

STABILNOŚĆ ROZWIĄZAŃ W METODZIE ELEMENTÓW ZASOPRZESTRZENNYCH

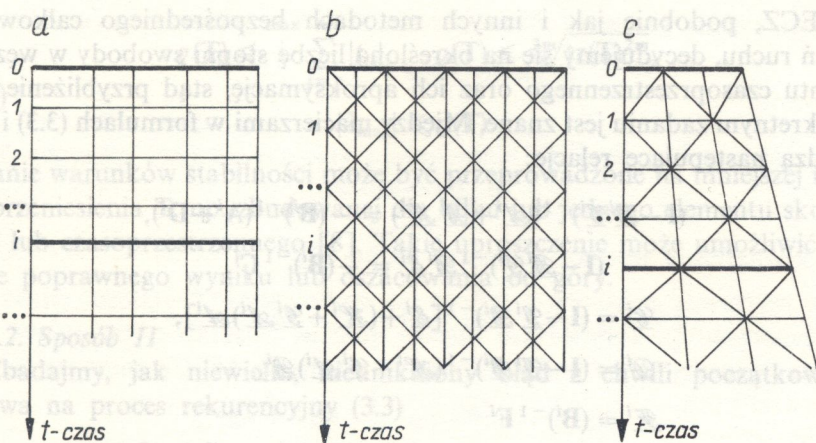
ADAM PODHORECKI (BYDGOSZCZ)

W pracy sformułowano ogólne warunki stabilności rozwiązań w metodzie elementów czasoprzestrzennych, przy założeniu dowolnych kształtów elementów czasoprzestrzennych. Założenie to umożliwia badanie stabilności różnych struktur czasoprzestrzennych dowolnie zdyskretyzowanych. Zamieszczone w pracy oszacowania znacznie upraszczają ustalenie warunków stabilności.

1. WSTĘP

Zagadnienia stabilności numerycznych metod całkowania równań ruchu były omawiane w wielu pracach (np. [1, 2, 3]). Jedynym uwzględnianym tam parametrem był krok całkowania. Metoda elementów czasoprzestrzennych MECZ sformułowana przez KĄCZKOWSKIEGO [4, 5, 6] pozwala na dużo bardziej swobodne operowanie nie tylko krokiem czasowym, lecz wszystkimi wymiarami elementu czasoprzestrzennego. Problem stabilności MECZ był podejmowany w kilku pracach [2, 3, 7, 8, 9, 10]. Ograniczono się tam jednak do stacjonarnej siatki podziału czasoprzestrzeni i stosowano wyłącznie elementy czasoprzestrzenne o kształtach prostokątnych. Takie sformułowanie MECZ podobne jest do innych znanych metod całkowania różniczkowych równań ruchu. Ostatnie doświadczenia wykazują, że największe walory MECZ występują przy stosowaniu nieprostokątnych elementów czasoprzestrzennych [11, 12, 13, 14]. Takie elementy czasoprzestrzenne o dowolnych kształtach umożliwiają przyjęcie niestacjonarnej dyskretyzacji, a tym samym na rozwiązanie szerokiej klasy zagadnień, np. ruchomy brzeg, zmieniający się obszar kontaktu. Wprowadzenie elementów czasoprzestrzennych o kształtach symplektycznych (trójkątnych, czworościennych i nadczworościennych) prowadzi bezpośrednio do trójkątnych macierzy sztywności — uzyskujemy więc w naturalny sposób ekonomiczny proces obliczeniowy.

W niniejszej pracy zostaną ustalone ogólne warunki stabilności MECZ, które mogą być stosowane do elementów czasoprzestrzennych o dowolnych kształtach.



Rys. 1

przy danych warunkach brzegowych i początkowych

$$(3.2) \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{r}^j &= \boldsymbol{\varphi}_0 \quad \text{na powierzchni granicznej } \Gamma_r, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \\ \mathbf{r}^0 &= \mathbf{f}^0 \\ \dot{\mathbf{r}}^0 &= \mathbf{g}^0 \end{aligned} \right\} \text{ w chwili początkowej } t = 0,$$

gdzie $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ i $\tilde{\mathbf{D}}$ są kwadratowymi macierzami sztywności po agregacji. Macierze te mogą być funkcjami czasu t i parametrów węzłowych siatki czasoprzestrzennej \mathbf{r} . Wektor $\tilde{\mathbf{F}}$ zawiera impulsy węzłowe.

