2 u - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ (\lambda + G) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + G \nabla^2 v - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ (\lambda + G) \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + G \nabla^2 w - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned}$$

Ponadto w zagadnieniu Neumanna obowiązują warunki brzegowe

$$(2.8) \quad \begin{aligned} -\lambda \vartheta l - G \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) - G \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right) + p_x &= 0, \\ -\lambda \vartheta m - G \left(\frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right) - G \left(\frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial y} n \right) + p_y &= 0, \\ -\lambda \vartheta n - G \left(\frac{\partial w}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right) - G \left(\frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right) + p_z &= 0, \end{aligned}$$

gdzie λ , G są stałymi Lamégo,

$$(2.9) \quad \vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

natomiast l , m , n są cosinusami kierunkowymi normalnej zewnętrznej do powierzchni granicznej, względem osi x , y , z . W dalszym ciągu będziemy rozważać półprzestrzeń $z \geq 0$, której powierzchnią graniczną jest płaszczyzna $z = 0$, a zatem $l = m = 0$, $n = -1$.

Przy tych założeniach operatory wynikające z rozkładu (2.3) mają następującą postać:

$$(2.10) \quad \mathcal{L}_0 = \begin{bmatrix} (\lambda + 2G) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}; & 0; & 0 \\ 0; & G \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\lambda + 2G) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}; & 0 \\ 0; & 0; & G \frac{\partial^2}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\lambda + 2G) \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{bmatrix},$$

$$(2.11) \quad \mathcal{L}_1 = (\lambda + G) \begin{bmatrix} 0; & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; & 0; & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}; & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}; & 0 \end{bmatrix},$$

$$(2.12) \quad \mathcal{B}_0 = \begin{bmatrix} G \frac{\partial}{\partial z}; & 0; & 0 \\ 0; & G \frac{\partial}{\partial z}; & 0 \\ 0; & 0; & (\lambda + 2G) \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix},$$

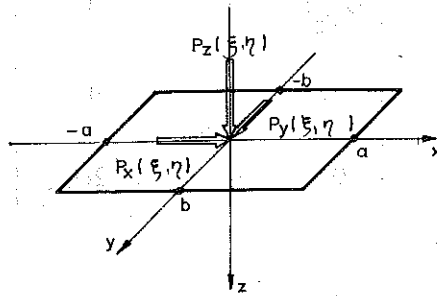
$$(2.13) \quad \mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 0; & 0; & G \frac{\partial}{\partial x} \\ 0; & 0; & G \frac{\partial}{\partial y} \\ \lambda \frac{\partial}{\partial x}; & \lambda \frac{\partial}{\partial y}; & 0 \end{bmatrix}.$$

Z wzorów (2.10) i (2.12) wynika, że równania różniczkowe dotyczące przemieszczeń u oraz v wraz z warunkami brzegowymi są analogiczne, wystarczy zatem rozpatrywać jedno z nich, wykorzystując w miarę potrzeby podstawienia $x \leftrightarrow y$, $u \leftrightarrow v$, $p_x \leftrightarrow p_y$. Jako wiodące, z tej pary równań oberzemy w dalszym ciągu równanie dotyczące składowej u . Ostatecznie przedmiotem analizy w zakresie modelu uproszczonego są dwa równania wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned}
 & \left[(\lambda + 2G) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u = 0, \\
 & G \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} + p_x = 0, \\
 & \left[G \frac{\partial^2}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\lambda + 2G) \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] w = 0, \\
 & (\lambda + 2G) \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} + p_z = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU I ROZWIĄZANIE OGÓLNE

W półprzestrzeni $z \geq 0$ rozważany jest izotropowy, jednorodny liniowo-sprężysty ośrodek o gęstości ρ i stałych Lamégo λ , G . Na powierzchni granicznej $z = 0$ (rys. 1) spoczywa stempel o wymiarach podstawy $2a \times 2b$.



Rys. 1

Podstawa stempla wykonuje ruchy harmoniczne z częstością kołową Ω , translacyjne w kierunku osi x , y , z oraz rotacyjne wokół osi x , y , z bez poślizgów. Z punktu widzenia analizy drgań fundamentu blokowego reprezentowanego przez stempel, współdziałająca półprzestrzeń może być zastąpiona układem sześciu więzi (trzech translacyjnych i trzech rotacyjnych) o sztywnościach zależnych od parametrów układu. Celem zadania jest wyznaczenie tych sztywności na podstawie analizy uproszczonego modelu półprzestrzeni. Zakłada się, że opory ruchu wynikające z tłumiących własności materiałowych ośrodka są pomijalnie małe.

W dalszych rozważaniach wprowadzimy wymiar porównawczy

$$(3.1) \quad c = \sqrt{ab}$$

oraz następujące parametry i zmienne bezwymiarowe:

względne wymiary podstawy stempla

$$(3.2) \quad \alpha = \frac{a}{c} = \sqrt{\frac{a}{b}},$$

$$\beta = \frac{b}{c} = \sqrt{\frac{b}{a}}, \quad \alpha\beta = 1,$$

zmienne bezwymiarowe

$$(3.3) \quad \xi = \frac{x}{a} = \frac{x}{\alpha c} = \frac{\beta x}{c},$$

$$\eta = \frac{y}{b} = \frac{y}{\beta c} = \frac{\alpha y}{c},$$

$$\zeta = \frac{z}{c},$$

względne przemieszczenia

$$(3.4) \quad U = \frac{u}{c}, \quad W = \frac{w}{c},$$

parametr materiałowy (miara efektu Poissona)

$$(3.5) \quad \psi^2 = \frac{\lambda + 2G}{G} = \frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu}, \quad \psi^2 \in (2, \infty),$$

parametr częstości drgań

$$(3.6) \quad \kappa = \Omega c \sqrt{\rho/G}.$$

Po wprowadzeniu przyjętej parametryzacji, równania (2.14) przybierają następującą postać (uwzględniono tu, że $\partial^2/\partial t^2 = -\Omega^2$):

$$(3.7) \quad \psi^2 \beta^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + \kappa^2 U = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} + \frac{p_x}{G} = 0,$$

$$\beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \psi^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} + \kappa^2 W = 0,$$

$$\psi^2 \frac{\partial W}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} + \frac{p_z}{G} = 0.$$

Wykonując na (3.7) podwójną transformację Fouriera typu

$$(3.8) \quad \bar{f}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) e^{i(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta})} d\xi d\eta,$$

otrzymamy dwa równania różniczkowe względem zmiennej ζ

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \zeta^2} - (\psi^2 \beta^2 \bar{\xi}^2 + \alpha^2 \bar{\eta}^2 - \kappa^2) \bar{U} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} + \frac{\bar{p}_x}{G} &= 0, \\ \psi^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \zeta^2} - (\beta^2 \bar{\xi}^2 + \alpha^2 \bar{\eta}^2 - \kappa^2) \bar{W} &= 0, \\ \psi^2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} + \frac{\bar{p}_z}{G} &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie tych równań z uwzględnieniem warunków brzegowych daje wynik

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \bar{U}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \zeta) &= \bar{U}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \exp(-\zeta \sqrt{\psi^2 \beta^2 \bar{\xi}^2 + \alpha^2 \bar{\eta}^2 - \kappa^2}), \\ \bar{W}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \zeta) &= \bar{W}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \exp\left(-\frac{\zeta}{\psi} \sqrt{\beta^2 \bar{\xi}^2 + \alpha^2 \bar{\eta}^2 - \kappa^2}\right), \end{aligned}$$

przy czym $\bar{U}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$, $\bar{W}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ są transformatami współrzędnych stanu przemieszczeń powierzchni granicznej $\zeta = 0$ i wynoszą

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \bar{U}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) &= \frac{\bar{p}_x}{G} (\psi^2 \beta^2 \bar{\xi}^2 + \alpha^2 \bar{\eta}^2 - \kappa^2)^{-1/2}, \\ \bar{W}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) &= \frac{\bar{p}_z}{G \psi} (\beta^2 \bar{\xi}^2 + \alpha^2 \bar{\eta}^2 - \kappa^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Stan przemieszczeń powierzchni granicznej można zatem ogólnie sformułować za pomocą wzorów

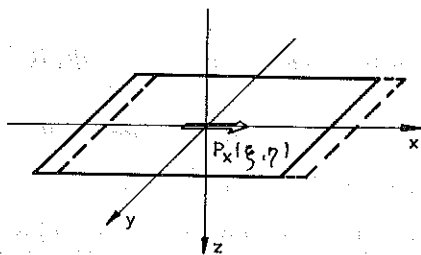
$$(3.12) \quad \begin{aligned} U(\xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) e^{-i(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta})} d\bar{\xi} d\bar{\eta}, \\ W(\xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{W}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) e^{-i(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta})} d\bar{\xi} d\bar{\eta}, \end{aligned}$$

z uwzględnieniem (3.11).

