

## OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE PRZEKROJÓW DWUKOMOROWYCH

TERESA GIB CZ YŃ S K A, PIOTR B E R E Z A, (RZESZÓW)  
VINCENZO F R A N C I O S I (NEAPOL)

W pracy przedstawiono optymalizację ze względu na ciężar dźwigara, o przekroju dwukomorowym, poddanego zginaniu ze skręcaniem. Przeprowadzono analizę porównawczą otrzymanych wymiarów przekroju z optymalnymi wymiarami przekroju skrzynkowego obciążonego takim samym układem uogólnionych sił.

### 1. WSTĘP

Jednym z wielu możliwych rozwiązań konstrukcyjnych belek są belki wieloskrzynkowe. Wyznaczenie wartości naprężeń działających w ściankach przekroju wielokomorowego wymaga żmudnych obliczeń, zwłaszcza w przypadku obciążeń złożonych. Przekroje takie są układami statycznie niewyznaczalnymi, przy czym liczba poszukiwanych wielkości hiperstatycznych zależy od liczby komór.

Metody rozwiązywania tego typu przekrojów omówiono w pracach [3,4 i 5]. Ponadto w pracy [1] wyznaczono maksymalne obciążenia dla przekrojów o danych parametrach geometrycznych, tak dla zakresu sprężystego jak i dla zakresu plastycznego. Brano pod uwagę jedynie warunek wytrzymałości, nie uwzględniając warunków stateczności lokalnej poszczególnych ścianek.

W praktyce inżynierskiej obciążenia konstrukcji są najczęściej znane, a przedmiotem poszukiwań są wielkości geometryczne charakteryzujące daną konstrukcję. W przypadku przekroju wielokomorowego racjonalny dobór parametrów geometrycznych wymaga wielokrotnego powtarzania obliczeń. W związku z tym opracowano metodę optymalnego

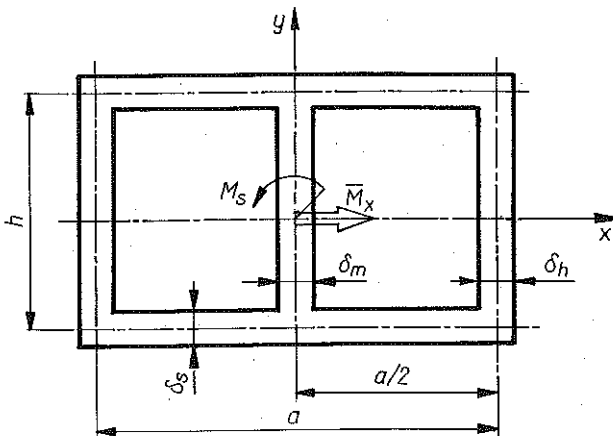
kształtowania przekroju ze względu na minimum jego pola powierzchni. W rozważaniach wzięto pod uwagę przekrój dwukomorowy, który można traktować jako przypadek graniczny dla przekrojów o większej liczbie komór. Jako obciążenie przyjęto moment zginający i moment skręcający.

## 2. SFORMUŁOWANIE FUNKCJI CELU I WARUNKÓW OGRANICZAJĄCYCH

W rozważaniach przyjmiemy model przekroju i obciążeń przedstawiony na rys.1, gdzie  $h$  oznacza wysokość przekroju,  $a$  – szerokość przekroju,  $\delta_h$  – grubość środnika zewnętrznego,  $\delta_s$  – grubość pasa,  $\delta_m$  – grubość środnika wewnętrznego,  $M_x$  – moment zginający oraz  $M_s$  – moment skręcający. Jak wspomniano we wstępie, jako funkcję celu przyjmujemy pole powierzchni przekroju  $F$

$$(2.1) \quad F = F(a, h, \delta_h, \delta_s, \delta_m) = 2(a\delta_s + h\delta_h) + h\delta_m$$

z dokładnością do małej drugiego rzędu  $\delta_s\delta_m$ .



Rys. 1

Wprowadzamy dodatkowo następujące wielkości bezwymiarowe charakteryzujące przekrój:

$$(2.2) \quad \gamma = \frac{a}{h}, \quad \beta = \frac{\delta_s}{h}, \quad \delta = \frac{h\delta_h}{a\delta_s}, \quad \xi = \frac{h\delta_m}{2a\delta_s}$$

Zgodnie z oznaczeniami (2.2) funkcja celu przyjmie następującą postać:

$$(2.3) \quad F = F(h, \beta, \gamma, \delta, \xi) = 2h^2(1 + \delta + \xi)\beta\gamma$$

Przekrój winien spełniać warunki wytrzymałości, a ponadto ze względu na to, że ścianki są cienkościenne, winny być zachowane warunki stateczności lokalnej. Warunki te stanowiąc będą ograniczenia w zadaniu optymalizacji funkcji  $F$ . Warunki te są następujące:

$$(2.4) \quad \frac{1}{\sigma_0^2} (\sigma_s^2 + 3\tau_s^2) \leq 1,$$

$$(2.5) \quad \frac{1}{\sigma_0^2} (\sigma_h^2 + 3\tau_h^2) \leq 1,$$

$$(2.6) \quad \frac{\sigma_s}{\sigma_{ks}} + \left[ \frac{\tau_s}{\tau_{ks}} \right]^2 \leq 1,$$