Ogólny wzór rekurencyjny po uwzględnieniu warunków brzegowych (3.2)₁ ma następującą formę:

$$(3.3) \quad \mathbf{r}^{i+1} = [\mathbf{B}^i]^{-1} [\mathbf{F}^i - \mathbf{C}^i \mathbf{r}^{i-1} - (\mathbf{A}^i + \mathbf{D}^i) \mathbf{r}^i], \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

4. WARUNKI STABILNOŚCI

4.1. Sposób I

Sprowadzamy równanie (3.3) do innej równoważnej postaci

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{r}^{i+1} &= \mathcal{A}^i \mathbf{r}^i + \mathcal{B}^i \dot{\mathbf{r}}^i + \mathcal{F}^i, \\ \dot{\mathbf{r}}^{i+1} &= \mathcal{C}^i \mathbf{r}^i + \mathcal{D}^i \dot{\mathbf{r}}^i, \end{aligned}$$

gdzie $\dot{\mathbf{r}}$ ma wymiar prędkości przemieszczeń i może być przykładowo opisane przemieszczeniami w następujący sposób

$$(4.2) \quad \dot{\mathbf{r}}^i = \mathcal{G}^{i-1} \mathbf{r}^{i-1} + \mathcal{H}^{i-1} \dot{\mathbf{r}}^i + \mathcal{G}^{i-1} \mathbf{r}^{i+1}.$$

W MECZ, podobnie jak i innych metodach bezpośredniego całkowania równań ruchu, decydujemy się na określoną liczbę stopni swobody w węzłach elementu czasoprzestrzennego oraz ich aproksymację, stąd przybliżenie (4.2) w konkretnym zadaniu jest znane. Między macierzami w formułach (3.3) i (4.1) zachodzą następujące relacje:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathcal{B}^i \mathcal{G}^i)^{-1} (\mathcal{A}^i + \mathcal{B}^i \mathcal{H}^i) &= -(\mathbf{B}^i)^{-1} (\mathbf{A}^i + \mathbf{D}^i), \\ (\mathbf{I} - \mathcal{B}^i \mathcal{G}^i)^{-1} \mathcal{B}^i \mathcal{E}^i &= -(\mathbf{B}^i)^{-1} \mathbf{C}^i, \\ \mathcal{E}^i &= (\mathbf{I} - \mathcal{G}^i \mathcal{B}^i)^{-1} [\mathcal{E}^i + (\mathcal{H}^i + \mathcal{G}^i \mathcal{A}^i) \mathcal{A}^i], \\ \mathcal{D}^i &= (\mathbf{I} - \mathcal{G}^i \mathcal{B}^i)^{-1} (\mathcal{H}^i + \mathcal{G}^i \mathcal{A}^i) \mathcal{B}^i, \\ \mathcal{F}^i &= (\mathbf{B}^i)^{-1} \mathbf{F}^i \end{aligned}$$

(\mathbf{I} jest diagonalną macierzą jednostkową).

Formułę rekurencyjną (4.1) napiszemy w dogodnej postaci

$$(4.4) \quad \mathbf{X}^{i+1} = \mathbf{T}^i \mathbf{X}^i + \mathbf{R}^i,$$

gdzie

$$(4.5) \quad \mathbf{X}^i = [\mathbf{r}^i, \dot{\mathbf{r}}^i]^T$$

jest wektorem stanu rozwiązania w chwili i ,

$$(4.6) \quad \mathbf{T}^i = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^i & \mathcal{B}^i \\ \mathcal{E}^i & \mathcal{D}^i \end{bmatrix}$$

macierzą przeniesienia (przejścia), a

$$(4.7) \quad \mathbf{R}^i = [\mathcal{F}^i, \mathbf{O}]^T$$

wektorem wzbudzenia.

