

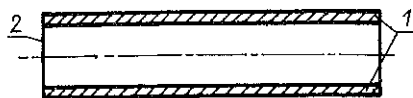
STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA PRĘTA PRZEKŁADKOWEGO ŚCISKANEGO SIŁĄ OKRESOWO-ZMIENNĄ

WALDEMAR MORZUCH (WROCŁAW)

Celem pracy jest analiza stateczności dynamicznej pręta przekładkowego ściskanego siłą okresowo zmienną. Do analizy przyjęto model pręta składającego się z dwóch okładzin metalowych i rdzenia (z tworzywa sztucznego). Problem opisano równaniami różniczkowymi cząstkowymi o zmiennych współczynnikach, które rozwiązano stosując metodę rozdzielenia zmiennych (metoda Fouriera). Rozwiązanie wyrażono w postaci nieskończonego szeregu dwóch funkcji: $X_n(x)$, zależnych od współrzędnej przestrzennej (x) oraz $T_n(t)$ zależnych od czasu (t). Analizując rozwiązania wyróżniono tzw. obszary statecznej i niestatecznej pracy pręta przekładkowego. Wyznaczono wartości maksymalne sił ściskających, przy których następuje utrata stateczności.

1. WPROWADZENIE

Konstrukcje przekładkowe zaliczamy do ustrojów lekkich; stanowią one od wielu lat ważny problem techniczny. Charakteryzują się stosunkowo małym ciężarem, a jednocześnie dużą wytrzymałością. Cechy te są szczególnie istotne w lotnictwie i w konstrukcjach pojazdów samochodowych oraz w budownictwie. Zasadniczym celem stosowania konstrukcji przekładkowych jest otrzymanie konstrukcji odpowiednio wytrzymałej, sztywnej, technologicznej, o dużej wytrzymałości zmęczeniowej, zdolnej do tłumienia drgań mechanicznych i akustycznych, o dobrych własnościach izolacyjnych, gładkiej powierzchni, przy jednoczesnym zmniejszeniu jej ciężaru własnego do minimum. Schemat konstrukcji przekładkowej przedstawiono na rys. 1. Konstrukcja taka składa się z trzech połączonych na stałe warstw: dwóch cienkich okładzin, między którymi znajduje się stosunkowo gruby rdzeń. Rdzeń przenosi siły poprzeczne i utrzymuje stały odstęp między okładzinami, wpływa więc stabilizująco. Rdzeń wykonuje się najczęściej z tworzyw sztucznych, blachy bądź folii (rdzeń komórkowy). Okładziny pracują głównie na zginanie i są wykonane najczęściej ze stopów lekkich. W zależności od wymiarów oraz przenoszonych obciążeń konstrukcje przekładkowe można podzielić na pręty, belki i płyty. Jednym z istotnych zagadnień występujących przy obliczaniu konstrukcji przekładkowych jest ocena ich stateczności przy obciążeniach ściskających, wywołują-



Rys. 1. Schemat konstrukcji przekładkowej, 1 — okładziny, 2 — rdzeń

cych wyoboczenie lub pofałdowanie okładzin. Stosowane dotychczas obliczenia konstrukcji przekładkowych [2] sprowadzają się do oceny ich stateczności przy obciążeniach statycznych. Niewiele jest opracowań poświęconych analizie drgań i stateczności dynamicznej rozważanych układów. W pracy niniejszej przedstawiono analizę dynamiczną pręta przekładkowego, poddanego ścisnaniu siłą okresowo-zmienną przy założeniu liniowo-sprężystego rdzenia. Na podstawie równań różniczkowych, opisujących wyoboczenie dynamiczne pręta, wyznaczono obszary niestateczności i wyprowadzono zależności na siłę krytyczną.

Omawiając ten temat dalej należałoby przeprowadzić analizę dynamiczną przy założeniu lepko-sprężystego modelu rdzenia, co będzie niewątpliwie miało wpływ na zawężenie obszarów niestateczności. Zagadnienia obliczeń dynamicznych konstrukcji przekładkowych są szczególnie ważne w odniesieniu do pojazdów samochodowych i samolotów, gdyż przeważające w nich obciążenia mają charakter zmienny w czasie.

2. STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA PRĘTA PRZEKŁADKOWEGO

Na rysunku 2 przedstawiono pręt przekładkowy, swobodnie podparty i na obu końcach ściskany zmienną siłą F , opisaną zależnością

$$(2.1) \quad F = F_1 + F_2 \cos pt.$$

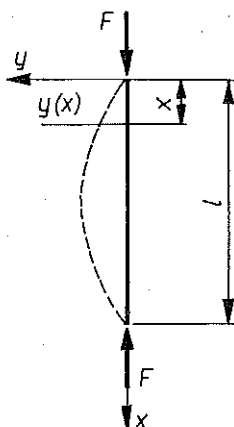
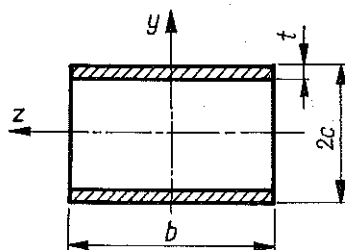
Przekrój poprzeczny pręta przedstawiono na rys. 3.

Podstawą do analizy stateczności dynamicznej pręta jest równanie różniczkowe osi ugiętej, które można napisać w następującej postaci:

$$(2.2) \quad B \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q - k \frac{B}{S} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2},$$

gdzie B oznacza sztywność pręta na zginanie, q — obciążenie jednostkowe (na jednostkę długości), k — współczynnik określający wpływ siły poprzecznej na ugięcie oraz S — sztywność poprzeczną rdzenia.

W konstrukcjach przekładkowych, w których rdzeń nie przenosi naprężeń podłużnych, lecz tylko ścinające, współczynnik k jest zawsze równy jedności $k = 1$.


 Rys. 2. Pręt przekładkowy ściskany siłą F


Rys. 3. Przekrój poprzeczny pręta przekładkowego

Sztywność poprzeczną rdzenia S można wyrazić zależnością

$$(2.3) \quad S = 2bc G_c,$$

w której G_c oznacza moduł sprężystości poprzecznej materiału rdzenia. Po uwzględnieniu obciążenia pręta siłą ściskającą oraz siłą bezwładności, równanie (2.2) przyjmie postać

$$(2.4) \quad B \left[1 - \frac{1}{S} (F_1 + F_2 \cos pt) \right] \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} (F_1 + F_2 \cos pt) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{B}{S} \mu \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Jest to równanie różniczkowe czwartego rzędu, o pochodnych cząstkowych, jednorodne, o zmiennych współczynnikach. Przez μ oznaczono jednostkową masę pręta przekładkowego. Rozwiązanie równania różniczkowego (2.4) można przedstawić w postaci nieskończonego szeregu (metoda Fouriera)

$$(2.5) \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t).$$

Ze względu na warunki brzegowe przyjęto następującą postać funkcji $X_n(x)$ (funkcje własne):

$$(2.6) \quad X_n(x) = A_n \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Po podstawieniu zależności (2.6) i (2.5) do równania różniczkowego (2.4) otrzymano równanie różniczkowe zwyczajne względem funkcji $T_n(t)$

$$(2.7) \quad \ddot{T}_n + \frac{B\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 - (F_1 + F_2 \cos pt) \left[1 + \frac{B\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}{S}\right] \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}{\mu \left[1 + \frac{B\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}{S}\right]} T_n = 0.$$

Równanie to można przedstawić w postaci

$$(2.8) \quad \ddot{T}_n + \omega_n^2 (1 - 2\psi_n \cos pt) T_n = 0,$$

w której ω_n oznacza częstość drgań swobodnych pręta ściskanego siłą stałą $F = F_1$ (czyli przy $F_2 = 0$). Częstość ta wyraża się zależnością

$$(2.9) \quad \omega_n^2 = \frac{B\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 - F_1\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \left[1 + \frac{B\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}{S}\right]}{\mu \left[1 + \frac{B\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}{S}\right]}.$$

Współczynnik ψ_n wyraża się zależnością

$$(2.10) \quad 2\psi_n = \frac{F_2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}{\mu\omega_n^2}.$$