4. RUCH TRANSLACYJNY STEPLA W KIERUNKU OSI x

Zgodnie z przyjętym modelem translacji stempla w kierunku osi x towarzyszy w obszarze kontaktu stempla z półprzestrzenią obciążenie styczne p_x (rys. 2). Obciążenie to napiszemy w postaci szeregu podwójnego (por. np. [22])

$$(4.1) \quad p_x(\xi, \eta) = G \sum_{i,j} a_{ij} \frac{T_{2i}(\xi) T_{2j}(\eta)}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$



Rys. 2

Stała G reprezentuje czynnik wymiarowy, T_{2i} , T_{2j} są parzystymi wielomianami Czebyszewa, natomiast a_{ij} są nieznanymi współczynnikami bezwymiarowymi. W mianowniku formuły (4.1) wprowadzono funkcję, dzięki której w rozkładzie naprężeń kontaktowych jest *a priori* zagwarantowane pojawienie się osobliwości krawędziowych, podobnie jak w zagadnieniu statycznym. Funkcję przebiegu czasowego $e^{i\Omega t}$ w formule (4.1) i w dalszych rozważaniach pominięto, ponieważ dotyczy ona również składowych stanu przemieszczenia i w równaniach (3.7) ulega uproszczeniu.

Jeżeli reprezentacją rozważanego modelu podłoża, odpowiadającą translacji stempla w kierunku x , jest pozioma więź o sztywności K_x , ulegająca deformacji $u(0, 0) = u(\xi, \eta)$, to globalny warunek równowagi w obszarze kontaktu ma postać

$$(4.2) \quad K_x u(\xi, \eta) = K_x c U(\xi, \eta) = \iint p_x dx dy = c^2 \iint_{-1}^{+1} p_x d\xi d\eta = \\ = Gc^2 \sum_{i,j} a_{ij} \iint_{-1}^{+1} [(1-\xi^2)(1-\eta^2)]^{-1/2} T_{2i}(\xi) T_{2j}(\eta) T_0(\xi) T_0(\eta) d\xi d\eta = \pi^2 Gc^2 a_{00},$$

a zatem

$$(4.3) \quad K_x = \pi^2 \frac{a_{00}}{U(\xi, \eta)} Gc.$$

Ponieważ współczynniki szeregu (4.1) i przemieszczenia stempla nie są określone, można przyjąć, że

$$(4.4) \quad K_x = a_{00} Gc,$$

jeśli na przemieszczenia w obszarze kontaktu nałożymy warunek

$$(4.5) \quad U(\xi, \eta) = \pi^2.$$

Warunek ten można spełnić wykorzystując zasadę pracy wirtualnej wariacji obciążenia na rzeczywistych przemieszczeniach

$$(4.6) \quad \iint_{-1}^{+1} U(\xi, \eta) \delta p_x d\xi d\eta = \pi^2 \iint_{-1}^{+1} \delta p_x d\xi d\eta,$$

przy czym stosownie do (4.1) wariacje obciążenia można przyjąć w postaci

$$(4.7) \quad \delta p_x = [(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)]^{-1/2} T_{2m}(\xi) T_{2n}(\eta); \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Jednakże z uwagi na trudności matematyczne, jakie pojawiłyby się w dalszych obliczeniach przy odwracaniu transformat Fouriera, warunek (4.6) nieco osłabimy ograniczając obszar całkowania do głównych centralnych osi podstawy stempla, co prowadzi do relacji

$$(4.8) \quad \iint_{-1}^{+1} U(\xi, \eta) \delta p_x [\alpha \delta(\eta) + \beta \delta(\xi)] d\xi d\eta = \pi^2 \iint_{-1}^{+1} \delta p_x [\alpha \delta(\eta) + \beta \delta(\xi)] d\xi d\eta,$$

gdzie $\delta(\xi)$, $\delta(\eta)$ są funkcjami Diraca. Ograniczenie obszaru kontaktu do głównych osi podstawy stempla jest dopuszczalne m.in. dzięki temu, że we wzorze (4.1) zagwarantowano pojawienie się osobliwości rozkładu naprężeń, stworzono więc warunki dobrego przylegania podstawy stempla do podłoża nawet przy ograniczonych formalnych warunkach kontaktu.

Dalsze przekształcenie lewej strony warunku (4.8) z uwzględnieniem (4.7) i (3.12) jest następujące:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} & \iint_{-1}^{+1} U(\xi, \eta) \delta p_x [\alpha \delta(\eta) + \beta \delta(\xi)] d\xi d\eta \\ &= (-1)^n \alpha \int_{-1}^1 U(\xi, 0) \frac{T_{2m}(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi + (-1)^m \beta \int_{-1}^1 U(0, \eta) \frac{T_{2n}(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}} d\eta = \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi} \alpha \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \int_{-1}^1 e^{-i\bar{\xi}\bar{\xi}} \frac{T_{2m}(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi d\bar{\xi} d\bar{\eta} + \\ &+ \frac{(-1)^m}{2\pi} \beta \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \int_{-1}^1 e^{-i\bar{\eta}\bar{\eta}} \frac{T_{2n}(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}} d\eta d\bar{\xi} d\bar{\eta} = \\ &= \frac{(-1)^{n+m}}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) [\alpha J_{2m}(|\bar{\xi}|) + \beta J_{2n}(|\bar{\eta}|)] d\bar{\xi} d\bar{\eta}. \end{aligned}$$

Wykorzystano tu wzór całkowy [23: 7.355]

$$(4.10) \quad \int_{-1}^1 \frac{T_{2n}(x)}{\sqrt{1-x^2}} e^{ixy} dx = (-1)^n \pi J_{2n}(|y|),$$

gdzie J jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju.

Natomiast przekształcenie prawej strony warunku (4.8) daje wynik

$$(4.11) \quad \pi^2 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \delta p_x [\alpha \delta(\eta) + \beta \delta(\xi)] d\xi d\eta = (-1)^n \pi^2 \alpha \int_{-1}^1 \frac{T_{2m}(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi + \\ + (-1)^m \pi^2 \beta \int_{-1}^1 \frac{T_{2n}(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta = \pi^3 [(-1)^n \alpha \delta_{m0} + (-1)^m \beta \delta_{n0}],$$

gdzie δ_{ij} jest symbolem Kroneckera.

W dalszym ciągu obliczymy transformatę obciążenia (4.1)

$$(4.12) \quad \bar{p}_x(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \frac{\pi}{2} G \sum_{i,j} a_{ij} (-1)^{i+j} J_{2i}(|\bar{\xi}|) J_{2j}(|\bar{\eta}|)$$

oraz przemieszczenia (3.10)₁

$$(4.13) \quad \bar{U}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \frac{\pi}{2} \sum_{i,j} a_{ij} (-1)^{i+j} (\psi^2 \beta^2 \bar{\xi}^2 + \alpha^2 \bar{\eta}^2 - \kappa^2)^{-1/2} J_{2i}(|\bar{\xi}|) J_{2j}(|\bar{\eta}|)$$

i uwzględnimy ten wynik w (4.9).

W ten sposób warunek (4.8) ostatecznie sprowadzi się do układu równań algebraicznych

$$(4.14) \quad \sum_{i,j} A_{mnij} a_{ij} = A_{mn}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots,$$

przy czym

$$(4.15) \quad A_{mnij} = (-1)^{m+n+i+j} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{[\alpha J_{2m}(\bar{\xi}) + \beta J_{2n}(\bar{\eta})] J_{2i}(\bar{\xi}) J_{2j}(\bar{\eta})}{\sqrt{\psi^2 \beta^2 \bar{\xi}^2 + \alpha^2 \bar{\eta}^2 - \kappa^2}} d\bar{\xi} d\bar{\eta}, \\ A_{mn} = \pi^2 [(-1)^n \alpha \delta_{m0} + (-1)^m \beta \delta_{n0}].$$

Dzięki zależności [23: 6.552(1)]⁽¹⁾

$$(4.16) \quad \int_0^\infty \frac{J_\nu(bx)}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = I_{\nu/2} \left(\frac{1}{2} ab \right) K_{\nu/2} \left(\frac{1}{2} ab \right),$$

⁽¹⁾ W wersji źródłowej wzór (4.16) jest ważny dla $b > 0$ oraz $\text{Re } a > 0$, jednakże korzystając z [23: 6.552(4,6)] i z [24: 52.4, 52.5, 52.6] można wykazać, że wzór jest prawdziwy również w przypadku $\text{Re } a = 0$, jeśli $\text{Im } a \neq 0$. Dowód pomijamy.

wzór (4.15)₁ można przedstawić za pomocą całki pojedynczej

$$(4.17) \quad A_{mni} = (-1)^{m+n+i+j} \frac{\kappa}{\psi} \int_0^{\infty} \left[\alpha J_{2i} \left(\frac{\alpha \kappa}{\psi} t \right) J_{2m} \left(\frac{\alpha \kappa}{\psi} t \right) I_j \left(\frac{1}{2} \beta \kappa \sqrt{t^2 - 1} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot K_j \left(\frac{1}{2} \beta \kappa \sqrt{t^2 - 1} \right) + \beta J_{2j}(\beta \kappa t) J_{2n}(\beta \kappa t) I_i \left(\frac{\alpha \kappa}{2\psi} \sqrt{t^2 - 1} \right) K_i \left(\frac{\alpha \kappa}{2\psi} \sqrt{t^2 - 1} \right) \right] dt,$$

gdzie I jest funkcją Bessela argumentu urojonego, K zaś jest funkcją Macdonalda. W dwu składnikach całki wprowadzono odpowiednio zmiany zmiennych $\bar{\xi} = \frac{\alpha \kappa}{\psi} t$, $\bar{\eta} = \beta \kappa t$.