Jeżeli przyjąć, że macierz \mathbf{T}^i nie zależy od wskaźnika i , to wzór rekurencyjny (4.4) można przedstawić w równoważnej formie ([16], s. 359)

$$(4.8) \quad \mathbf{X}^n = (\mathbf{T})^n \mathbf{X}^0 + \sum_{j=1}^n (\mathbf{T})^{n-j} \mathbf{R}^{j-1}.$$

Schemat obliczeniowy (4.8) będzie stabilny, jeżeli przy danych warunkach początkowych (3.2)₂, \mathbf{X}^n pozostanie ograniczone dla $n \rightarrow \infty$. Rozwiązanie \mathbf{X}^n będzie skończone, jeżeli wszystkie wartości własne macierzy \mathbf{T} spełniają następującą nierówność [1, 17]

$$(4.9) \quad |\lambda| \leq 1.$$

Istotną częstość własną λ_{\max} można przybliżyć, wykorzystując różne oszacowania promienia spektralnego macierzy $\varrho(\mathbf{T})$, np.

$$\varrho(\mathbf{T}) \leq \max_i \sum_{j=1}^m |t_{ij}|, \quad \varrho(\mathbf{T}) \leq \sqrt[2m]{\text{tr}(\mathbf{T})^{2m}},$$

$$|\lambda_{\max}| \leq \varrho(\mathbf{T}).$$

Badanie warunków stabilności może być przeprowadzone na mniejszej macierzy przeniesienia \mathbf{T} , np. zbudowanej dla kilku lub jednego elementu skończonego lub czasoprzestrzennego [8]. Takie uproszczenie może umożliwić uzyskanie poprawnego wyniku lub oszacowania od góry.

4.2. Sposób II

Zbadajmy, jak niewielki, nieunikniony błąd z chwili początkowej δ^0 wpływa na proces rekurencyjny (3.3)

$$\mathbf{r}^0 = \delta^0, \quad \dot{\mathbf{r}}^0 = 0, \quad \mathbf{F}^i = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Stan \mathbf{r}^1 wynika z rozwiązania równania (3.1)₁

$$\mathbf{r}^1 = \mathbf{Z}^0 \delta^0,$$

gdzie

$$\mathbf{Z}^0 = -(\mathbf{B}^0)^{-1} \mathbf{A}^0$$

jest macierzą przejścia z warstwy 0 do 1.

Wprowadzony błąd δ^0 będzie miał tendencję malejącą, gdy na macierz \mathbf{Z}^0 nałożymy ograniczenia (4.9). Można teraz od góry oszacować rozwiązanie (4.12)

$$|r_k^1| \leq |\delta_k^0|, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

(N oznacza liczbę stopni swobody zdyskretyzowanej struktury przestrzennej).

Stan \mathbf{r}^2 określimy z wzoru rekurencyjnego (3.3)

$$\mathbf{r}^2 = \mathbf{Z}^1 \delta^0,$$

gdzie

$$\mathbf{Z}^1 = -(\mathbf{B}^1)^{-1} [\mathbf{C}^1 + (\mathbf{A}^1 + \mathbf{D}^1) \mathbf{Z}^0].$$

Rozwiązanie \mathbf{r}^2 będzie ograniczone, gdy macierz \mathbf{Z}^1 spełnia warunki (4.9). Postępując analogicznie dalej, ustalamy ogólną postać macierzy przeniesienia

$$\mathbf{Z}^i = -(\mathbf{B}^i)^{-1} [\mathbf{C}^i \mathbf{Z}^{i-2} + (\mathbf{A}^i + \mathbf{D}^i) \mathbf{Z}^{i-1}], \quad i = 1, 2, \dots$$

Wprowadzając oszacowane rozwiązanie

$$|r_k^i| \leq |\delta_k^0|, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots$$

do formuły rekurencyjnej (3.3), uzyskamy przybliżony opis macierzy przeniesienia

$$\mathbf{Z}^i \approx -(\mathbf{B}^i)^{-1} (\mathbf{A}^i + \mathbf{C}^i + \mathbf{D}^i), \quad i = 1, 2, \dots$$

Wartości własne macierzy Z^i muszą spełniać warunki stabilności

$$(4.19) \quad |\lambda^i| \leq 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

5. PRZYKŁADY

I. Rozpatrzmy testowe równanie ruchu [2]

$$(5.1) \quad \ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad q(t=0) = \delta^0, \quad \dot{q}(t=0) = 0.$$

Przy stacjonarnej siatce podziału (rys. 1a) równania MECZ mają postać [2]:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} (2\omega^2 h^2 - 6)r^0 + (\omega^2 h^2 + 6)r^1 &= 6hr^0, \\ (\omega^2 h + 6)r^{i-1} + (4\omega^2 h^2 - 12)r^i + (\omega^2 h^2 + 6)r^{i+1} &= 0, \\ \dot{r}^0 &= 0, \quad r^0 = \delta^0, \quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

gdzie h oznacza krok całkowania.