Z zależności (2.9) wynika, że istnieje pewna wartość siły F_1 , przy której częstość drgań swobodnych pręta jest równa zero. Jest to siła krytyczna odpowiadająca utracie stateczności. Siła ta jest związana z n -tą postacią drgań pręta i jest wyrażona wzorem

$$(2.11) \quad F_{1nkr} = \frac{B\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}{1 + \frac{B\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}{S}}.$$

Po wykorzystaniu tej zależności można współczynnik ψ_n wyrazić wzorem

$$(2.12) \quad 2\psi_n = \frac{F_2}{F_{1nkr} - F_1}.$$

Równanie (2.8) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym drugiego rzędu o zmiennych w czasie współczynnikach. Jest to równanie zwane równaniem Mathieu i opisuje tzw. drgania parametryczne. Drgania parametryczne są to drgania układu o zmiennych w czasie parametrach, np. zmiennej sztywności, masy lub zmiennym współczynniku tłumienia. Przy pewnych wartościach parametrów układu i parametrów wymuszenia może wystąpić niestateczność pręta. Rozwiązując równanie różniczkowe (2.8) będzie można wyznaczyć obszary niestateczności pręta.

Rozważmy możliwości powstania drgań parametrycznych pierwszej harmonicznej szeregu (2.5), czyli możliwość istnienia niestatecznych rozwiązań równania

$$(2.13) \quad \ddot{T}_1 + \omega_1^2(1 - 2\psi_1 \cos pt) T_1 = 0.$$

Szukamy rozwiązania o okresie $2T$ odpowiadającego między innymi granicom pierwszego obszaru niestateczności

$$(2.14) \quad T_1 = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{kpt}{2} + b_k \cos \frac{kpt}{2} \right).$$

Po podstawieniu (2.14) do (2.13) oraz po uwzględnieniu odpowiednich tożsamości trygonometrycznych, a następnie po porównaniu do zera współczynników przy funkcjach trygonometrycznych $\sin \frac{kpt}{2}$ i $\cos \frac{kpt}{2}$ otrzymuje się nieskończone układy jednorodnych równań algebraicznych

$$\left[1 + \psi_1 - \left(\frac{p}{2\omega_1} \right)^2 \right] a_1 - \psi_1 a_3 = 0,$$

(2.15)

$$\left[1 - \left(\frac{kp}{2\omega_1} \right)^2 \right] a_k - \psi_1 (a_{k-2} + a_{k+2}) = 0, \quad k = 3, 5, 7, \dots;$$

$$\left[1 - \psi_1 - \left(\frac{p}{2\omega_1} \right)^2 \right] b_1 - \psi_1 b_3 = 0,$$

(2.16)

$$\left[1 - \left(\frac{kp}{2\omega_1} \right)^2 \right] b_k - \psi_1 (b_{k-2} + b_{k+2}) = 0, \quad k = 3, 5, 7.$$

Warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań układów (2.15) i (2.16) jest zerowanie się odpowiednich wyznaczników charakterystycznych.

Dla układu (2.15)

(2.17)

$$\begin{vmatrix} 1 + \psi_1 - \left(\frac{p}{2\omega_1}\right)^2 & -\psi_1 & 0 & 0 \dots\dots \\ -\psi_1 & 1 - \left(3\frac{p}{2\omega_1}\right)^2 & -\psi_1 & 0 \dots\dots \\ 0 & -\psi_1 & 1 - \left(5\frac{p}{2\omega_1}\right)^2 & -\psi_1 \dots\dots \\ 0 & 0 & -\psi_1 & 1 - \left(7\frac{p}{2\omega_1}\right)^2 \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\psi_1 \dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{vmatrix} = 0.$$

Dla układu (2.16)

(2.18)

$$\begin{vmatrix} 1 - \psi_1 - \left(\frac{p}{2\omega_1}\right)^2 & -\psi_1 & 0 & 0 \dots\dots \\ -\psi_1 & 1 - \left(3\frac{p}{2\omega_1}\right)^2 & -\psi_1 & 0 \dots\dots \\ 0 & -\psi_1 & 1 - 5\left(\frac{p}{2\omega_1}\right)^2 & -\psi_1 \dots\dots \\ 0 & 0 & -\psi_1 & 1 - \left(7\frac{p}{2\omega_1}\right)^2 \dots \\ \dots\dots\dots \end{vmatrix} = 0.$$