$$(2.7) \quad \left[ \frac{\sigma_h}{\sigma_{kh}} \right]^2 + \left[ \frac{\tau_h}{\tau_{kh}} \right]^2 \leq 1,$$

$$(2.8) \quad \frac{\sigma_h}{\sigma_{km}} \leq 1.$$

Nierówności (2.4) i (2.6) przedstawiają odpowiednio warunki wytrzymałości i stateczności pasa; nierówności (2.5) i (2.7) warunki wytrzymałości i stateczności środka zewnętrznego, natomiast nierówność (2.8) - warunek stateczności środka wewnętrznego. W środku tym naprężenia ścinające są równe zero, wobec czego na skutek spełnienia warunku (2.5), warunek wytrzymałości będzie dla tego środka również spełniony. W nierównościach (2.4) - (2.8) przez  $\sigma_s$ ,  $\sigma_h$  oznaczono maksymalne naprężenia normalne występujące odpowiednio w pasie i środku,  $\sigma_0$  oznacza dopuszczalne naprężenia zginające,  $\sigma_{ks}$ ,  $\sigma_{kh}$  i  $\sigma_{km}$  - krytyczną wartość naprężeń normalnych odpowiednio dla ściskanego pasa i zginanych środków zewnętrznego i wewnętrznego oraz  $\tau_{ks}$  i  $\tau_{kh}$  - krytyczną wartość naprężeń stycznych dla pasa i środka.

Maksymalne naprężenia normalne dla pasa i środka wyznaczamy odpowiednio ze wzorów

$$(2.9) \quad \sigma_s = \frac{M_x(h + \delta_s)}{2J_x} \quad \sigma_h = \frac{M_x(h - \delta_s)}{2J_x}.$$

Do dalszych obliczeń, biorąc pod uwagę niewielką różnicę między  $\sigma_s$  i  $\sigma_h$ , przyjmujemy przybliżoną wartość naprężeń normalnych jako jednakową dla pasa i środka, i równą

$$(2.10) \quad \sigma_s = \frac{M_x h}{2J_x} = \frac{M_x}{W_x},$$

gdzie

$$(2.11) \quad W_x = \frac{h^3}{3} (3 + \delta + \xi) \beta \gamma .$$

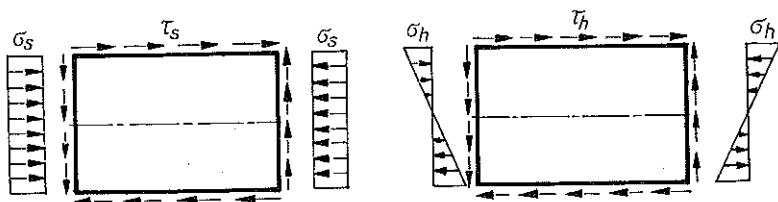
Naprężenia tnące, pochodzące od momentu skręcającego  $M_s$ , wyznaczmy na podstawie wzorów Bredta odpowiednio dla pasa i środniaka [5]:

$$(2.12) \quad \tau_s = \frac{M_s}{W_s} ,$$

$$(2.13) \quad \tau_h = \frac{M_s}{W_h} ,$$

przy czym

$$(2.14) \quad W_s = 2h^3\beta\gamma , \quad W_h = 2h^3\beta\gamma^2\delta .$$



Rys. 2

Podczas wyznaczania naprężeń stycznych i normalnych pominięto naprężenia powstające na skutek deplanacji przekroju, tzn. naprężenia normalne pochodzące od bimomentu giętno-skrętnego oraz naprężenia styczne od momentu giętno-skrętnego, czyli założono skręcanie swobodne.

Pasy oraz środki potraktowano jako płyty swobodnie podparte na czterech brzegach, obciążone w sposób następujący: pas górny - siłami ściskającymi wzdłuż dwu krawędzi oraz siłami stycznymi, środek - momentem zginającym oraz siłami stycznymi. Obciążenie pasa i środniaka przedstawiono na rys.2.

Naprężenia krytyczne, w przypadku działania tylko jednego z obciążeń, wyznaczamy ze wzoru [6]:

dla pasa górnego

$$(2.15) \quad \sigma_{ks} = k_s D \left[ \frac{2\delta_s}{a} \right]^2 = 4k_s D \left[ \frac{\beta}{\gamma} \right]^2 ,$$

$$(2.16) \quad \tau_{ks} = k_{st}D \left[ \frac{2\delta_s}{a} \right]^2 = 4k_{st}D \left[ \frac{\beta}{\gamma} \right]^2 ;$$

dla średnika zewnętrznego

$$(2.17) \quad \sigma_{kh} = k_h D \left[ \frac{\delta_h}{h} \right]^2 = k_h D (\beta\gamma\delta)^2 ,$$

$$(2.18) \quad \tau_{kh} = k_{ht}D \left[ \frac{\delta_h}{h} \right]^2 = k_{ht}D (\beta\gamma\delta)^2 ;$$

dla średnika wewnętrznego

$$(2.19) \quad \sigma_{km} = k_h D \left[ \frac{\delta_m}{h} \right]^2 = 4k_h D (\beta\gamma\xi)^2 ,$$

gdzie

$$D = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} ,$$

$k_s, k_h, k_{st}, k_{ht}$  oznaczają odpowiednio współczynniki liczbowe zależne od ilorazu długości płyt do ich szerokości.