Stosując oznaczenia (3.1) lub (3.3) mamy

$$(5.3) \quad \begin{aligned} A^i &= D^i = 2(\omega h)^2 - 6, \\ B^i &= C^i = (\omega h)^2 + 6, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Sposób 1. Współczynniki opisujące \dot{r} (4.2) przyjmujemy w następującej postaci

$$(5.4) \quad \underline{\mathcal{E}}^i = -\frac{1}{h}, \quad \underline{\mathcal{H}}^i = \frac{1}{h}, \quad \underline{\mathcal{G}}^i = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Opis (5.4) odpowiada jednostronnej różnicy skończonej.

Następnie z relacji (4.3) ustalamy elementy macierzy przeniesienia

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \underline{\mathcal{A}}^i &= 2s - 1, \\ \underline{\mathcal{B}}^i &= h, \\ \underline{\mathcal{C}}^i &= \frac{2}{h}(s - 1), \quad s = \frac{6 - 2(\omega h)^2}{6 + (\omega h)^2}, \\ \underline{\mathcal{D}}^i &= 1. \end{aligned}$$

Macierz przejścia przyjmuje zatem postać (4.6)

$$(5.6) \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2s - 1 & h \\ \frac{2}{h}(s - 1) & 1 \end{bmatrix}.$$

Wartości własne macierzy T (5.6) określa wzór

$$(5.7) \quad \lambda_{1,2} = s \pm i\sqrt{(s)^2 - 1}$$

(i – jednostka urojona).

Z warunku (4.9) uzyskujemy ograniczenie na krok całkowania

$$(5.8) \quad h \leq \frac{\sqrt{12}}{\omega}.$$

Uzyskany rezultat (5.8) jest całkowicie zgodny z wynikiem zawartym w pracy [2]. Warto też podkreślić, że inny sposób przybliżania aproksymacji \hat{r} , np.

$$\underline{e}^i = -\frac{1}{2h},$$

$$(5.9) \quad \underline{g}^i = 0,$$

$$\underline{h}^i = \frac{1}{2h}$$

proceedzi także do wyniku (5.8).

Sposób 2. Macierz przejścia Z^0 (4.13) składa się z jednego elementu

$$(5.10) \quad Z^0 = s.$$

Ograniczenie (4.19) oznacza tutaj

$$(5.11) \quad |s| \leq 1,$$

co dalej prowadzi do rezultatu (5.8).

Podobnie postępując z następującymi macierzami Z^i (4.18) uzyskujemy identyczny wynik (5.8). Jeżeli skorzystamy z przybliżonego wzoru na macierz przejścia (4.18)

$$(5.12) \quad Z^i = \frac{6 - 5(\omega h)^2}{(\omega h)^2 + 6},$$

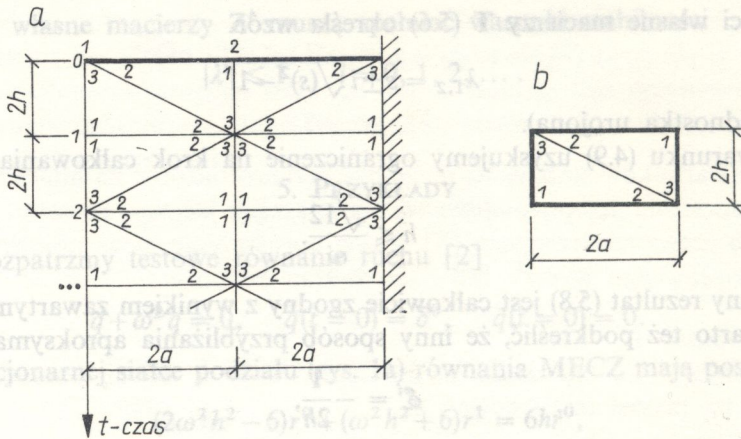
to uzyskamy ostrzejszy warunek na krok całkowania