Obliczenie współczynników układu równań (4.14) oraz rozwiązanie tego układu można już wykonać metodami numerycznymi, a wykorzystanie wyniku a_{00} w relacji (4.4) określa ostatecznie poszukiwaną sztywność.

Obliczanie sztywności więzi translacyjnej K_y , nie wymaga oddzielnej analizy, wystarczy bowiem w poprzednich rozwiązaniach zamienić rolami wymiary a i b , to znaczy parametry α i β , co prowadzi do relacji

$$(4.18) \quad K_y(\alpha, \beta) = K_x(\beta, \alpha).$$

Dodatkowego komentarza wymaga przypadek $\kappa = 0$ (zagadnienie statyczne). Wyprowadzone w tym rozdziale zależności pozostają ważne do wzoru (4.15), zmiana zaś dotyczy przejścia do całki pojedynczej. Ostatecznie otrzymuje się

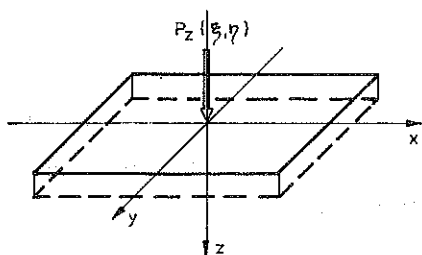
$$(4.19) \quad A_{mni} = (-1)^{m+n+i+j} \frac{1}{\psi} \int_0^{\infty} \left[\alpha J_{2i} \left(\frac{\alpha}{\psi} t \right) J_{2m} \left(\frac{\alpha}{\psi} t \right) I_j \left(\frac{1}{2} \beta t \right) K_j \left(\frac{1}{2} \beta t \right) + \right. \\ \left. + \beta J_{2j}(\beta t) J_{2n}(\beta t) I_i \left(\frac{\alpha}{2\psi} t \right) K_i \left(\frac{\alpha}{2\psi} t \right) \right] dt,$$

przy czym w dwu składnikach całki wprowadzono odpowiednio zmiany zmiennych $\bar{\xi} = \frac{\alpha}{\psi} t$, $\bar{\eta} = \beta t$.

5. RUCH TRANSLACYJNY STEPLA W KIERUNKU OSI Z

Translacji stempla w kierunku osi z towarzyszy w obszarze kontaktu podstawy stempla z półprzestrzenią obciążenie normalne p_z (rys. 3), które napiszemy w postaci szeregu

$$(5.1) \quad p_z(\xi, \eta) = G \sum_{i,j} a_{ij} \frac{T_{2i}(\xi) T_{2j}(\eta)}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$



Rys. 3

Jeśli reprezentacją rozważanego modelu podłoża, odpowiadającą translacji stępła w kierunku z , jest pionowa więź o sztywności K_z , ulegająca deformacji $w(0, 0) = w(\xi, \eta)$, to globalny warunek równowagi w obszarze kontaktu ma postać

$$(5.2) \quad K_z w(\xi, \eta) = K_z c W(\xi, \eta) = \iint p_z dx dy = c^2 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} p_z d\xi d\eta = \\ = Gc^2 \sum_{i,j} a_{ij} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [(1-\xi^2)(1-\eta^2)]^{-1/2} T_{2i}(\xi) T_{2j}(\eta) T_0(\xi) T_0(\eta) d\xi d\eta = \pi^2 Gc^2 a_{00},$$

a zatem ogólnie jest

$$(5.3) \quad K_z = \pi^2 \frac{a_{00}}{W(\xi, \eta)} Gc.$$

Można przyjąć, że

$$(5.4) \quad K_z = a_{00} Gc,$$

jeśli na przemieszczenia w obszarze kontaktu nałożymy warunek

$$(5.5) \quad W(\xi, \eta) = \pi^2.$$

Analogicznie do p. 4 warunek ten przekształcimy do postaci

$$(5.6) \quad \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} W(\xi, \eta) \delta p_z [\alpha \delta(\eta) + \beta \delta(\xi)] d\xi d\eta = \pi^2 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \delta p_z [\alpha \delta(\eta) + \beta \delta(\xi)] d\xi d\eta.$$

Lewa strona tego warunku przekształca się do postaci analogicznej do (4.9), prawa strona zaś daje wynik identyczny z (4.11). Transformata obciążenia (5.1) ma postać analogiczną do (4.12), natomiast transformata przemieszczeń (3.11)₂ przybiera postać

$$(5.7) \quad \bar{W}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \frac{\pi}{2\psi} \sum_{i,j} a_{ij} (-1)^{i+j} (\beta^2 \bar{\xi}^2 + \alpha^2 \bar{\eta}^2 - \kappa^2)^{-1/2} J_{2i}(|\bar{\xi}|) J_{2j}(|\bar{\eta}|).$$

Zadanie sprowadza się dalej do równań typu (4.14), przy czym wyraży wolne (4.15)₂ pozostają bez zmian, natomiast współczynniki równań wyrażają

się wzorem

$$(5.8) \quad A_{mij} = (-1)^{m+n+i+j} \frac{1}{\psi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{[\alpha J_{2m}(\xi) + \beta J_{2n}(\eta)] J_{2i}(\xi) J_{2j}(\eta)}{\sqrt{\beta^2 \xi^2 + \alpha^2 \eta^2 - x^2}} d\xi d\eta.$$

W wyniku przedstawionej w p. 4 procedury przejścia do całki pojedynczej otrzymujemy się ostatecznie

$$(5.9) \quad A_{mij} = (-1)^{m+n+i+j} \frac{x}{\psi} \int_0^{\infty} \frac{[\alpha J_{2i}(\alpha x t) J_{2m}(\alpha x t) I_j \left(\frac{1}{2} \beta x \sqrt{t^2 - 1} \right) + \beta J_{2j}(\beta x t) J_{2n}(\beta x t) I_i \left(\frac{1}{2} \alpha x \sqrt{t^2 - 1} \right)] K_i \left(\frac{1}{2} \alpha x \sqrt{t^2 - 1} \right)}{dt} dt.$$

W dwu składnikach całki wprowadzono odpowiednio zmiany zmiennych $\xi = \alpha x t$, $\eta = \beta x t$.

W przypadku $x = 0$ wzór (5.9) przekształca się do postaci

$$(5.10) \quad A_{mij} = (-1)^{m+n+i+j} \frac{1}{\psi} \int_0^{\infty} \left[\alpha J_{2i}(\alpha t) J_{2m}(\alpha t) I_j \left(\frac{1}{2} \beta t \right) K_i \left(\frac{1}{2} \beta t \right) + \beta J_{2j}(\beta t) J_{2n}(\beta t) I_i \left(\frac{1}{2} \alpha t \right) K_i \left(\frac{1}{2} \alpha t \right) \right] dt,$$

przy czym w składnikach całki zastosowano odpowiednio zmiany zmiennych $\xi = \alpha t$, $\eta = \beta t$.

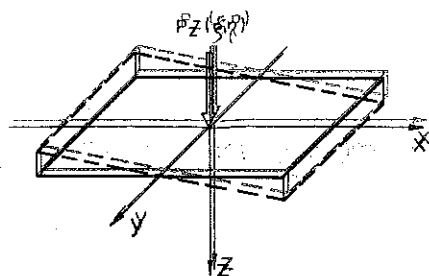
Po rozwiązaniu równań i obliczeniu współczynnika a_{00} , z relacji (5.4) otrzymamy poszukiwaną sztywność K_z .

6. RUCH ROTACYJNY SIEMPIA WOKÓŁ OSI y

Rotacji siempla wokół osi y towarzyszy w obszarze kontaktu podstawy siempla z półprzestrzenią obciążenie normalne p_z (rys. 4), które napiszemy w postaci szeregu

$$(6.1) \quad p_z(\xi, \eta) = G \sum_{i,j} a_{ij} \frac{U_{2i+1}(\xi) U_{2j}(\eta)}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

Jeśli reprezentacją rozważanego modelu podłoża, odpowiadającą rotacji siempla wokół osi y , jest rotacyjna więź o sztywności K_{rot} , doznająca obrotu o kąt $\frac{\partial w}{\partial x}|_{z=0} = \frac{\partial w}{\partial x}$, to globalny warunek równowagi w obszarze kontaktu ma postać



Rys. 4

$$\begin{aligned}
 (6.2) \quad K_{zz} \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial x} &= K_{zz} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial W}{\partial \xi} = \iint x p_z dx dy = c^3 \alpha \iint_{-1}^{+1} \xi p_z d\xi d\eta = \\
 &= Gc^3 \alpha \sum_{i,j} a_{ij} \iint_{-1}^{+1} [(1-\xi^2)(1-\eta^2)]^{-1/2} T_{2i+1}(\xi) T_{2j}(\eta) T_1(\xi) T_0(\eta) d\xi d\eta = \\
 &= \frac{\pi^2}{2} Gc^3 \alpha a_{00},
 \end{aligned}$$

a zatem ogólnie jest

$$(6.3) \quad K_{zz} = \frac{\pi^2}{2} Gc^3 \alpha^2 \frac{a_{00}}{\frac{\partial W}{\partial \xi}}$$