Ograniczenia (2.4)-(2.8), po uwzględnieniu związków (2.10)-(2.19) przyjmą następującą postać:

$$(2.20) \quad g_1 = \frac{1}{\sigma_0^2} \left[ \frac{9M_x^2}{h^6\beta^2\gamma^2(3+\delta+\xi)^2} + \frac{3M_s^2}{4h^6\beta^2\gamma^2} \right] - x_1 = 0 ,$$

$$(2.21) \quad g_2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \left[ \frac{9M_x^2}{h^6\beta^2\gamma^2(3+\delta+\xi)^2} + \frac{3M_s^2}{4h^6\beta^2\gamma^4\delta^2} \right] - x_2 = 0 ,$$

$$(2.22) \quad g_3 = \frac{3M_x\gamma}{A_1 h^3 \beta^3 (3+\delta+\xi)} + \frac{M_s^2 \gamma^2}{4h^6 \beta^6 A_2^2} - x_3 = 0 ,$$

$$(2.23) \quad g_4 = \frac{9M_x^2}{B_1^2 h^6 (3+\delta+\xi)^2 \beta^6 \gamma^6 \delta^4} + \frac{M_s^2}{4B_2^2 h^6 \beta^6 \gamma^8 \delta^6} - x_4 = 0 ,$$

$$(2.24) \quad g_5 = \frac{3M_x}{4B_1 h^3 (3+\delta+\xi) \beta^3 \gamma^3 \xi^2} - x_5 = 0 ,$$

gdzie przez  $A_1, A_2, B_1, B_2$  oznaczono następujące stałe:

$$(2.25) \quad A_1 = 4k_s D, \quad A_2 = 4k_{st} D, \quad B_1 = k_h D, \quad B_2 = k_{ht} D,$$

natomiast wielkości  $x_i$ ;  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  spełniają nierówność

$$(2.26) \quad 0 \leq x_i \leq 1.$$

Zauważmy, że ograniczenie  $g_1$  (2.20) różni się od ograniczenia  $g_2$  (2.21) jedynie iloczynem  $(\gamma\delta)^2$  występującym w mianowniku drugiego składnika nierówności (2.21). Tak więc w przypadku gdy  $\gamma\delta = 1$ , ograniczenia  $g_1$  i  $g_2$  będą identyczne.

### 3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Rozpatrzmy najpierw czyste zginanie, które stanowi przypadek graniczny w rozważanym układzie obciążeń. W przypadku czystego zginania, tzn. dla  $M_s = 0$ , ograniczenia (2.20) - (2.25) będą miały znacznie prostszą postać, przy czym wobec  $\tau_s = \tau_h = 0$  (porównaj (2.4) i (2.5)) ograniczenia  $g_1$  i  $g_2$  zostaną zastąpione jednym:

$$(3.1) \quad g_1 = \frac{3M_x}{\sigma_0 h^3 \beta \gamma (3 + \delta + \xi)} - x_1 = 0 ,$$

$$(3.2) \quad g_2 = \frac{3M_x \gamma}{A_1 h^3 \beta^3 (3 + \delta + \xi)} - x_2 = 0 ,$$

$$(3.3) \quad g_3 = \frac{3M_x}{B_1 h^3 \beta^3 \gamma^3 \delta^2 (3 + \delta + \xi)} - x_3 = 0 ,$$

$$(3.4) \quad g_4 = \frac{3M_x}{4B_1 h^3 \beta^3 \gamma^3 \xi^2 (3 + \delta + \xi)} - x_4 = 0 .$$

Problem tak sformułowany można rozwiązać analitycznie. Z ograniczenia (3.1) obliczymy iloczyn

$$(3.5) \quad \beta \gamma = \frac{3M_x}{\sigma_0 x_1 h^3 (3 + \delta + \xi)} .$$

Wstawiając wyznaczoną wielkość do ograniczenia (3.3) uzyskać można wysokość przekroju  $h$ .

$$(3.6) \quad h = \frac{(3M_x)^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{1}{6}} B_1^{\frac{1}{6}} \delta^{\frac{1}{3}}}{\sigma_0^{\frac{1}{3}} x_1^{\frac{1}{2}} (3 + \delta + \xi)^{\frac{1}{3}}} .$$

Następnie wykorzystując ograniczenia (3.3) i (3.4) określimy wielkość  $\xi$

$$(3.7) \quad \xi = \frac{\delta x_3}{2x_4} .$$

Wobec powyższego funkcję celu można przedstawić jako funkcję wielkości  $\delta$  oraz  $x_1$ ,  $x_3$  i  $x_4$ :

$$(3.8) \quad F = C \frac{2x_4 + \delta(2x_4 + x_3)}{[6x_4 + \delta(2x_4 + x_3)]^{\frac{2}{3}} \delta^{\frac{1}{3}} x_4^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{1}{6}} x_1^{\frac{1}{2}}}.$$

Z kształtu funkcji  $F$  wynika, że infimum osiągnie dla  $x_1 = 1$ . Jeżeli założymy taki sam stopień zabezpieczenia przed utratą stateczności dla środka zewnętrznego i wewnętrznego, tzn. gdy przyjmiemy  $x_3 = x_4$ , również osiągnie ona minimum dla  $x_3 = x_4 = 1$ . Wzór określający pole powierzchni przekroju przyjmie więc postać:

$$(3.9) \quad F = C \frac{2 + 3\delta}{(6 + 3\delta)^{\frac{2}{3}} \delta^{\frac{1}{3}}}.$$

Problem został sprowadzony do minimalizacji funkcji bez ograniczeń. Ograniczenie (3.2) służyć będzie jedynie do wyznaczania wielkości  $\gamma$ .