Rozważając kolejno wyznaczniki składające się z n pierwszych wierszy i kolumn, $n = 1, 2, 3, \dots$, tzn. wyznaczniki składające się z n pierwszych wyrazów szeregu (2.14), będzie można zbadać ich miejsca zerowe. Biorąc n dostatecznie duże otrzymamy dowolnie mały błąd wyznaczenia pierwszych wartości własnych, a więc dowolnie mały błąd wyznaczenia relacji między p/ω_1 oraz ψ_1 wynikających z (2.17) i (2.18). W następstwie określenia powyższej relacji otrzymujemy granice obszaru niestateczności na płaszczyźnie $(\psi_1, p/\omega_1)$. W przypadku gdy ψ_1 dąży do zera, warunki (2.17) i (2.18) przyjmą postać

$$(2.19) \quad \left[1 - \left(\frac{p}{2\omega_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(3\frac{p}{2\omega_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(5\frac{p}{2\omega_1}\right)^2\right] \dots = 0.$$

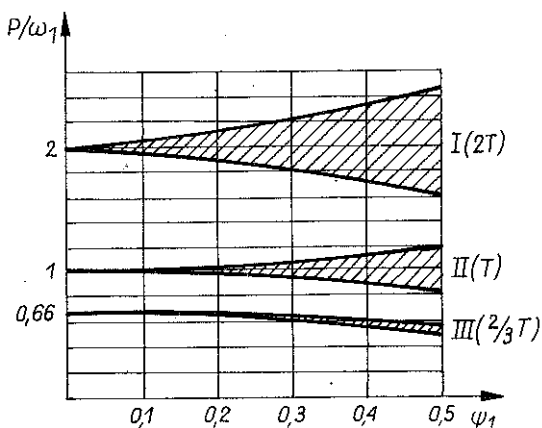
Z równania (2.19) wynika, że granice obszarów niestateczności rozpoczynają się w punktach $\psi_1 = 0$; $p/\omega_1 = 2/k$, $k = 1, 3, 5, \dots$

Przeanalizujemy dokładnie obszar odpowiadający $k = 1$, a więc możliwość powstania rezonansu parametrycznego z częstością p zbliżoną do $2\omega_1$, czyli z okresem zmian parametru zbliżonym do połowy okresu drgań swobodnych.

Biorąc tylko jeden wyraz otrzymamy z (2.17) i (2.18)

$$(2.20) \quad \begin{aligned} 1 + \psi_1 - \left(\frac{p}{2\omega_1}\right)^2 = 0, & \quad \text{czyli} \quad \frac{p}{\omega_1} = 2\sqrt{1 + \psi_1}, \\ 1 - \psi_1 - \left(\frac{p}{2\omega_1}\right)^2 = 0, & \quad \text{czyli} \quad \frac{p}{\omega_1} = 2\sqrt{1 - \psi_1}, \end{aligned}$$

Równania te opisują granice pierwszego obszaru niestateczności i są oznaczone literami $2T$ (rys. 4).



Rys. 4. Obszary niestateczności

Analogicznie poszukujemy rozwiązania o okresie T

$$(2.21) \quad T_1 = b_0 + \sum_{k=2,4,6}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{kpt}{2} + b_k \cos \frac{kpt}{2} \right).$$

Po dokonaniu podobnych operacji jak poprzednio otrzymuje się nieskończone układy równań algebraicznych

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \left[1 - \left(\frac{p}{\omega_1}\right)^2 \right] a_2 - \psi_1 a_4 &= 0, \\ \left[1 - \left(\frac{kp}{2\omega_1}\right)^2 \right] a_k - \psi_1 (a_{k-2} + a_{k+2}) &= 0, \quad k = 2, 4, 6, \dots, \\ b_0 - \psi_1 b_2 &= 0, \end{aligned}$$

$$\left[1 - \left(\frac{p}{\omega_1} \right)^2 b_2 - \psi_1 (2b_0 + b_4) = 0, \right. \\ (2.23)$$

$$\left. \left[1 - \left(\frac{kp}{2\omega_1} \right)^2 \right] b_k - \psi_1 (b_{k-2} + b_{k+2}) = 0, \quad k = 2, 4, 6, \dots \right.$$