Można przyjąć, że

$$(6.4) \quad K_{zz} = Gc^3 a_{00},$$

jeśli na przemieszczenia w obszarze kontaktu nałożymy warunek

$$(6.5) \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{\pi^2}{2} \alpha^2$$

lub równoważny warunek przemieszczeniowy

$$(6.6) \quad W(\xi, \eta) = \frac{\pi^2}{2} \alpha^2 \xi.$$

Wykorzystując zasadę prac wirtualnych analogicznie do p. 4, otrzymamy warunek kontaktu

$$(6.7) \quad \iint_{-1}^{+1} W(\xi, \eta) \delta p_z [\alpha \delta(\eta) + \beta \delta(\xi)] d\xi d\eta = \frac{\pi^2}{2} \alpha^2 \iint_{-1}^{+1} \xi \delta p_z [\alpha \delta(\eta) + \beta \delta(\xi)] d\xi d\eta,$$

czyli

$$(6.8) \quad \delta p_z = [(1-\xi^2)(1-\eta^2)]^{-1/2} T_{2m+1}(\xi) T_{2n}(\eta); \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Przekształcenie lewej strony wzoru (6.7) z uwzględnieniem (6.8) i (3.12)₂ jest następujące:

$$\begin{aligned}
 (6.9) \quad & \iint_{-1}^{+1} W(\xi, \eta) \delta p_z [\alpha \delta(\eta) + \beta \delta(\xi)] d\xi d\eta = \\
 & = (-1)^n \alpha \int_{-1}^1 W(\xi, 0) \frac{T_{2m+1}(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi + T_{2m+1}(0) \beta \int_{-1}^1 W(0, \eta) \frac{T_{2n}(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta = \\
 & = \frac{(-1)^n}{2\pi} \alpha \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{W}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \int_{-1}^1 e^{-i\xi\bar{\xi}} \frac{T_{2m+1}(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi d\bar{\xi} d\bar{\eta} = \\
 & = -\frac{(-1)^{n+m}}{2} i \alpha \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{W}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) J_{2m+1}(|\bar{\xi}|) \operatorname{sgn} \bar{\xi} d\bar{\xi} d\bar{\eta}.
 \end{aligned}$$

Wykorzystano tu wzór całkowy [23: 7.335]

$$(6.10) \quad \int_{-1}^1 \frac{T_{2m+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} e^{ixy} dx = (-1)^m i \pi J_{2m+1}(|y|) \operatorname{sgn} y.$$

Natomiast przekształcenie prawej strony wzoru (6.7) daje wynik

$$\begin{aligned}
 (6.11) \quad & \frac{\pi^2}{2} \alpha^2 \iint_{-1}^{+1} \xi \delta p_z [\alpha \delta(\eta) + \beta \delta(\xi)] d\xi d\eta = \\
 & = \frac{\pi^2}{2} \alpha^3 (-1)^n \int_{-1}^1 \frac{T_{2m+1}(\xi) T_1(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \frac{\pi^3}{4} \alpha^3 (-1)^n \delta_{0m}.
 \end{aligned}$$

Po obliczeniu transformaty obciążenia (6.1)

$$(6.12) \quad \bar{p}_z(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \frac{i\pi}{2} G \sum_{i,j} a_{ij} (-1)^{i+j} J_{2i+1}(|\bar{\xi}|) J_{2j}(|\bar{\eta}|) \operatorname{sgn} \bar{\xi}$$

i przemieszczenia (3.10)₂

$$(6.13) \quad \bar{W}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \frac{i\pi}{2\psi} \sum_{i,j} a_{ij} (-1)^{i+j} (\beta^2 \bar{\xi}^2 + \alpha^2 \bar{\eta}^2 - \kappa^2)^{-1/2} J_{2i+1}(|\bar{\xi}|) J_{2j}(|\bar{\eta}|) \operatorname{sgn} \bar{\xi}$$

oraz po podstawieniu (6.13) do (6.9) otrzymamy układ równań algebraicznych typu (4.14), w których

$$\begin{aligned}
 (6.14) \quad & A_{mij} = (-1)^{m+n+i+j} \frac{1}{\psi} \iint_0^\infty \frac{J_{2m+1}(\bar{\xi}) J_{2i+1}(\bar{\xi}) J_{2j}(\bar{\eta})}{\sqrt{\beta^2 \bar{\xi}^2 + \alpha^2 \bar{\eta}^2 - \kappa^2}} d\bar{\xi} d\bar{\eta}, \\
 & A_{mn} = (-1)^n \frac{\pi^2}{4} \alpha^2 \delta_{0m}.
 \end{aligned}$$

Warunek zgodności przemieszczeń wzdłuż osi η jest spełniony tożsamościowo, mamy zatem m niezależnych równań dla każdej pary j, n . Ponieważ interesuje nas współczynnik a_{00} , to wystarczy ograniczyć się do przypadku $j, n = 0$.

Ostatecznie warunek (6.7) sprowadza się do układu równań

$$(6.15) \quad \sum_i A_{m0i0} a_{i0} = A_{m0}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Podobnie jak w poprzednich przypadkach, wzór (6.14)₁ można na podstawie (4.16) przedstawić w postaci całki pojedynczej

$$(6.16) \quad A_{m0i0} = (-1)^{m+i} \frac{\kappa}{\psi} \int_0^{\infty} J_{2i+1}(\alpha\kappa t) J_{2m+1}(\alpha\kappa t) \cdot I_0 \left(\frac{1}{2} \beta \kappa \sqrt{t^2 - 1} \right) K_0 \left(\frac{1}{2} \beta \kappa \sqrt{t^2 - 1} \right) dt,$$

przy czym zastosowano tu zmianę zmiennej $\bar{\xi} = \alpha\kappa t$.

W przypadku $\kappa = 0$ wzór (6.16) przekształca się do postaci

$$(6.17) \quad A_{m0i0} = (-1)^{m+i} \frac{1}{\psi} \int_0^{\infty} J_{2i+1}(\alpha t) J_{2m+1}(\alpha t) I_0 \left(\frac{\beta}{2} t \right) K_0 \left(\frac{\beta}{2} t \right) dt,$$

przy czym zastosowano tu podstawienie $\bar{\xi} = \alpha t$.

Po rozwiązaniu układu równań (6.15) i po podstawieniu obliczonego współczynnika a_{00} do wzoru (6.4) otrzymamy ostatecznie poszukiwaną sztywność K_{xz} .

Obliczenie sztywności K_{yz} , odpowiadającej rotacji stempla wokół osi x , nie wymaga oddzielnej analizy, zachodzi bowiem oczywista równość

$$(6.18) \quad K_{yz}(\alpha, \beta) = K_{xz}(\beta, \alpha).$$

7. RUCH ROTACYJNY STEMPLA WOKÓŁ OSI z

Rotacji stempla wokół osi z towarzyszą w obszarze kontaktu podstawy stempla z półprzestrznią jednocześnie obciążenia styczne p_x i p_y . Ruch taki można rozłożyć na dwa ruchy składowe (rys. 5), w których realizują się odpowiednio przemieszczenia $u(\xi, \eta)$ pod obciążeniem $p_x(\xi, \eta)$ lub $v(\xi, \eta)$ pod obciążeniem $p_y(\xi, \eta)$, przy czym zachowanie kształtu podstawy wymaga aby $\partial u / \partial y = \partial v / \partial x = \phi$. Reprezentacją rozważanego modelu podłoża są więzi rotacyjne o sztywnościach odpowiednio K_{xy}^u oraz K_{xy}^v . Łączna sztywność rotacyjna, z uwagi na zgodność składowych kątów obrotu, wynosi

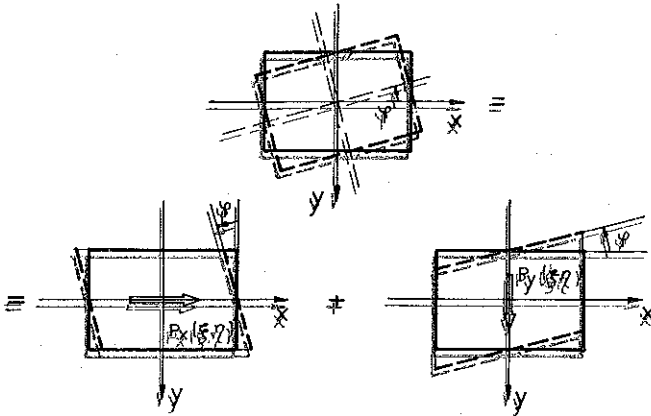
$$(7.1) \quad K_{xy} = K_{xy}^u + K_{xy}^v,$$

przy czym

$$(7.2) \quad K_{xy}^v(\alpha, \beta) = K_{xy}^u(\beta, \alpha),$$

a zatem

$$(7.3) \quad K_{xy}(\alpha, \beta) = K_{xy}^u(\alpha, \beta) + K_{xy}^u(\beta, \alpha).$$



Rys. 5

W ten sposób wyznaczenie sztywności K_{xy} sprowadza się do wyznaczenia sztywności składowej K_{xy}^u , co będzie przedmiotem dalszych rozważań.

