

ZAGADNIENIE BUDOWY RÓWNAŃ DYNAMIKI SPRĘŻYNY WALCOWEJ

JERZY FRANKOWSKI (KIELCE)

W komunikacie przedstawiono równania dynamiki nieliniowej deformacji zwoju sprężyny śrubowej walcowej. Deformacja ogólna określona jest wektorem przemieszczenia punktów osi środków mas $u(s, \tau)$ oraz kątem obrotu $\varphi(s, \tau)$ mierzącym obroty materiału zwoju sprężyny wokół недеформowanej osi. Związki geometryczne i kinematyczne procesu deformacji szczególnie zostały przedstawione przez J. FRANKOWSKIEGO i K. WILMAŃSKIEGO w [2]. Równania ruchu sprężyny wprowadzane są na podstawie praw bilansu pędu i momentu pędu. W końcowej części komunikatu przedstawiono układ równań dynamiki sprężyny dla ogólnego przypadku deformacji (u, φ) .

1. WSTĘP

Niektóre założenia dotyczące przyjętego modelu fizycznego sprężyny (pręta przestrzennie zakrzywionego) zostały przedstawione w [2]. Wystarczają one do określenia miar deformacji charakteryzujących ruch materiału sprężyny i stanowią podstawę do wprowadzenia związków fizycznych.

Zagadnienie budowy równań dynamiki zwoju sprężyny walcowej, w przypadku nieliniowej deformacji, wymaga wprowadzenia podanych poniżej założeń fizycznych:

materiał sprężyny spełnia liniowe związki fizyczne (prawo Hooke'a) i jest jednorodny,

oddziaływania w sprężynie ograniczają się do rozciągania lub ściskania tzw. włókien materialnych (patrz [10]) oraz do ścinania pomiędzy włóknami,

powierzchnia tworząca sprężyny jest nieobciążona,

wpływ sił objętościowych pominięto, które to założenia pokrywają się w zasadzie z przyjętymi w klasycznej pracy [4] (por. również [1, 5, 9]).

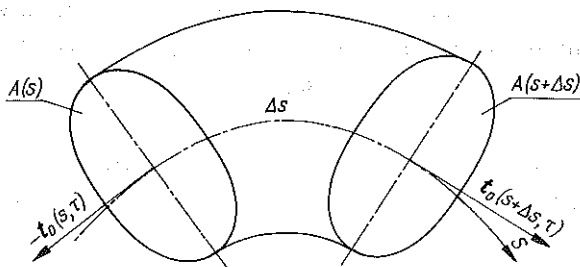
W literaturze istnieją nieliczne prace na ten temat. W zakresie pełnej teorii nieliniowej (również fizycznie) najwcześniejszą pracą jest artykuł G.E.HAY'A [5], rozszerzony później przez A.E.GREENA [4] i J.L.ERICKSENA [1]. Należy zaznaczyć, że prace te dotyczą zagadnień statycznych i nie prowadzą do efektywnych wzorów dla wysiłków przekrojowych. Wynika to z braku jawnej postaci energii odkształcenia. Podobny zakres zagadnień - również statycznych - obejmują monografie E.P.POPOWA [8] i A.A.IJUCHINA [7]. Zagadnienia dynamiki liniowej sprężyny obejmuje monografia M.W.CHWINGII [6] oraz prace, których autorami są: V.A.SVETLICKI [11, 12], L.A.STAROSELSKI [13], B.A.KORBUT, T.V.LAZAREWA [14].

Wykorzystane w tej pracy związki geometryczne i kinematyczne, jak również omówienie układów współrzędnych można znaleźć w [2].

Autor chciałby wyrazić wdzięczność Prof.K.WILMAŃSKIEMU za pomoc w opracowaniu teorii przedstawionej w tej pracy.