Różniczkując funkcję  $F$  (3.9) względem  $\delta$  i przyrównując do zera otrzymujemy wartość  $\delta$  minimalizującą pole powierzchni przekroju

$$(3.10) \quad \delta = \frac{2}{3}.$$

Wstawiając wyznaczone zależności do ograniczenia (3.2) i przyjmując  $x_2 = 1$  wyznaczymy

$$(3.11) \quad \gamma = \left[ \frac{A_1}{B_1} \right]^{\frac{1}{4}} \left[ \frac{1}{\delta} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Uwzględniając zależności (2.2) i (2.25) można przedstawić wzory określające wszystkie wymiary przekroju

$$(3.12) \quad h = \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{48^{\frac{1}{6}} \sigma_0^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{Ek_h M_x}{1 - \nu^2} \right]^{\frac{1}{6}},$$

$$(3.13) \quad a = \frac{3^{\frac{1}{3}} \pi^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}} \sigma_0^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{k_s}{k_h} \right]^{\frac{1}{4}} \left[ \frac{Ek_h M_x^2}{1 - \nu^2} \right]^{\frac{1}{6}},$$

$$(3.14) \quad \delta_h = \frac{6^{\frac{1}{9}}}{\pi^{\frac{2}{3}} k_h^{\frac{1}{3}}} \left[ \frac{(1 - \nu^2) M_x}{E} \right]^{\frac{1}{3}},$$

$$(3.15) \quad \delta_s = \frac{3^{\frac{5}{6}}}{2^{\frac{2}{3}} \pi^{\frac{2}{3}} k_s^{\frac{1}{4}} k_h^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{(1 - \nu^2) M_x}{E} \right]^{\frac{1}{3}},$$

$$(3.16) \quad \delta_m = \delta_h.$$

Przystępując do rozwiązania problemu przy obciążeniach złożonych wielkości  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  występujące w ograniczeniach (2.20) - (2.24) traktować będziemy jako odwrotności współczynników pewności i przyjmujemy, że są one równe jedności. Odpowiada to maksymalnemu wykorzystaniu materiału, co jest zgodne z zadaniem minimalizacji pola przekroju.

Jak wcześniej wspomniano, ograniczenia (2.20) i (2.21) będą identyczne gdy  $\gamma\delta = 1$ . Rozważmy więc dwa przypadki:

1.  $\gamma\delta < 1$ . Ograniczenie  $g_2$  jest wówczas aktywne, natomiast  $g_1$  nieistotne. W tym przypadku optymalizacja sprowadza się do minimalizacji funkcji celu przy ograniczeniach  $g_2, g_3, g_4$  i  $g_5$ .

2.  $\gamma\delta \geq 1$ . Ograniczenie  $g_1$  jest aktywne,  $g_2$  nieistotne, a więc w rozwiązaniu należy uwzględnić ograniczenia  $g_1, g_3, g_4$  i  $g_5$ .

Rozpatrzmy najpierw przypadek pierwszy. Wielkości wyznaczone dla tego przypadku oznaczymy indeksem I.

Dzieląc stronami równanie (2.21) przez (2.23) oraz odpowiednio przekształcając, otrzymamy

$$(3.17) \quad (\beta\gamma)_I = \left[ \frac{\sigma_0}{B_1} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\delta} \left[ \frac{1 + (m_i \delta_1 b)^2}{1 + 3m_i^2 \delta_1^2} \right]^{\frac{1}{4}},$$

gdzie

$$(3.18) \quad b = \frac{B_1}{B_2}, \quad m_i = \frac{M_s}{6M_x}, \quad \delta_1 = \frac{3 + \delta + \xi}{\gamma \delta}.$$

Podstawiając wyrażenie (3.17) do (2.21) wyznaczmy wysokość przekroju.

$$(3.19) \quad (h)_I = \frac{(3M_x)^{\frac{1}{3}} B_1^{\frac{1}{6}} \delta^{\frac{1}{3}} (1 + 3m_i^2 \delta_1^2)^{\frac{1}{4}}}{\sigma_0^{\frac{1}{2}} (3 + \delta + \xi)^{\frac{1}{3}} [1 + (m_i \delta_1 b)^2]^{\frac{1}{12}}}.$$

Z ograniczenia (2.24), po uwzględnieniu (3.17) i (3.19), wyznaczmy wielkość  $\xi$ :

$$(3.20) \quad \xi = \frac{\delta}{2 [1 + (m_i \delta_1 b)^2]^{\frac{1}{4}}}.$$

Wielkości tej nie opatrujemy indeksem I gdyż jak się dalej okaże, w drugim przypadku ma ona taką samą postać. Jakkolwiek wyznaczono wielkość  $\xi = \xi(\delta, \delta_1)$ , aby nie komplikować i tak złożonego zapisu funkcji celu, przedstawimy ją w funkcji tej wielkości:

$$(3.21) \quad (F)_I = C \frac{(1 + \delta + \xi)(1 + 3m_i^2 \delta_1^2)^{\frac{1}{4}} [1 + (m_i \delta_1 b)^2]^{\frac{1}{12}}}{\delta^{\frac{1}{3}} (3 + \delta + \xi)^{\frac{2}{3}}}.$$