Warunki istnienia niezerowych rozwiązań układów równań (2.22) i (2.23) przyjmą postać

$$(2.24) \quad \begin{vmatrix} 1 - \left(\frac{p}{\omega_1} \right)^2 & -\psi_1 & 0 & 0 & \dots \\ -\psi_1 & 1 - \left(2 \frac{p}{\omega_1} \right)^2 & -\psi_1 & 0 & \dots \\ 0 & -\psi_1 & 1 - \left(4 \frac{p}{\omega_1} \right)^2 & -\psi_1 & \dots \\ 0 & 0 & -\psi_1 & 1 - \left(6 \frac{p}{\omega_1} \right)^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

i

$$(2.25) \quad \begin{vmatrix} 1 & -\psi_1 & 0 & 0 & \dots \\ -2\psi_1 & 1 - \left(\frac{p}{\omega_1} \right)^2 & -\psi_1 & 0 & \dots \\ 0 & -\psi_1 & 1 - \left(2 \frac{p}{\omega_1} \right)^2 & -\psi_1 & \dots \\ 0 & 0 & -\psi_1 & 1 - 4 \left(\frac{p}{\omega_1} \right)^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Dla bardzo małej wartości ψ_1 warunki (2.24) i (2.25) przyjmą postać

$$(2.26) \quad \left[1 - \left(\frac{p}{\omega_1} \right)^2 \right] \left[1 - \left(2 \frac{p}{\omega_1} \right)^2 \right] \left[1 - \left(4 \frac{p}{\omega_1} \right)^2 \right] \dots = 0.$$

Wynika z tego, że granice drugiej grupy obszarów niestateczności rozpoczynają się w punktach

$$\psi_1 = 0, \quad \frac{p}{\omega_1} = \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, 4.$$

Analizując przypadek gdy $p = \omega_1$, otrzymujemy granice drugiego obszaru niestateczności. Ograniczając się w (2.24) i (2.25) do dwu wierszy i dwu kolumn

otrzymamy

$$(2.27) \quad \begin{vmatrix} 1 - \left(\frac{p}{\omega_1}\right)^2 & -\psi_1 \\ -\psi_1 & 1 - \left(2\frac{p}{\omega_1}\right)^2 \end{vmatrix} = 0,$$

i

$$(2.28) \quad \begin{vmatrix} 1 & -\psi_1 \\ -2\psi_1 & 1 - \left(\frac{p}{\omega_1}\right)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Stąd granice drugiego obszaru niestateczności są określone zależnościami

$$(2.29) \quad \frac{p}{\omega_1} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{9 + 16\psi_1^2}}{8}},$$

i

$$(2.30) \quad \frac{p}{\omega_1} = \sqrt{1 - 2\psi_1^2}.$$

Postępując analogicznie, można opisać trzeci obszar niestateczności. Przyjmując dla rozwiązania o okresie $2T$, $k = 3$ otrzymujemy następujące warunki:

$$(2.31) \quad \begin{vmatrix} 1 + \psi_1 - \left(\frac{p}{2\omega_1}\right)^2 & -\psi_1 \\ -\psi_1 & 1 - \left(\frac{3p}{2\omega_1}\right)^2 \end{vmatrix} = 0,$$

i

$$(2.32) \quad \begin{vmatrix} 1 - \psi_1 - \left(\frac{p}{2\omega_1}\right)^2 & -\psi_1 \\ -\psi_1 & 1 - \left(\frac{3p}{2\omega_1}\right)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Z wyznaczników (2.31) i (2.32) otrzymuje się równanie opisujące trzeci obszar niestateczności

$$(2.33) \quad \frac{p}{\omega_1} = \sqrt{\frac{2}{9} \left(10 + 9\psi_1 - \sqrt{117\psi_1^2 + 144\psi_1 + 64} \right)},$$

i

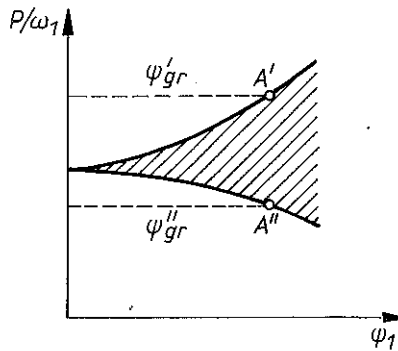
$$(2.34) \quad \frac{p}{\omega_1} = \sqrt{\frac{2}{9} \left(10 - 9\psi_1 - \sqrt{117\psi_1^2 - 144\psi_1 + 64} \right)}.$$

Drugi i trzeci obszar niestateczności przedstawiono poglądowo na rys. 4 i oznaczono literami T i $\frac{2}{3}T$.