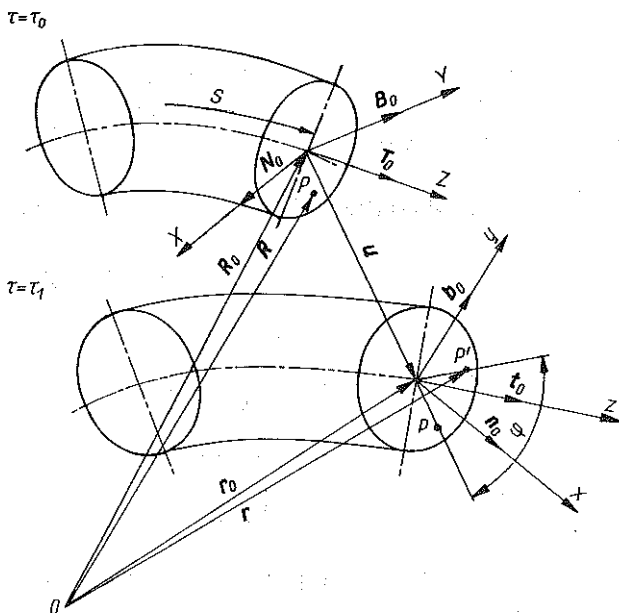
2. RÓWNIANIA RUCHU SPRĘŻYNY

Równania ruchu sprężyny wyprowadza się na podstawie praw bilansu pędu i momentu pędu.



Rys. 1

Na rys.1 pokazany jest wycinek sprężyny o długości Δs w jego konfiguracji aktualnej w chwili τ_1 .



Rys. 2

Rysunek 2 przedstawia wycinek sprężyny zarówno w konfiguracji odniesienia (w chwili $\tau = \tau_0$) jak i aktualnej (w chwili $\tau = \tau_1$). Wektory jednostkowe $\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0$ tworzą ruchomy trójścian Freneta o orientacji prawoskrętnej określony w każdym punkcie osi środków mas poprzecznych przekrojów (opisaney wektorem \mathbf{r}_0) w konfiguracji aktualnej. Wektor wodzący włókna materialnego \mathbf{r} określony jest związkem (2.8) podanym niżej. Kąt mierzący obroty materiału zwoju sprężyny wokół недеформованей osi środków mas poprzecznych przekrojów oznaczono symbolem φ .

2.1. Równanie bilansu pędu

Postać całkowita równania bilansu pędu dla rozważanego wycinka zwoju sprężyny jest następująca:

$$(2.1) \quad \int_{\Delta V} \rho \ddot{\mathbf{r}} dV = \oint_{\partial \Delta V} \mathbf{T} dA,$$

gdzie ΔV oznacza obszar wycinka, $\partial \Delta V$ – powierzchnię tego obszaru,

dA – zewnętrznie zorientowany element powierzchni, ρ – gęstość masy, \mathbf{T} – tensor naprężeń Pioliego-Kirchhoffa oraz $\ddot{\mathbf{r}}$ – przyspieszenie.

Wyrażenie po lewej stronie (2.1), po wykorzystaniu związku (2.9) podanego niżej przyjmie postać:

$$(2.2) \quad \int_{\Delta V} \rho \ddot{\mathbf{r}} dV = \int_{\Delta V} \rho \{ \ddot{\mathbf{r}}_0 [\mathbf{n}_0 - 2\dot{\mathbf{b}}_0 \dot{\varphi} - \mathbf{b}_0 \ddot{\varphi} - \mathbf{n}_0 (\dot{\varphi})^2] x + \\ + [\ddot{\mathbf{b}}_0 + 2\dot{\mathbf{n}}_0 \dot{\varphi} + \mathbf{n}_0 \ddot{\varphi} - \mathbf{b}_0 (\dot{\varphi})^2] y \} dV.$$

Ponieważ układ x, y jest centralny, to

$$(2.3) \quad \int_A \rho x dA = 0, \quad \int_A \rho y dA = 0.$$

Wprowadzając do równania (2.1) oznaczenia

$$(2.4) \quad \boldsymbol{\theta} := \int_A \mathbf{T} \mathbf{t}_0 dA,$$

gdzie wektor $\boldsymbol{\theta}$ jest wypadkową siłą przekrojową w przekroju poprzecznym o współrzędnej S oraz

$$(2.5) \quad m := \int_A \rho dA,$$

gdzie m – oznacza masę sprężyny na jednostkę długości w konfiguracji aktualnej; i przechodząc do granicy $\Delta S \rightarrow 0$, otrzymujemy

$$(2.6) \quad m \ddot{\mathbf{r}}_0 = \partial_S \boldsymbol{\theta}.$$

Równanie to, zgodnie z twierdzeniem o ruchu środka masy układu, reprezentuje zasadę zachowania pędu dla sprężyny.