$$(5.13) \quad h \leq \frac{\sqrt{3}}{\omega}.$$

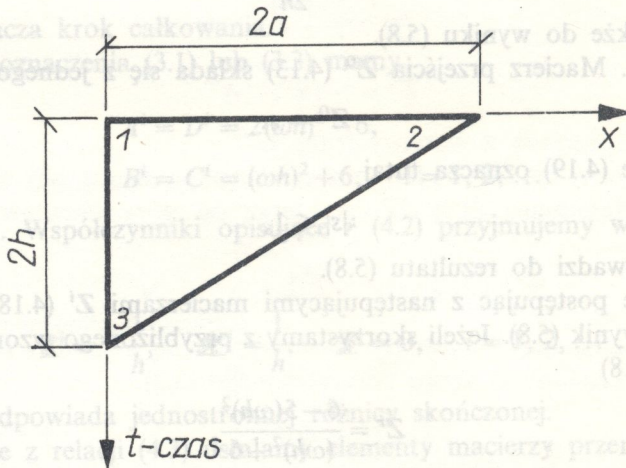
Porównując rezultaty (5.8) i (5.13) stwierdzamy, że przybliżenie (4.18) stanowi oszacowanie od góry.

II. Zbadajmy stabilność równań MECZ opisujących drgania podłużne pręta o sztywności EA i masie ρA . Dyskretyzacja obszaru czasoprzestrzennego widoczna jest na rys. 2a. Pojawia się tutaj element trójkątny (rys. 3). Macierz kształtu zawiera funkcje liniowe

$$(5.14) \quad N_e = \left[1 - \frac{x}{2a} - \frac{t}{2h}, \frac{x}{2a}, \frac{t}{2h} \right].$$



Rys. 2



Rys. 3

Wykonując na tej macierzy operację różniczkowania (por. [5])

$$(5.15) \quad \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \mathbf{N}_e,$$

uzyskujemy

$$(5.16) \quad \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} & 0 \\ -\frac{1}{2h} & 0 & \frac{1}{2h} \end{bmatrix}$$

Macierz sprężystości czasoprzestrzennej ma postać (por. [5])

$$(5.17) \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & -\rho A \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności elementu czasoprzestrzennego znajdujemy na podstawie ogólnego wzoru

$$(5.18) \quad \mathbf{K}_e = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega = \frac{EAh}{2a} \begin{bmatrix} 1-\kappa^2 & -1 & \kappa^2 \\ -1 & 1 & 0 \\ \kappa^2 & 0 & -\kappa^2 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(5.19) \quad \kappa = \frac{a}{hc}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Macierze \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} i \mathbf{D} (3.3) nie zależą od wskaźnika i

$$(5.20) \quad \mathbf{A} = \mathbf{D} = \frac{EAh}{2a} \begin{bmatrix} 1-\kappa^2 & -1 \\ -1 & 2(1-\kappa^2) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{C} = \frac{EAh}{2a} \begin{bmatrix} \kappa^2 & 0 \\ 0 & 2\kappa^2 \end{bmatrix}.$$

Analizę stabilności przeprowadzimy wg sposobu 2. Macierz przejścia \mathbf{Z}^0 z warstwy 0 do 1 ma postać (4.13)

$$(5.21) \quad \mathbf{Z}^0 = -\frac{1}{\kappa^2} \begin{bmatrix} 1-\kappa^2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1-\kappa^2 \end{bmatrix}.$$

Ograniczenie na wartości własne (4.19) prowadzi do warunku stabilności

$$(5.22) \quad \kappa^2 \geq \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

lub po wykorzystaniu (5.19)

$$(5.23) \quad \left(\frac{h}{a}\right)^2 \leq \frac{4\rho}{(2-\sqrt{2})E} = 6,8284 \frac{\rho}{E}.$$

Analizując wartości własne innych macierzy \mathbf{Z}^i określonych wzorem (4.18), zawsze dochodzimy do warunku (5.22) lub (5.23).

Rozpatrzmy jeszcze swobodny superelement (rys. 2b) będący składnikiem

zdyskretyzowanej czasoprzestrzeni (rys. 2a). Macierze **A**, **B**, **C** i **D** wyrażają się w postaci

$$(5.24) \quad \begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{D} &= \frac{EAh}{2a} \begin{bmatrix} 1 - \kappa^2 & -1 \\ -1 & 1 - \kappa^2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B} = \mathbf{C} &= \frac{EAh}{2a} \begin{bmatrix} \kappa^2 & 0 \\ 0 & \kappa^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Macierz przejścia \mathbf{Z}^0 (4.13) ma strukturę symetryczną względem głównej przekątnej

$$(5.25) \quad \mathbf{Z}^0 = -\frac{1}{\kappa^2} \begin{bmatrix} 1 - \kappa^2 & 1 \\ 1 & 1 - \kappa^2 \end{bmatrix}.$$