Pozostałe, niewykorzystane dotychczas ograniczenie  $g_3$  (2.22), po uwzględnieniu wzorów (3.17), (3.18) i (3.19) można przedstawić w postaci

$$(3.22) \quad \frac{B_1(3 + \delta + \xi)^4}{A_1 [1 + (m_t \delta_1 b)^2]^{\frac{1}{2}} \delta^2 \delta_1^4} + \left[ \frac{B_1}{A_2} \right]^2 \frac{m_t(3 + \delta + \xi)^{10}}{[1 + (m_t \delta_1 b)^2] \delta^4 \delta_1^8} - 1 = 0 .$$

Otrzymaliśmy zatem funkcję celu z dwiema zmiennymi decyzyjnymi  $\delta$  i  $\delta_1$  (3.21) oraz jedno ograniczenie (3.22). Analogicznie postępujemy w przypadku drugim, tj. gdy  $\gamma\delta \geq 1$ . Kolejno wyprowadzane wzory przedstawiają się następująco:

$$(3.23) \quad (\beta\gamma)_{II} = \left[ \frac{\sigma_0}{B_1} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\delta} \left[ \frac{1 + (m_t \delta_1 b)^2}{1 + 3m_t^2 \delta_1^2 (\gamma\delta)^2} \right]^{\frac{1}{4}} ,$$

$$(3.24) \quad (h)_{II} = \frac{(3M_x)^{\frac{1}{3}} B_1^{\frac{1}{3}} \delta^{\frac{1}{3}} [1 + 3m_t^2 \delta_1^2 (\gamma\delta)^2]^{\frac{1}{4}}}{\sigma_0^{\frac{1}{2}} (3 + \delta + \xi)^{\frac{1}{3}} [1 + (m_t \delta_1 b)^2]^{\frac{1}{12}}} ,$$

$$(3.25) \quad (F)_{II} = C \frac{(1 + \delta + \xi) [1 + 3m_t^2 \delta_1^2 (\gamma\delta)^2]^{\frac{1}{4}} [1 + (m_t \delta_1 b)^2]^{\frac{1}{12}}}{\delta^{\frac{1}{3}} (3 + \delta + \xi)^{\frac{2}{3}}} .$$

Zarówno  $\xi$  jak i ograniczenie  $g_3$  są określone wzorami identycznymi jak dla przypadku pierwszego, tj. dla  $\gamma\delta < 1$ . Otrzymaliśmy jedynie nową postać funkcji celu.

Problem przekształcony do takiej postaci jest nadal złożony, daje się jednak rozwiązać numerycznie. W tym celu utworzono algorytm obliczeń, a następnie opracowano program komputerowy.

#### 4. ALGORYTM OBLICZEŃ

Idea rozwiązania numerycznego przedstawia się następująco:

1. Wprowadzane przez operatora wielkości obciążenia, tj. wartości momentów  $M_s$  i  $M_x$  oraz oczekiwanej dokładności obliczeń  $N$ .
2. Przyjęcie początkowej (startowej) wartości  $\delta$ , większej od oczekiwanej wartości optymalnej.
3. Dla określonej wartości  $\delta$  wyliczenie  $\delta_1$  na podstawie ograniczenia (3.23).
4. Wyliczenie wielkości  $\xi$  ze wzoru (3.20).
5. Określenie iloczynu  $\gamma\delta$  na podstawie wzoru (3.18).

6. Obliczenie wartości funkcji celu ze wzoru (3.21) lub (3.25) zależnie od wartości  $\gamma\delta$ .

7. Jeśli wartość funkcji celu jest mniejsza od dotychczas wyznaczonych, zostaje ona zapamiętana wraz z wielkościami  $\delta$ ,  $\delta_1$ ,  $\gamma\delta$  i  $\xi$ .

8. Zmniejszenie  $\delta$  o krok  $s$ .

9. Jeśli  $\delta < 0$ , podstawienie za  $\delta$  wartości  $\delta$  odpowiadającej najmniejszej wartości funkcji celu z dotychczas wyznaczonych, powiększonej o krok  $s$ .

10. Dziesięciokrotne zmniejszenie kroku  $s$ .

11. Jeśli dokładność obliczeń jest mniejsza od przyjętej powrót do punktu nr 3.

12. Wyznaczenie wymiarów i pola powierzchni przekroju, po podaniu przez operatora wartości  $E$ ,  $\nu$  oraz  $\sigma_0$ , z następujących zależności:

jeśli  $\gamma\delta < 1$

$$(4.1) \quad h = \left[ \frac{(1,6875)^{\frac{1}{6}} \delta^{\frac{2}{3}} B_1^{\frac{1}{3}} (12M_x^2 + M_s^2 \delta_1^2)^{\frac{1}{2}}}{\sigma_0 (3 + \delta + \xi)^{\frac{2}{3}} (36M_x^2 + M_s^2 \delta_1^2 b^2)^{\frac{1}{6}}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$(4.2) \quad \beta\gamma = \left[ \frac{\sigma_0}{B_1} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\delta} \left[ \frac{36M_x^2 + M_s^2 b^2 \delta_1^2}{36M_x^2 + 3M_s^2 \delta_1^2} \right]^{\frac{1}{4}};$$