Analizując wyprowadzone zależności można dojść do wniosku, że kolejne obszary niestateczności są coraz węższe. Najważniejszy jest pierwszy obszar (obszar główny) odpowiadający rozwiązaniu o okresie $2T$ i leżący w pobliżu $p = 2\omega_1$.

Identyczne wyniki otrzymamy analizując możliwość rezonansu parametrycznego wyższych harmoniczných, ale w tym przypadku częstość drgań swobodnych ω_n będzie odpowiednio większa, a więc większa będzie częstość p odpowiadająca możliwości powstania rezonansu parametrycznego. Podobnie ulegnie zmniejszeniu współczynnik ψ_n , a więc obszar niestateczności ulegnie zawężeniu.

Wszystkie zależności opisujące poszczególne obszary niestateczności można, na podstawie (2.12), wyrazić za pomocą sił.



Rys. 5. Linie graniczne pierwszego obszaru niestateczności

Weźmy pod uwagę punkty A' i A'' leżące na liniach granicznych pierwszego obszaru niestateczności (rys. 5). Dla punktu A' otrzymujemy

$$(2.35) \quad \frac{p}{\omega_n} = 2\sqrt{1 + \psi'_{grn}}$$

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$(2.36) \quad \alpha_n = \left(\frac{p}{2\omega_n}\right)^2$$

otrzymujemy

$$(2.37) \quad \psi'_{grn} = \alpha_n - 1.$$

Na podstawie (2.12) można współczynnik ψ'_{grn} wyrazić zależnością

$$(2.38) \quad \psi'_{grn} = \frac{F_{2grn}}{2(F_{1krn} - F_1)},$$

w wyniku czego otrzymujemy wzór opisujący F_{2grn}

$$(2.39) \quad F_{2grn} = 2(\alpha_n - 1)(F_{1krn} - F_1).$$

Z rys. 5 wynika, że stateczność pręta będzie zachowana, gdy

$$\psi < \psi'_{grn}, \quad \text{czyli gdy} \quad F_2 < F_{2grn}.$$

Obliczmy siłę maksymalną F'_{max} , jaką pręt może przenieść bez utraty stateczności (dla punktu A')

$$(2.40) \quad F'_{max} = F_1 + F_{2grn},$$

$$(2.41) \quad F'_{max} = F_1 + 2(\alpha_n - 1)(F_{1krn} - F_1).$$

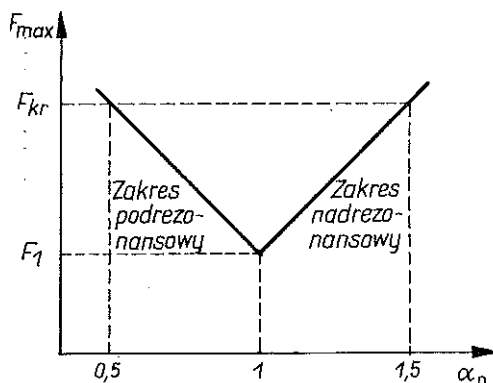
Postępując podobnie otrzymamy dla punktu A''

$$(2.42) \quad F''_{max} = F_1 + 2(1 - \alpha_n)(F_{1krn} - F_1).$$

Zauważmy, że dla $\alpha_n = 1$, $F'_{max} = F_1$, dla $\alpha_n = 1,5$, $F'_{max} = F_{1krn}$ oraz że dla $\alpha_n = 0,5$, $F'_{max} = F_{1krn}$.

Wykres zależności F'_{max} od współczynnika α_n przedstawiono na rys. 6. Z wykresów wynika, że maksymalna siła F'_{max} jest zależna od tego, czy częstość zmiany siły F_2 , czyli p leży na górnej linii granicznej, czy na dolnej (w zakresie nadrezonansowym lub podrezonansowym).