Obciążenie styczne p_x napiszemy w postaci szeregu

$$(7.4) \quad p_x(\xi, \eta) = G \sum_{ij} a_{ij} \frac{T_{2i}(\xi) T_{2j+1}(\eta)}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

Więc o sztywności K_{xy}^u doznaje obrotu $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{0,0} = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Globalny warunek równowagi w obszarze kontaktu ma postać:

$$(7.5) \quad K_{xy}^u \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial y} = K_{xy}^u \frac{1}{\beta} \frac{\partial U}{\partial \eta} = \iint y p_x dx dy = e^3 \beta \iint \eta p_x d\xi d\eta =$$

$$= G e^3 \beta \sum_{ij} a_{ij} \iint_{-1}^{+1} [(1-\xi^2)(1-\eta^2)]^{-1/2} T_{2i}(\xi) T_{2j+1}(\eta) T_0(\xi) T_1(\eta) d\xi d\eta =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} G e^3 \beta a_{00},$$

a zatem

$$(7.6) \quad K_{xy}^u = \frac{\pi^2}{2} G e^3 \beta^2 \frac{\partial U}{\partial \eta}$$

Można przyjąć, że

$$(7.7) \quad K_{xy}^u = G e^3 a_{00},$$

jeśli na przemieszczenia w obszarze kontaktu nałożymy warunek

$$(7.8) \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\pi^2}{2} \beta^2$$

lub równoważny warunek przemieszczeniowy

$$(7.9) \quad U(\xi, \eta) = \frac{\pi^2}{2} \beta^2 \eta.$$

Wykorzystując zasadę prac wirtualnych analogicznie do p. 4 otrzymamy warunek kontaktu

$$(7.10) \quad \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} U(\xi, \eta) \delta p_x [\alpha \delta(\eta) + \beta \delta(\xi)] d\xi d\eta = \frac{\pi^2}{2} \beta^2 \int_{-1}^{+1} \eta \delta p_x [\alpha \delta(\eta) + \beta \delta(\xi)] d\xi d\eta,$$

przy czym

$$(7.11) \quad \delta p_x = [(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)]^{-1/2} T_{2m}(\xi) T_{2n+1}(\eta); \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Lewa strona warunku (7.10), podobnie do p. 6, przekształca się do postaci

$$(7.12) \quad \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} U(\xi, \eta) \delta p_x [\alpha \delta(\eta) + \beta \delta(\xi)] d\xi d\eta = \frac{(-1)^{n+m}}{2} i\beta \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, \eta) J_{2n+1}(|\eta|) \operatorname{sgn} \eta d\xi d\eta,$$

natomiast prawa strona warunku (7.10) — do postaci

$$(7.13) \quad \frac{\pi^2}{2} \beta^2 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \eta \delta p_x [\alpha \delta(\eta) + \beta \delta(\xi)] d\xi d\eta = \frac{\pi^3}{4} \beta^3 (-1)^m \delta_{0n}.$$

Po obliczeniu transformaty obciążenia (7.4)

$$(7.14) \quad \bar{p}_x(\xi, \eta) = \frac{i\pi}{2} G \sum_{i,j} a_{ij} (-1)^{i+j} J_{2i}(|\xi|) J_{2j+1}(|\eta|) \operatorname{sgn} \eta$$

i przemieszczenia (3.11),

$$(7.15) \quad \bar{U}(\xi, \eta) = \frac{i\pi}{2} \sum_{i,j} a_{ij} (-1)^{i+j} (\psi^2 \beta^2 \xi^2 + \alpha^2 \eta^2 - \alpha^2)^{-1/2} \cdot J_{2i}(|\xi|) J_{2j+1}(|\eta|) \operatorname{sgn} \eta.$$

oraz po podstawieniu (7.15) do (7.12) otrzymamy układ równań algebraicznych typu (4.14), w których

$$(7.16) \quad A_{mni} = (-1)^{m+n+i+j} \frac{1}{\psi} \int_0^{\infty} \frac{J_{2n+1}(\eta) J_{2i}(\xi) J_{2j+1}(\eta)}{\sqrt{\psi^2 \beta^2 \xi^2 + \alpha^2 \eta^2 - \alpha^2}} d\xi d\eta,$$

$$A_{mn} = (-1)^m \frac{\pi^2}{4} \beta^2 \delta_{0n}.$$

Warunek zgodności przemieszczeń wzdłuż osi ξ jest spełniony tożsamościowo, mamy zatem n niezależnych równań dla każdej pary i, m . Z uwagi na to,

że interesuje nas współczynnik a_{00} , wystarczy ograniczyć się do przypadku $i, m = 0$. Ostatecznie warunek (7.10) sprowadza się do układu równań

$$(7.17) \quad \sum_j A_{0n0j} a_{0j} = A_{0n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Podobnie jak w poprzednich przypadkach, wzór (7.16)₁ można na podstawie (4.16) przedstawić w postaci całki pojedynczej

$$(7.18) \quad A_{0n0j} = (-1)^{n+j} \frac{\kappa}{\psi} \int_0^{\infty} J_{2j+1}(\beta\kappa t) J_{2n+1}(\beta\kappa t) \cdot I_0\left(\frac{\alpha\kappa}{2\psi} \sqrt{t^2-1}\right) K_0\left(\frac{\alpha\kappa}{2\psi} \sqrt{t^2-1}\right) dt,$$

przy czym zastosowano tu zmianę zmiennej $\bar{\eta} = \beta\kappa t$.

W przypadku $\kappa = 0$ otrzymujemy odpowiednio

$$(7.19) \quad A_{0n0j} = (-1)^{n+j} \frac{1}{\psi} \int_0^{\infty} J_{2j+1}(\beta t) J_{2n+1}(\beta t) I_0\left(\frac{\alpha}{2\psi} t\right) K_0\left(\frac{\alpha}{2\psi} t\right) dt,$$

stosując zmianę zmiennej $\bar{\eta} = \beta t$.

Po rozwiązaniu równań (7.17) i podstawieniu obliczonego pierwiastka a_{00} do (7.7), otrzymujemy sztywność częściową K_{xy}^u , natomiast pełną sztywność rotacyjną K_{xy} określa wzór (7.3).

8. ROZWIĄZANIE NUMERYCZNE

Najbardziej kłopotliwym problemem w zakresie rozwiązania numerycznego jest obliczenie współczynników A_{mij} , wyrażonych co prawda przez całkę pojedynczą, ale niewłaściwą i zawierającą osobliwości. Dla ustalenia uwagi zajmiemy się całką typu

$$(8.1) \quad C_{mij} = \int_0^{\infty} J_{2i}(at) J_{2m}(at) I_j(b\sqrt{t^2-1}) K_j(b\sqrt{t^2-1}) dt,$$

występującą w (4.17), (5.9), (6.16), (7.18).

Problem pierwszy polega na znalezieniu takich metod jej obliczania, aby zminimalizować przedział całkowania numerycznego, funkcja podcałkowa bowiem wolno znika przy $t \rightarrow \infty$.

Na podstawie [24: 56.9, 56.10] można wykazać, że rozwinięcie asymptotyczne funkcji podcałkowej dla $t \rightarrow \infty$ ma postać

$$(8.2) \quad J_{2i}(at) J_{2m}(at) I_j(b\sqrt{t^2-1}) K_j(b\sqrt{t^2-1}) = J_{2i}(at) J_{2m}(at) \frac{1}{2bt} + O(t^{-4}).$$

Dalsze postępowanie polega na wykonaniu przekształcenia

$$(8.3) \quad C_{mij} = \int_0^N J_{2i}(at) J_{2m}(at) \left[I_j(b\sqrt{t^2-1}) K_j(b\sqrt{t^2-1}) - \frac{1}{2bt} \right] dt + \\ + \int_N^\infty J_{2i}(at) J_{2m}(at) \left[I_j(b\sqrt{t^2-1}) K_j(b\sqrt{t^2-1}) - \frac{1}{2bt} \right] dt + \\ + \int_0^\infty \frac{J_{2i}(at) J_{2m}(at)}{2bt} dt.$$

Dla dostatecznie dużego N druga całka w (8.3) zgodnie z (8.2) znika, trzecią zaś można obliczyć analitycznie wykorzystując wzór [23: 6.574]

$$(8.4) \quad \int_0^\infty \frac{1}{t} J_p(at) J_n(at) dt = \delta_{pm} \frac{1}{2p}, \quad p+n > 0.$$

Wobec tego

$$(8.5) \quad C_{mij} = \int_0^N J_{2i}(at) J_{2m}(at) \left[I_j(b\sqrt{t^2-1}) K_j(b\sqrt{t^2-1}) - \frac{1}{2bt} \right] dt + \\ + \delta_{im} \frac{1}{8bm} + O(N^{-3}).$$

Występującą w tym wzorze całkę można już obliczyć numerycznie korzystając z kwadratur Gaussa.

Przedstawionego postępowania nie można zastosować dla $m = i = 0$, wtedy bowiem całka występująca w (8.5) jest rozbieżna. W tym przypadku przedział całkowania w (8.1) należy podzielić na dwie części

$$(8.6) \quad C_{00j} = \int_0^N \dots dt + \int_N^\infty \dots dt.$$

Pierwszą całkę da się obliczyć numerycznie, drugą natomiast można obliczyć analitycznie po wykorzystaniu rozwinięć asymptotycznych czynników funkcji podcałkowej [24: 56.7, 56.9, 56.10].