jeśli  $\gamma\delta \geq 1$

$$(4.3) \quad h = \left[ \frac{(1,6875)^{\frac{1}{6}} \delta^{\frac{2}{3}} B_1^{\frac{1}{3}} [12M_x^2 + M_s^2 (3 + \delta + \xi)^2]^{\frac{1}{2}}}{\sigma_0 (3 + \delta + \xi)^{\frac{2}{3}} (36M_x^2 + M_s^2 \delta_1^2 b^2)^{\frac{1}{6}}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$(4.4) \quad \beta\gamma = \left[ \frac{\sigma_0}{B_1} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{36M_x^2 + M_s^2 b^2 \delta_1^2}{36M_x^2 + 3M_s^2 (3 + \delta + \xi)^2} \right]^{\frac{1}{4}}$$

oraz

$$(4.5) \quad a = \frac{(\gamma\delta)}{\delta} h,$$

$$(4.6) \quad \delta_s = \frac{(\beta\gamma)\delta}{(\gamma\delta)} h,$$

$$(4.7) \quad \delta_h = (\beta\gamma) \delta h,$$

$$(4.8) \quad \delta_m = 2 \xi \delta_s \frac{(\gamma\delta)}{\delta},$$

$$(4.9) \quad F = (2\delta_h + \delta_m)h + 2\delta_s a.$$

Optymalne wielkości bezwymiarowe  $\gamma$ ,  $\delta$  i  $\xi$  charakteryzujące proporcje przekroju nie zależą od rodzaju materiału ( $\sigma_0, E, \nu$ ) ani też od wartości momentów  $M_s$  i  $M_x$ , a jedynie od ich ilorazu  $M_s/M_x$ . Zależą też od współczynników  $A_1, A_2, B_1, B_2$  (2.25), a zatem od współczynników wchodzących w skład wzorów określających stateczność pasa i środników. Określenie współczynnika  $\beta$  oraz wymiarów przekroju wymaga podania stałych materiałowych.

W programie zakłada się następujące wielkości stałe występujące we wzorach (2.15)-(2.19):  $k_h = 24$ ,  $k_{ht} = 5,37$ ,  $k_s = 4$ ,  $k_{st} = 5,37$ . Wielkości te zostały dobrane [6] jak dla płyt o stosunku długości do szerokości równym nieskończoności, co z dobrym przybliżeniem odpowiada płytom tworzącym belkę bez uwzględnienia przepon lub żeber wzmacniających.

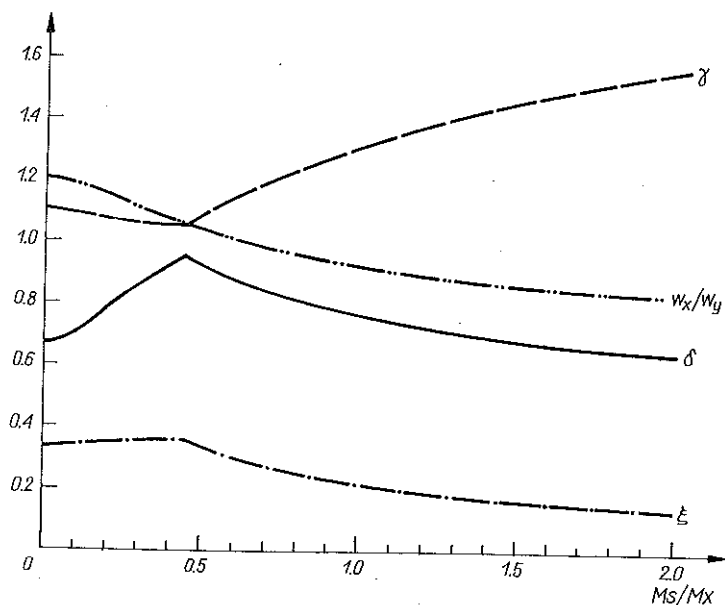
Podawana w p.1 dokładność dotyczy bezpośrednio dokładności obliczenia wartości  $\delta$ . Dla podanej dokładności  $N$ , rzeczywista optymalna wartość  $\delta_{opt}$  zawiera się w przedziale  $\delta \pm 10^{-N}$ . Na uwagę zasługuje fakt, że zmiana wprowadzonej dokładności obliczeń  $N$  dwukrotnie (np.  $N = 2 \Rightarrow N = 4$ ) powoduje, że względu na kształt funkcji celu, tylko nieznaczną zmianę wielkości obliczonego w obu przypadkach pola powierzchni przekroju. Zmiana ta nie przekracza jednego procenta. Dlatego proponuje się przyjmować w obliczeniach dokładność  $N = 3$ , ponieważ jest ona w pełni wystarczająca.

## 5. ZAKOŃCZENIE

Na podstawie wyprowadzonych związków oraz opracowanego programu wyznaczono wielkości  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\xi$  oraz  $w_x/w_y$  dla przyjętego ilorazu  $M_s/M_x$  w przedziale  $0 \leq M_s/M_x \leq 2$ . Wyniki przedstawiono na wykresie.

Dla  $M_s = 0$  (czyste zginanie) wszystkie wielkości są zgodne z wielkościami wyznaczonymi w sposób analityczny.