Jeżeli częstość p jest zawarta w zakresie nadrezonansowym, to jej wzrost powoduje wzrost siły maksymalnej F'_{max} , jeśli zaś częstość ta jest zawarta



Rys. 6. Wykres zależności siły maksymalnej F'_{max} od współczynnika α_n w pierwszym obszarze niestateczności

w zakresie podrezonansowym, to jej wzrost powoduje zmniejszenie siły maksymalnej F'_{\max} .

Postępując podobnie otrzymamy zależności na siły maksymalne dla drugiego obszaru niestateczności

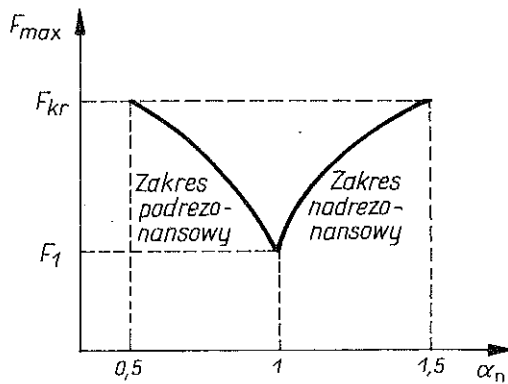
$$(2.43) \quad F'_{\max} = F_1 + \frac{1}{2}(F_{1krn} - F_1)\sqrt{(8_n - 5)^2 - 9},$$

$$(2.44) \quad F''_{\max} = F_1 + (F_{1krn} - F_1)\sqrt{2(1 - \alpha_n)},$$

gdzie

$$(2.45) \quad \alpha_n = \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2.$$

Wykres zależności F_{\max} od współczynnika α_n przedstawiono na rys. 7. Wnioski dotyczące wpływu częstości p na wartość siły maksymalnej są identyczne, jak w obszarze pierwszym.



Rys. 7. Wykres zależności siły maksymalnej F_{\max} od współczynnika α_n w drugim obszarze niestateczności

3. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

W rozdziale tym przedstawiono obliczenia pręta przekładkowego, swobodnie podpieranego, ściskanego zmienną siłą osiową F . Przyjęto następujące wymiary (rys. 3):

$$b = 25 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \quad c = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \quad t = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \quad l = 0,5 \text{ m}$$

oraz dane opisujące własności fizyczne materiału okładzin i rdzenia

$$E_t = 68,67 \cdot 10^3 \text{ MPa}, \quad G_c = 68,67 \cdot 10^3 \text{ MPa}, \quad \mu = 14,5 \cdot 10^{-2} \frac{Ns^2}{m^2}.$$

Szywność okładzin na zginanie B jest wyrażona zależnością

$$(3.1) \quad B = E_t \cdot J = 103 \text{ Nm}^2,$$

gdzie J oznacza moment bezwładności przekroju poprzecznego okładzin względem osi z (rys. 3).

Po podstawieniu $S = \infty$ otrzymano siłę krytyczną odpowiadającą nieskończonej sztywności (na ścinanie) rdzeniowi, którą oznaczono przez $F_{kr\infty}$

$$F_{kr\infty} = 4062,3 \text{ N}.$$

Z zależności (2.9) otrzymano podstawową częstość drgań swobodnych pręta przekładkowego, wynoszącą

$$\omega = 976,9 \text{ s}^{-1}.$$

Założmy $F_1 = 981 \text{ N}$ i obliczmy maksymalną siłę F_{\max} przy częstościach p leżących w I przedziale niestateczności.

Przy założeniu $\alpha = 1, 2$ otrzymujemy

$$F'_{\max} = 1992,2 \text{ N} \quad (\text{zakres nadrezonansowy}).$$

Przy założeniu $\alpha = 0,8$ otrzymujemy

$$F''_{\max} = 1992,2 \text{ N} \quad (\text{zakres podrezonansowy}).$$

W II przedziale niestateczności otrzymujemy

$$F''_{\max} = 3003,43 \text{ N} \quad (\text{zakres nadrezonansowy dla } \alpha = 1,05),$$

$$F''_{\max} = 1780,41 \text{ N} \quad (\text{zakres podrezonansowy dla } \alpha = 0,95).$$

Obliczmy przy jakim zakresie częstości p nastąpi utrata stateczności pręta, jeżeli $F_1 = 981 \text{ N}$, $F_2 = 1962 \text{ N}$.