Problem drugi – to wykonanie całkowania z uwzględnieniem osobliwości w punkcie $t = 1$ dla $j = 0$. Problem ten rozwiązano przez wydzielenie osobliwości i analityczne jej scałkowanie. W pierwszej kolejności należy funkcje I i K dla $t < 1$ przekształcić na funkcje argumentu rzeczywistego. Wykorzystując wzory [24: 52.4, 52.5, 52.6] oraz uwzględniając zasadę wypromieniowania [25] można wykazać, że funkcja podcałkowa w (8.1) dla $t < 1$ przybiera postać

$$(8.7) \quad -\frac{\pi}{2} J_{2i}(at) J_{2m}(at) [J_j(b\sqrt{1-t^2}) N_j(b\sqrt{1-t^2}) + iJ_j^2(b\sqrt{1-t^2})].$$

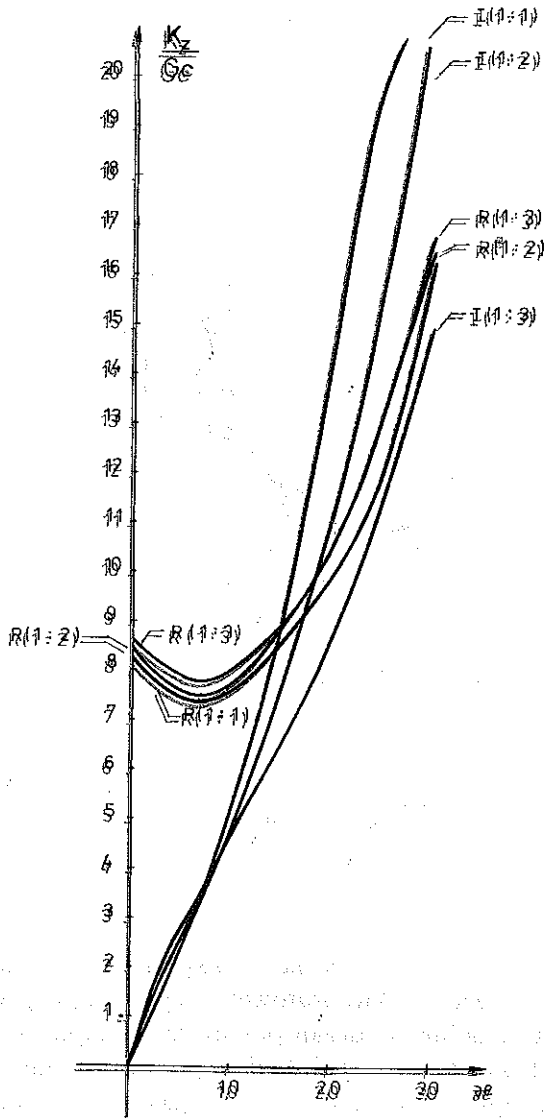
Kolejną operacją jest następujące przekształcenie całki (8.1) z uwzględnieniem (8.7) oraz rozwinięć asymptotycznych funkcji $N_0(x)$, $K_0(x)$ dla $x \rightarrow 0$ [24: 50.4, 52.12]:

$$\begin{aligned}
 (8.8) \quad C_{m\nu 0} = & -\frac{\pi}{2} i \int_0^1 J_{2i}(at) J_{2m}(at) J_0^2(b\sqrt{1-t^2}) dt - \\
 & -\frac{\pi}{2} i \int_0^1 \left[J_{2i}(at) J_{2m}(at) J_0(b\sqrt{1-t^2}) N_0(b\sqrt{1-t^2}) - \frac{2}{\pi} J_{2i}(a) J_{2m}(a) \cdot \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} \ln(1-t) \right] dt + \int_1^2 \left[J_{2i}(at) J_{2m}(at) I_0(b\sqrt{t^2-1}) K_0(b\sqrt{t^2-1}) - \right. \\
 & \left. -\frac{1}{2} J_{2i}(a) J_{2m}(a) \ln(t-1) \right] dt + \\
 & + \int_2^\infty J_{2i}(at) J_{2m}(at) I_0(b\sqrt{t^2-1}) K_0(b\sqrt{t^2-1}) dt - \\
 & -\frac{1}{2} J_{2i}(a) J_{2m}(a) \left[\int_0^1 \ln(1-t) dt + \int_1^2 \ln(t-1) dt \right].
 \end{aligned}$$

Występujące w (8.8) całki, z wyjątkiem dwóch końcowych, nie zawierają osobliwości, natomiast dwie końcowe całki można obliczyć analitycznie.

Następnym etapem algorytmu numerycznego jest rozwiązanie układu równań liniowych typu (4.14) o współczynnikach zespolonych A_{mnij} , co jak wiadomo prowadzi się do rozwiązania układów równań o współczynnikach rzeczywistych, ale o podwójnym rozmiarze. W obliczeniach sztywności więzi rotacyjnych przyjmowano bazę aproksymacyjną określoną przez wskaźniki $(i, j) = (0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$ lub odpowiednio $(i, j) = (0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$. Rozwiązywanie równań nie nastęrczało trudności, a testy zbieżności wypadły pozytywnie. Większe trudności pojawiły się w obliczeniach sztywności więzi translacyjnych, w których powinna być uwzględniona jednoczesna specyfikacja obu wskaźników. Bazę aproksymacyjną ograniczono tu do par wskaźników $(i, j) = (0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, okazało się bowiem, że dalszy rozwój bazy powodował znaczne osłabienie uwarunkowania równań. W tej sytuacji rozwój bazy poza przyjęte ograniczenie wymagałby stosownego powiększenia dokładności obliczeń, jakiej na wykorzystywanym sprzęcie komputerowym nie udało się osiągnąć.

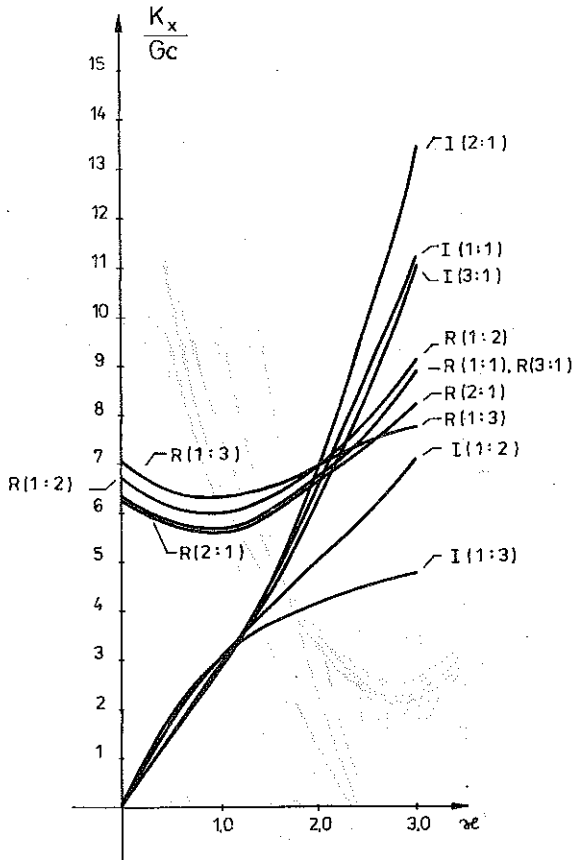
Obliczenia wykonano na minikomputerze IBM PC-AT. Przyjęto stały współczynnik Poissona $\nu = 0,25$, specyfikowano natomiast parametr częstości κ w przedziale $\langle 0, 3 \rangle$ krokiem 0,5 oraz stosunek długości boków podstawy fundamentu, przyjmując $a:b = 3:1$, $2:1$, $1:1$, $1:2$, $1:3$. Wyniki przedstawiono na rys. 6, 7, 8, 9 w postaci wykresów sztywności w sensie bezwymiarowym. Symbolem R i I oznaczono odpowiednio rzeczywiste i urojone składniki



Rys. 6

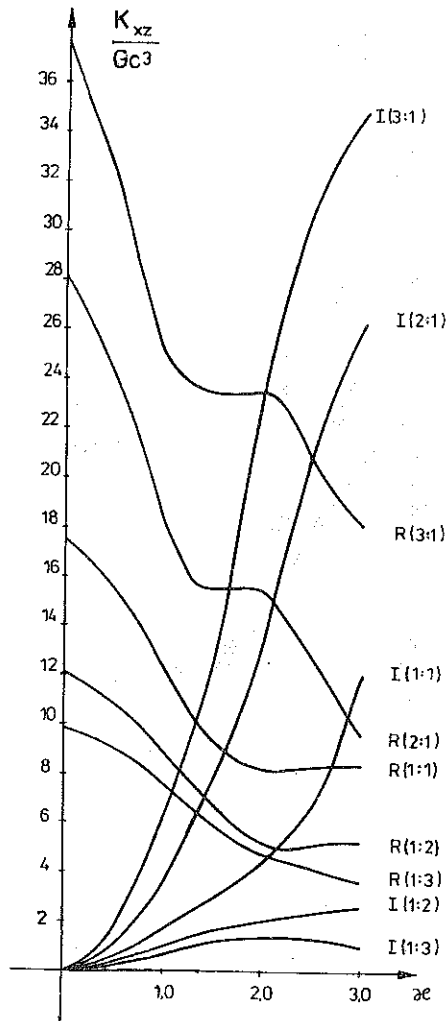
sztywności, natomiast obok tych symboli podano w nawiasach proporcje boków ($a:b$). Jest widoczne, że parametr sztywności κ (a więc także inercja ośrodka) ma nader istotny wpływ na sztywność podłoża, zwłaszcza na składniki urojone. Ponadto zgodnie z intuicją rola proporcji boków podstawy fundamentu jest silnie eksponowana w przypadku sztywności więzi rotacyjnych, natomiast zaznacza się słabiej w zakresie sztywności więzi translacyjnych.