Na wykresie zaznacza się ostre załamanie występujące dla ilorazu  $M_s/M_x = 0,4479$ , dla którego iloczyn  $\gamma\delta = 1$ . A zatem dla  $M_s/M_x \leq 0,4479$  obowiązuje przypadek pierwszy, tzn.  $\gamma\delta \leq 1$ , a dla  $M_s/M_x > 0,4479$  obowiązuje przypadek drugi. Przypomnijmy, że dla przekroju skrzynkowego [2] również istniała graniczna wartość ilorazu  $M_s/M_x$  rozdzielająca dwa zakresy wartości iloczynu  $\gamma\delta$ .



Rys. 3

W celu porównania przekroju dwukomorowego z przekrojem skrzynkowym podamy pewne charakterystyczne cechy obu przekrojów w przypadku czystego zginania. Można stwierdzić, że w przypadku tym wyprowadzone wzory mają postać analogiczną do postaci wzorów określających optymalne parametry przekroju skrzynkowego [2]. Różnią się one jedynie wartościami współczynników. A zatem omawiany przekrój będą cechować inne proporcje niż przekrój skrzynkowy. Dla porównania odpowiednich cech obu przekrojów zestawiono wartości współczynników  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\xi$  w tabelicy 1. Obrazują one zmiany między proporcjami przekroju dwukomorowego w stosunku do skrzynkowego.

W celu porównania wymiarów przekroju skrzynkowego i dwukomorowego przedstawiamy w tabelicy 2 i tabelicy 3 wyniki obliczeń przeprowadzonych dla dwóch danych wartości momentu zginającego  $M_x$  oraz różnych wartości ilorazu  $M_s/M_x$ .

Jak wynika z wartości zestawionych w tabelicy 2 i 3, dla małych wielkości  $M_s/M_x$  korzystniejszym rozwiązaniem ze względu na minimum

Tablica 1.

przekrój	$\gamma = \frac{a}{h}$	$\delta = \frac{F_h}{F_g}$	$\xi = \frac{F_m}{2F_g}$	$\frac{w_x}{w_y}$
skrzynekowy	0,639	1,000	-	1,565
dwukomorowy	1,108	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1,205

Tablica 2.

(tłusty druk dotyczy przekroju dwukomorowego) - dolne wartości  $M_x = 400$  kNm,  
 $\sigma_0 = 200$  MPa

$\frac{M_x}{M_c}$	0,000	0,123	0,174	0,200	0,510	0,842	1,100	1,520	2,330
$\delta$	1,000	1,1086	1,1720	1,2017	1,4371	1,5365	1,4299	1,3219	1,2145
	<b>0,6667</b>	<b>0,7248</b>	<b>0,7644</b>	<b>0,7848</b>	<b>0,9182</b>	<b>0,7975</b>	<b>0,7402</b>	<b>0,6812</b>	<b>0,6216</b>
$\gamma$	0,6389	0,6262	0,6223	0,6214	0,6313	0,6508	0,6997	0,7565	0,8233
	<b>1,1067</b>	<b>1,0875</b>	<b>1,0776</b>	<b>1,0734</b>	<b>1,0891</b>	<b>1,2539</b>	<b>1,3510</b>	<b>1,4680</b>	<b>1,6088</b>
$\xi$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	<b>0,3333</b>	<b>0,3446</b>	<b>0,3502</b>	<b>0,3525</b>	<b>0,3331</b>	<b>0,2416</b>	<b>0,2013</b>	<b>0,1612</b>	<b>0,1212</b>
$h$	60,94	61,80	62,22	62,41	64,70	67,74	69,01	71,91	78,05
cm	<b>53,24</b>	<b>54,88</b>	<b>56,05</b>	<b>56,67</b>	<b>63,01</b>	<b>66,58</b>	<b>69,93</b>	<b>75,70</b>	<b>86,51</b>
$a$	38,94	38,70	38,72	38,78	40,85	44,08	48,29	54,40	64,26
cm	<b>58,92</b>	<b>59,68</b>	<b>60,40</b>	<b>60,83</b>	<b>68,62</b>	<b>83,48</b>	<b>94,48</b>	<b>111,13</b>	<b>139,17</b>
$\delta_h$	4,04	4,32	4,52	4,62	5,65	6,46	6,84	7,38	8,25
mm	<b>3,53</b>	<b>3,61</b>	<b>3,66</b>	<b>3,68</b>	<b>3,85</b>	<b>3,75</b>	<b>3,69</b>	<b>3,64</b>	<b>3,61</b>
$\delta_g$	6,32	6,23	6,19	6,18	6,22	6,46	6,84	7,38	8,25
mm	<b>4,78</b>	<b>4,58</b>	<b>4,44</b>	<b>4,37</b>	<b>3,85</b>	<b>3,74</b>	<b>3,69</b>	<b>3,64</b>	<b>3,61</b>
$\delta_m$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
mm	<b>3,53</b>	<b>3,43</b>	<b>3,35</b>	<b>3,31</b>	<b>2,79</b>	<b>2,27</b>	<b>2,01</b>	<b>1,72</b>	<b>1,41</b>
$F$	98,44	101,66	104,16	105,55	123,91	144,38	160,44	186,52	234,69
cm <sup>2</sup>	<b>112,70</b>	<b>113,04</b>	<b>113,45</b>	<b>113,71</b>	<b>118,79</b>	<b>127,50</b>	<b>135,42</b>	<b>149,00</b>	<b>174,98</b>

Tablica 3.