Na podstawie zależności (2.20) otrzymujemy dla I obszaru niestateczności

$$p' = 1953,8 \text{ s}^{-1} \quad (\text{zakres nadrezonansowy}),$$

$$i \quad p'' = 1297,34 \text{ s}^{-1} \quad (\text{zakres podrezonansowy}).$$

Częstość drgań swobodnych w przedstawionym przypadku wynosi $\omega_1 = 829,18 \text{ s}^{-1}$, a siła krytyczna $F_{kr} = 3508,8 \text{ N}$.

Podobnie dla drugiego obszaru niestateczności otrzymujemy

$$p' = 848,52 \text{ s}^{-1} \quad (\text{zakres nadrezonansowy}),$$

$$i \quad p'' = 693,2 \text{ s}^{-1} \quad (\text{zakres podrezonansowy}).$$

Z przedstawionych danych wynika, że utrata stateczności pręta będzie występować przy częstościach p spełniających warunek

$$1297,34 \text{ s}^{-1} < p < 1953,8 \text{ s}^{-1} \quad (\text{I obszar niestateczności}),$$

$$693,2 \text{ s}^{-1} < p < 848,52 \text{ s}^{-1} \quad (\text{II obszar niestateczności}).$$

Opisany zakres częstości p jest najszerszy w I obszarze niestateczności, węższy w II i kolejnych wyższych obszarach niestateczności.

4. WNIOSKI

Na podstawie otrzymanych wyników można sformułować następujące wnioski:

1. W przypadku obciążenia pręta przekładkowego siłą zmienną w czasie istnieje szereg przedziałów częstości jej zmian, w których następuje utrata stateczności pręta.

2. Siła maksymalna jaką może przenieść pręt przekładkowy zależy od tego, czy częstość zmian siły ściskającej leży w zakresie podrezonansowym czy w nadrezonansowym.

3. Jeżeli częstość p zmian siły ściskającej należy do zakresu nadrezonansowego, to maksymalna siła rośnie ze wzrostem częstości p .

4. Jeżeli częstość p zmian siły ściskającej należy do zakresu podrezonansowego, to maksymalna siła jaką może przenieść pręt wzrasta ze zmniejszeniem się częstości p .

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Z. DŻYGADŁO, S. KALISKI, L. SOLARZ, E. WŁODARCZYK, *Drgania i fale*, WAT, Warszawa 1965.
2. F. ROMANÓW, L. STRICKER, J. TEISSEYRE, *Stateczność konstrukcji przekładkowych*, Skrypt Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1972.

РЕЗЮМЕ

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОКЛАДЧОГО СТЕРЖНЯ, СЖИМАЕМОГО ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ СИЛОЙ

Целью работы было проведение анализа динамической устойчивости прокладочного стержня, сжимаемого периодически изменяющейся силой. Была использована модель стержня, состоящего из двух металлических обкладок и сердечника (из пластмассы). Задача, записанная с помощью дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, была решена методом разделения переменных (метод Фурье). Решение дано в виде бесконечного ряда двух функций: $X_n(x)$, зависящих от пространственной координаты (x) , а также от $T_n(t)$, зависящих от времени (t) . Анализируя решения, выделены области устойчивой и неустойчивой работы прокладочного стержня. В результате были определены значения максимальных сжимающих сил, при которых происходит потеря устойчивости.

SUMMARY

DYNAMIC STABILITY OF A SANDWICH ROD COMPRESSED BY PERIODIC FORCE

The model of the rod considered consists of two metal faces separated by a plastic core. The partial differential equations with variable coefficients governing the problem are solved by Fourier's method to yield the solution in the form of an infinite series of two functions: $X_n(x)$ depending on spatial coordinate x and $T_n(t)$ depending on time t . Two regions of stable and unstable behaviour of the sandwich rod have been established.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA
INSTYTUT MATERIALOZNAWSTWA I MECHANIKI TECHNICZNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 maja 1988 r.