W celu weryfikacji uzyskanych rozwiązań dokonano porównania z wynika-



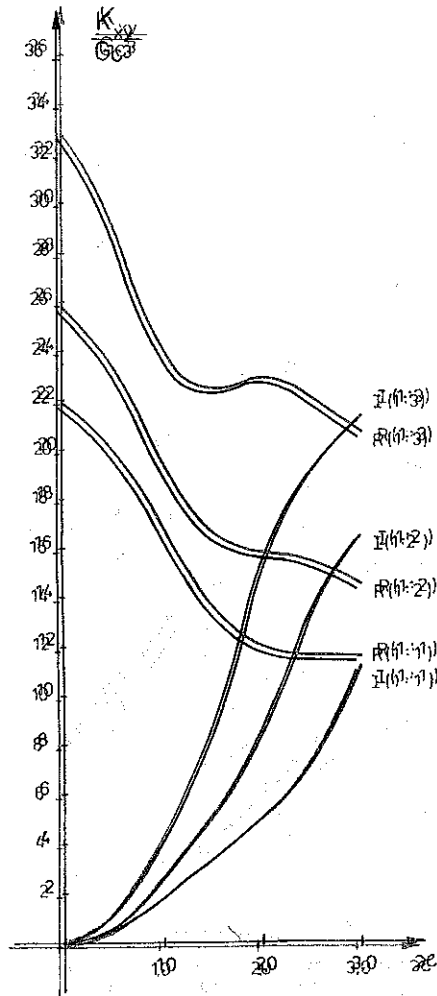
Rys. 7

mi uzyskanymi przez THOMSONA i KOBORI [13] na przykładzie drgań pionowych fundamentu o podstawie kwadratowej. Przypomnijmy, że w pracy [13] podano rozwiązanie zagadnienia drgań pionowych stępła prostokątnego na klasycznej półprzestrzeni sprężystej, jednakże przy założeniu równomiernego rozkładu nacisku stępła na podłoże oraz z uwzględnieniem warunku zgodności przemieszczeń w punkcie centralnym. Porównanie wyników przedstawiono na rys. 10, gdzie linią przerywaną oznaczono wyniki uzyskane w [13] (po stosownym przekształceniu podatności na sztywności), natomiast liniami ciągłymi oznaczono rozwiązania uzyskane w niniejszej pracy, przy czym symbole R_1, I_1 dotyczą rozwiązań z dokładnością do jednego wyrazu szeregu opisującego rozkład obciążeń, a symbole R_3, I_3 — z dokładnością do trzech wyrazów szeregu. Na wykresie widoczne są jakościowe i ilościowe różnice porównywanych rozwiązań. Różnice te w pewnym stopniu wynikają z odmienności modeli podłoża, wydaje się jednak, że ważniejsze są przyczyny innej natury. Zauważmy, że rozwiązania (R_1, I_1) są pod względem jakościowym



Rys. 8

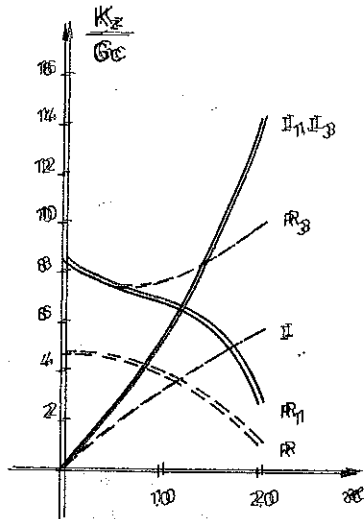
zbliżone do rozwiązań (R, I) , różnią się natomiast ilościowo. Należy to tłumaczyć tym, że autorzy pracy [13] rozważając zagadnienie drgań sztywnego stępła pominieli osobliwości krawędziowe rozkładu obciążenia działającego na podłoże oraz przyjęli warunek zgodności przemieszczeń tylko w jednym punkcie. W tej sytuacji przemieszczenia stępła są stałe, podczas gdy przemieszczenia powierzchni granicznej podłoża mają kształt czaszy stycznej do podstawy stępła w jednym punkcie. Jest zrozumiałe, że przy tak dalece osłabionym warunku kontaktu obliczone przemieszczenia punktu centralnego są większe od przemieszczeń rzeczywistych, a zatem wynikająca z [13]



Rys. 9

sztywność podłoża musi charakteryzować się niedomiarem. W tym aspekcie rozwiązanie $((R_1, I_1))$ wydaje się bliższe prawdy, albowiem w pracy niniejszej uwzględniono w rozkładzie obciążenia osłabienia kręweńdrowe i przyjęto warunek kontaktu bardziej adekwatny do rzeczywistości.

Różnica jakościowa między rozwiązaniami $((R_3, I_3))$ a $((R_1, I_1))$ świadczy z kolei o tym, że jednoelementowa aproksymacja rozkładu obciążenia jest zbyt uboga, aby prawidłowo opisać sztywność podłoża, zwłaszcza przy większych wartościach parametru z . Niedostatek ten dotyczy również rozwiązania $((R, I))$, w pracy [13] bowiem rozkład obciążenia przyjęto nader elementarnie.



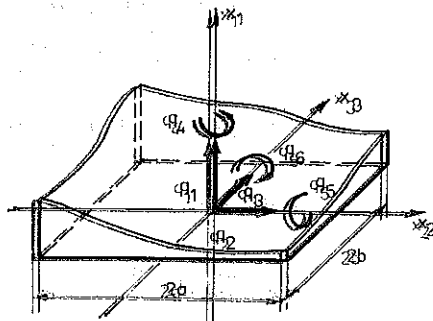
Rys. 10

9. INTERPRETACJA SZTYWNOŚCI ZESPOLONYCH

Rozważmy fundament blokowy ω modelu przedstawionym na rys. 11, zaczepionym z [3]. Geometria bloku jest określona w układzie współrzędnych (x_1, x_2, x_3) , przy czym x_2, x_3 są osiami symetrii prostokątnej postawy bloku. Jeśli blok taki spoczywa na odkształcalnym podłożu, układ ma sześć dynamicznych stopni swobody i ruch bloku jest opisany sześcioma współzależnymi uogólnionymi tworzącymi wektor $q = \text{col}(q_1, \dots, q_6)$. Równanie drgań wymuszonych fundamentu z pominięciem tłumienia materiałowego ma postać

(9.1)

$$B\ddot{q} + Kq = F e^{i\Omega t}$$



Rys. 11

gdzie \mathbf{B} jest macierzą bezwładności bloku, \mathbf{K} jest macierzą sztywności reprezentującą podłoże, natomiast \mathbf{F} jest wektorem zespolonych amplitud harmonicznych zmiennych sił wymuszających zredukowanych do początku układu współrzędnych [3].

Struktura macierzy bezwładności jest następująca

$$(9.2) \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & S_{12} & -S_{13} \\ 0 & m & 0 & -S_{12} & 0 & S_{23} \\ 0 & 0 & m & S_{13} & -S_{23} & 0 \\ 0 & -S_{12} & S_{13} & J_1 & -D_3 & -D_2 \\ S_{12} & 0 & -S_{23} & -D_3 & J_2 & -D_1 \\ -S_{13} & S_{23} & 0 & -D_2 & -D_1 & J_3 \end{bmatrix},$$

gdzie m — masa bloku, S_{ij} — moment statyczny masy bloku względem płaszczyzny (x_i, x_j) , D_i — moment dewiacji masy bloku względem płaszczyzn przecinających się w osi x_i , J_i — moment bezwładności masy bloku względem osi x_i .