(tłusty druk dotyczy przekroju dwukomorowego) - dolne wartości  $M_x = 200$  kNm,  
 $\sigma_0 = 150$  MPa

$\frac{M_s}{M_x}$	0,000	0,123	0,174	0,200	0,510	0,842	1,100	1,520	2,330
$\delta$	1,0000	1,1086	1,1720	1,2017	1,4371	1,5365	1,4299	1,3219	1,2145
	<b>0,6667</b>	<b>0,7248</b>	<b>0,7644</b>	<b>0,7848</b>	<b>0,9182</b>	<b>0,7975</b>	<b>0,7402</b>	<b>0,6812</b>	<b>0,6216</b>
$\gamma$	0,6389	0,6262	0,6223	0,6214	0,6313	0,6508	0,6997	0,7565	0,8233
	<b>1,1067</b>	<b>1,0875</b>	<b>1,0776</b>	<b>1,0743</b>	<b>1,0891</b>	<b>1,2539</b>	<b>1,3510</b>	<b>1,4680</b>	<b>1,6088</b>
$\xi$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	<b>0,3333</b>	<b>0,3446</b>	<b>0,3502</b>	<b>0,3525</b>	<b>0,3331</b>	<b>0,2416</b>	<b>0,2013</b>	<b>0,1612</b>	<b>0,1212</b>
$h$	55,85	56,64	57,02	57,20	59,30	62,08	63,25	65,91	71,53
cm	<b>48,80</b>	<b>50,30</b>	<b>51,37</b>	<b>51,94</b>	<b>57,75</b>	<b>61,02</b>	<b>64,09</b>	<b>69,38</b>	<b>79,28</b>
$a$	35,68	35,47	35,49	35,54	37,43	40,40	44,26	49,86	58,89
cm	<b>54,00</b>	<b>54,70</b>	<b>55,36</b>	<b>55,75</b>	<b>62,89</b>	<b>76,51</b>	<b>86,59</b>	<b>101,85</b>	<b>127,55</b>
$\delta_h$	3,21	3,43	3,58	3,66	4,48	5,12	5,43	5,86	6,54
mm	<b>2,80</b>	<b>2,86</b>	<b>2,90</b>	<b>2,92</b>	<b>3,06</b>	<b>2,97</b>	<b>2,93</b>	<b>2,89</b>	<b>2,86</b>
$\delta_g$	5,02	4,94	4,92	4,91	4,94	5,12	5,43	5,86	6,54
mm	<b>3,80</b>	<b>3,63</b>	<b>3,52</b>	<b>3,47</b>	<b>3,06</b>	<b>2,97</b>	<b>2,93</b>	<b>2,89</b>	<b>2,86</b>
$\delta_m$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
mm	<b>2,80</b>	<b>2,72</b>	<b>2,66</b>	<b>2,63</b>	<b>2,22</b>	<b>1,80</b>	<b>1,59</b>	<b>1,37</b>	<b>1,12</b>
$F$	71,61	73,95	75,77	76,78	90,14	105,02	116,70	135,68	170,72
cm <sup>2</sup>	<b>81,98</b>	<b>82,23</b>	<b>82,52</b>	<b>82,72</b>	<b>86,55</b>	<b>92,75</b>	<b>98,50</b>	<b>108,39</b>	<b>127,28</b>

pola powierzchni przekroju belki jest belka skrzynkowa. Dla większych wartości  $M_s/M_x$  lepsza okazuje się belka o przekroju dwukomorowym. Różne w obu przypadkach są też wymiary gabarytowe obu przekrojów. Porównanie cech obu przekrojów może być pomocne przy projektowaniu tego rodzaju belek, zwłaszcza w przypadku ograniczonych gabarytów.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. P. BELLI, M. BRIGANTE, V. FRANCIOSI, *Verifica allo stato limite ultimo per formazione di meccanismo nei ponti a travata con sezione retta sottile chiusa*, Costruzioni Metalliche, 3, 1981.

2. T. GIBCYŃSKA, *Zagadnienia optymalnego kształtowania przekrojów cienkościennych dźwigarów skrzynkowych*, Zesz. Nauk., 4, Kraków 1980.
3. V. FRANCIOSI, *Le travi con sezione a parete sottile pluriconnessa*, Università di Napoli, 1969.
4. V. FRANCIOSI, *Fondamenti di scienza delle costruzioni*, vol. 2, 3, Napoli 1978.
5. Ц.Н. Кан, Я.Г.Пановко, *Элементы строительной механики тонкостенных конструкций*, Оборонгиз, 1952.
6. S.P. TIMOSHENKO, J.M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.

### Резюме

#### ОПТИМАЛЬНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ДВУХКАМЕРНЫХ СЕЧЕНИЙ

В работе представлена оптимизация из-за веса несущей балки с двухкамерным сечением, подвергнутой изгибу со скручиванием. Проведен сравнительный анализ полученных размеров сечения с оптимальными размерами коробчатого сечения, нагруженного такой же самой системой обобщенных сил.

### SUMMARY

#### OPTIMUM DESIGN OF DOUBLE - BOX - GIRDERS

Double-box-girders are subject to simultaneous bending and torsion; optimum design of such a structure with respect to its weight is considered, the results being compared with those concerning a single-box-girders.

**POLITECHNIKA RZESZOWSKA**  
**INSTYTUT BUDOWY MASZYN**

*Praca została złożona w Redakcji dnia 31 lipca 1989r.*

---