Warunek (4.22) prowadzi do rezultatu

$$(5.26) \quad \kappa^2 \geq 1$$

lub

$$(5.27) \quad \left(\frac{h}{a}\right)^2 \leq \frac{\rho}{E}.$$

Ograniczenie na wymiary elementu czasoprzestrzennego (5.27) jest warunkiem ostrzejszym od (5.23), czego należało oczekiwać (por. [8]). Oznacza to, że warunki stabilności wyprowadzone dla swobodnego superelementu lub jednego elementu zawsze spełniają warunki stabilności dla analizowanej struktury czasoprzestrzennej.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. K. BATHE, E. WILSON, *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice-Hall, New Jersey 1976.
2. J. LANGER, *Trumienie pasożytnicze w komputerowych rozwiązaniach równań ruchu*, Arch. Inż. Łąd., **25**, 3, 359-369, 1979.
3. T. LEWIŃSKI, *Stability analysis of a difference scheme for the vibration equation with a finite number of degrees of freedom*, Zast. Matem., **18**, 3, 473-486, 1984.
4. Z. KĄCZKOWSKI, *The method of finite space-time elements in dynamics of structures*, J. Tech. Phys., **16**, 1, 69-84, 1975.
5. Z. KĄCZKOWSKI, *Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych*, Arch. Inż. Łąd., **22**, 3, 365-378, 1976.
6. Z. KĄCZKOWSKI, *General formulation of the stiffness matrix for the space-time finite elements*, Arch. Inż. Łąd., **25**, 3, 351-357, 1979.
7. W. CYGANECKI, *Kryterium doboru wymiarów elementu czasoprzestrzennego*, Arch. Inż. Łąd., **25**, 3, 389-397, 1979.
8. W. CYGANECKI, *O sposobach doboru wymiarów elementu czasoprzestrzennego*, Arch. Inż. Łąd., **26**, 4, 717-726, 1980.

9. Z. KACPRZYK, T. LEWIŃSKI, *Comparison of some numerical integration methods for the equations of motion of systems with a finite number of degrees of freedom*, Rozpr. Inż., **31**, 2, 213-240, 1983.
10. J. PELC, *Nieliniowe funkcje kształtu w metodzie elementów czasoprzestrzennych*, Arch. Inż. Łąd., **30**, 1, 53-63, 1984.
11. Z. KĄCZKOWSKI, *O stosowaniu nieprostokątnych elementów czasoprzestrzennych*, Mech. Teor. Stos., **21**, 4, 531-542, 1983.
12. M. WITKOWSKI, *Trójkątne elementy czasoprzestrzenne w analizie zagadnień falowych*, Rozpr., Inż., **33**, 4, 549-564, 1985.
13. Z. KĄCZKOWSKI, *Niesprężone układy równań w metodzie elementów czasoprzestrzennych* MECZ, Arch. Inż. Łąd., **32**, 1, 39-50, 1986.
14. Cz. BAJER, *Triangular and tetrahedral space-time finite elements in vibration analysis*, Int. J. Num. Methods Eng., **23**, 2031-2048, 1986.
15. J. JANKOWSKA, M. JANKOWSKI, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, WNT, Warszawa 1981.
16. G. DAHLQUIST, Å BJÖRCK, *Metody numeryczne*, PWN, Warszawa 1983.
17. J. LEGRAS, *Praktyczne metody analizy numerycznej*, WNT, Warszawa 1974.

РЕЗЮМЕ

СТАБИЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЙ В МЕТОДЕ
ВРЕМЕНИ-ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В работе сформулированы общие условия стабильности решений в методе времени-пространственных элементов, при предположении произвольных форм времени-пространственных элементов. Это предположение дает возможность исследовать стабильности разных времени-пространственных структур произвольно дискретизированных. Помещенные в работе оценки значительно упрощают установление условий стабильности.

SUMMARY

STABILITY OF SOLUTIONS IN THE TIME-SPACE ELEMENT METHOD

General conditions of solution stability are formulated for the time-space element method under arbitrarily assumed form of the time-space elements. This assumption enables the stability analysis of various time-space structures under arbitrary discretization. The estimates given in the paper facilitate the formulation of the stability conditions.

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA, BYDGOSZCZ

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 listopada 1987 r.