Macierz sztywności ma postać

$$(9.3) \quad \mathbf{K} = \text{diag}(K_1, \dots, K_6),$$

przy czym K_j są sztywnościami więzi sprężystych skojarzonych odpowiednio ze współrzędnymi uogólnionymi q_j . W nawiązaniu do oznaczeń stosowanych w niniejszej pracy kolejne sztywności wynoszą:

$$(9.4) \quad \begin{aligned} K_1 &= K_z, & K_2 &= K_x, & K_3 &= K_y, \\ K_4 &= K_{xy}, & K_5 &= K_{yz}, & K_6 &= K_{xz}. \end{aligned}$$

Jeśli podłoże jest ośrodkiem nieinercyjnym, sztywności K_j są rzeczywiste i niezależne od częstości drgań [1, 2, 3, 4]. W przypadku podłoża inercyjnego sztywności zastępcze są zespolone i zależne od częstości, a więc

$$(9.5) \quad K_j = \text{Re } K_j(\Omega) + i \text{Im } K_j(\Omega).$$

Ponieważ rozważamy proces harmoniczny typu $e^{i\Omega t}$, to

$$(9.6) \quad \mathbf{K}\mathbf{q} = (\text{Re } \mathbf{K} + i \text{Im } \mathbf{K})\mathbf{q} = \text{Re } \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} + \frac{1}{\Omega} \text{Im } \mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{q}},$$

a relacja (9.5) może być napisana w postaci

$$(9.7) \quad K_j = \text{Re } K_j(\Omega) + \frac{1}{\Omega} \text{Im } K_j(\Omega) \frac{d}{dt}.$$

Równanie ruchu (9.1) przybiera zatem postać

$$(9.8) \quad \mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q} = \mathbf{F}_s \sin \Omega t + \mathbf{F}_c \cos \Omega t,$$

przy czym w tej relacji należy rozumieć

$$(9.9) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}} &= \text{diag} [\text{Re } K_j(\Omega)], \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \text{diag} \left[\frac{1}{\Omega} \text{Im } K_j(\Omega) \right]. \end{aligned}$$

Jak widać, macierz sztywności układu jest ostatecznie budowana z rzeczywistych składników kolejnych sztywności zespolonych i zależy od częstości drgań. Ponadto w równaniu ruchu, mimo pominięcia tłumienia materiałowego, pojawia się blok tłumienia, przy czym macierz tłumienia $\tilde{\mathbf{C}}$ jest budowana z urojonych składników kolejnych sztywności zespolonych i także zależy od częstości drgań. Macierz ta jest macierzą tłumienia geometrycznego, reprezentującą cechy ośrodka inercyjnego o nieograniczonych rozmiarach, w którym energia przekazywana przez blok ulega permanentnemu rozpraszaniu w wyniku odśrodkowej propagacji fal bez odbicia.

Macierzowe równanie ruchu (9.8) z uwzględnieniem (9.9) można już rozwiązywać klasycznymi metodami opisanymi m.in. w pracy [26] i w [3] (wersja komputerowa).

Istnieje także możliwość przybliżonego uwzględnienia tłumienia materiałowego [26], polegająca na przyjęciu

$$(9.10) \quad \tilde{\mathbf{C}} = \text{diag} \left[\frac{1}{\Omega} \text{Im } K_j(\Omega) \right] + \Delta \mathbf{C},$$

przy czym jeśli rozważanemu ośrodkowi przypiszemy reologiczny model Kelvina–Voigta, to

$$(9.11) \quad \Delta \mathbf{C} = \tau \tilde{\mathbf{K}},$$

gdzie τ jest tzw. czasem retardacji. Jeśli natomiast akceptujemy model tłumienia z ustalonym dekrementem, to należy przyjąć

$$(9.12) \quad \Delta \mathbf{C} = \frac{\gamma}{\Omega} \tilde{\mathbf{K}},$$

gdzie γ jest bezwymiarowym współczynnikiem tłumienia materiałowego, zdefiniowanym w [26]. Parametry tłumienia materiałowego powinny być wyznaczone doświadczalnie w ośrodku o wymiarach ograniczonych, w którym zjawisko tłumienia geometrycznego nie występuje.

Rozwiązanie przedstawione w niniejszej pracy jest jedną z prób efektywnego rozstrzygnięcia postawionego problemu, ale problemu tego nie zamyka. W dalszych badaniach należałoby je przede wszystkim tak udoskonalić, aby możliwe było spełnienie warunków kontaktu stempla z podłożem bez konieczności osłabiania tych warunków.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. D. D. BARKAN, *Dynamics of bases and foundations*, McGraw Hill Book Comp., New York 1962.
2. I. KISIEL, *Dynamika fundamentów pod maszyną*, PWN, Warszawa 1957.
3. M. KLASZTORNY, J. LANGER, W. MIRONOWICZ, *Analiza dynamiczna fundamentów blokowych pod maszyną nieudarowe*, Prace Nauk. Instytutu Inż. Łądowej Pol. Wrocławskiej, Wrocław 1978.
4. PN-80/B-03040, *Fundamenty i konstrukcje wsporcze pod maszyną. Obliczenia i projektowanie*.
5. R. N. ARNOLD, G. N. BYKROFT, G. B. WARBURTON, *Forced vibration of a body on an infinite elastic solid*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, **22**, 1955.
6. E. J. LUCO, *Impedance functions for a rigid foundation on a layered medium*, Nucl. Engr. Des., **22**, 1974.
7. L. M. KARASUDHI, L. M. KEER, S. L. LEE, *Vibratory motion of body on an elastic halfplane*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, **4**, 1968.
8. M. A. OIEN, *Steady motion of a rigid strip bonded to an elastic half-space*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, **38**, 1971.
9. J. E. LUCO, R. A. WESTMAN, *Dynamic response of a rigid footing bonded to on elastic half-space*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, **39**, 1972.
10. A. O. AWOJOBI, *Approximate solution of high-frequency factor vibrations of rigid bodies on elastic media*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, **38**, 1971.
11. В. Т. БУРЯК, *Динамическая контактная задача для упругой полуплоскости*, Механика твердого тела, **6**, 1972.
12. В. М. СЕЙМОВ, *Применение метода ортогональных многочленов к динамическим контактным задачам*, Прикладная механика, **8**, 1, 1972.
13. W. T. THOMSON, T. KOVORI, *Dynamic compliance of rectangular foundation on an elastic half-space*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, **30**, 1963.
14. J. LYSMER, R. L. KUHLEMEYER, *Finite dynamic model for infinite media*, J. Engr. Mech. Div., Proc. ASCE, **95**, 1969.
15. S. P. DASGUPTA, KAMESWARA RAO, *Dynamic response of strip footings on elastic halfspace*, Int. J. Num. Meth. Engng., **14**, 1979.
16. Y. KITAMURA, S. SUKURAI, *Dynamic stiffness for rectangular rigid foundation on a semi-infinite elastic medium*, Int. J. Numer. Analyt. Meth. Geomech., **3**, 1979.
17. H. L. WONG, J. E. LUCO, *Dynamic response of rigid foundations of arbitrary shape*, Eartq. Engng. Struct. Dyn., **4**, 1976.
18. Г. Б. МУРАВСКИЙ, *О модели упругого основания*, Строительная механика и расчет сооружений, **6**, 54, 1967.
19. R. ŚWITKA, *Aproksymowana półprzestrzeń sprężysta jako model podłoża sprężystego*, Rozprawy 31, Pol. Poznańska, Poznań 1968.
20. P. RUTA, J. LANGER, *Uproszczony model półprzestrzeni sprężystej*, Zesz. Nauk. Pol. Rzeszowskiej, **13**, Mechanika, z. 5, 1983.
21. P. RUTA, *Uproszczony model inercyjnego podłoża sprężystego i jego zastosowania*, Praca doktorska, Raport PRE nr 52/1-14/84, Pol. Wrocławska, Wrocław 1984.
22. В. М. СЕЙМОВ, Б. Н. ОСТРОВЕРХ, А. И. ЕРМОЛЕНКО, *Динамика и сейсмостойкость гидро-технических сооружений*, Изд. „Наукова думка”, Киев 1983.
23. И. С. ГРАДШТЕЙН, И. М. РЫЖИК, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Изд. „Наука”, Москва 1971.
24. N. N. LEVIEDIEW, *Funkcje specjalne i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1957.
25. В. Т. ГРИНЧЕНКО, В. В. МЕЛЕШКО, *Гармонические колебания и волны в упругих телах*, Изд. „Наукова Думка”, Киев 1981.
26. J. LANGER, *Dynamika budowli*, Wyd. Pol. Wrocławskiej, Wrocław 1980.

РЕЗЮМЕ

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЖЕСТКОСТИ ОСНОВАНИЯ В ЗАДАЧЕ КОЛЕБАНИЙ
МАССИВНОГО ФУНДАМЕНТА ПОД НЕУДАРНЫЕ МАШИНЫ

В работе сформулирована упрощенная модель упругого полупространства, вытекающая из пренебрежения сопряжениями в классических уравнениях эластокинетики. Применяя интегральные преобразования Фурье и разложения в ряды по отношению к многочленам Чебышева, проанализированы гармонические трансляционные и ротационные движения прямоугольного штампа, находящегося на сформулированном основании. Численными методами вычислены комплексные жесткости, представляющие инерционное основание в стационарных задачах колебаний массивного фундамента под машины для разных значений параметров системы. Приведена интерпретация этих жесткостей и проведено сравнение некоторых результатов с результатами, известными из других работ.

SUMMARY

DYNAMIC FOUNDATION STIFFNESSES IN PROBLEMS OF VIBRATION
OF BLOCK FOUNDATIONS LOADED BY IMPACT-FREE ENGINES

A simplified model of an elastic halfspace is formulated, coupling terms in the classical elastokinetics equations being disregarded. Using the Fourier transforms and expansions into Chebyshev polynomials, translational and rotational motions of a rectangular punch resting on such foundation are analyzed. Numerical methods are used to evaluate the complex stiffnesses representing the inertial foundation in the cases of stationary vibration of machine foundations, for various values of parameters characterizing the system. Physical interpretation of the stiffnesses are given, and some of the results obtained are compared with those known from other papers.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA
INSTYTUT INŻYNIERII ŁADOWEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 października 1988 r.