2.2. Równanie bilansu momentu pędu

Opierając się na przedstawionych założeniach równanie bilansu pędu można napisać w postaci:

$$(2.7) \quad \int_{\Delta V} \mathbf{r} \times (\rho \ddot{\mathbf{r}}) dV = \oint_{\partial \Delta V} \mathbf{r} \times (\mathbf{T} d\mathbf{A}),$$

gdzie \mathbf{r} oznacza wektor wodzący włókna materialnego określony wyrażeniem

$$(2.8) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{n}_0 x \mathbf{b}_0 y,$$

$\ddot{\mathbf{r}}$ oznacza przyspieszenie dowolnego punktu sprężyny,

$$(2.9) \quad \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_0[\mathbf{n}_0 - 2\dot{\mathbf{b}}_0\dot{\varphi} - \mathbf{b}_0\ddot{\varphi} - \mathbf{n}_0(\dot{\varphi})^2]x[\ddot{\mathbf{b}}_0 + 2\dot{\mathbf{n}}_0\dot{\varphi} + \\ + \mathbf{n}_0\ddot{\varphi} - \mathbf{b}_0(\dot{\varphi})^2]y.$$

Wprowadzając oznaczenie

$$(2.10) \quad \mathbf{M} = \int_A (\mathbf{n}_0x + \mathbf{b}_0y) \times (\mathbf{T}\mathbf{t}_0)dA,$$

gdzie wektor \mathbf{M} jest wypadkowym momentem przekrojowym w przekroju poprzecznym o współrzędnej S oraz przyjmując klasyczne oznaczenia dla charakterystyk przekrojowych:

$$(2.11) \quad I_x = \int_A \rho y^2 dA, \quad I_y = \int_A \rho x^2 dA, \\ I_{xy} = \int_A \rho xy dA, \quad I_0 = \int_A \rho (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y,$$

uwzględniając (2.3), (2.8), (2.9) i przechodząc do granicy $\Delta S \rightarrow 0$ otrzymuje się równanie

$$(2.12) \quad \mathbf{n}_0 \times (\ddot{\mathbf{n}}_0 - 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{b}}_0)I_y + \mathbf{b}_0 \times (\ddot{\mathbf{b}}_0 + 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{n}}_0)I_x - \ddot{\varphi}I_0\mathbf{t}_0 + \\ + [\mathbf{b}_0 \times (\ddot{\mathbf{n}}_0 - 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{b}}_0 - (\dot{\varphi})^2\mathbf{n}_0) + \mathbf{n}_0 \times (\ddot{\mathbf{b}}_0 + 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{n}}_0 - (\dot{\varphi})^2\mathbf{b}_0)]I_{xy} = \\ = \eta \mathbf{t}_0 \times \mathbf{Q} + \partial_s \mathbf{M}$$

obrazujące zasadę zachowania momentu pędu dla sprężyny.

3. SIŁY UOGÓLNIONE W SPRĘŻYNIE

W praktycznych zastosowaniach równania bilansu pędu i momentu pędu wygodniej jest wykorzystywać w postaci rozpisanej w lokalnym układzie odniesienia.

Wektor naprężenia $[\mathbf{T} \mathbf{t}_0]$ wyraża się przez wektory podstawowe \mathbf{t}_0 , \mathbf{n}_0 , \mathbf{b}_0 w postaci związku:

$$(3.1) \quad \mathbf{T} \mathbf{t}_0 = \sigma \mathbf{t}_0 + \tau_x \mathbf{n}_0 + \tau_y \mathbf{b}_0,$$

gdzie σ oznacza składową normalną wektora naprężenia w kierunku osi \mathbf{t}_0 , τ_x —składową styczną w kierunku osi \mathbf{n}_0 , τ_y —składową styczną w kierunku osi \mathbf{b}_0 .

W podobny sposób rozkłada się wypadkowa siła przekrojowa \mathbf{Q} w przekroju poprzecznym S określona w (2.4)

$$(3.2) \quad \mathbf{Q} = N \mathbf{t}_0 + Q_x \mathbf{n}_0 + Q_y \mathbf{b}_0,$$

gdzie N oznacza siłę normalną w kierunku osi \mathbf{t}_0 , Q_x — siłę tnącą w kierunku osi \mathbf{n}_0 , Q_y —siłę tnącą w kierunku osi \mathbf{b}_0 oraz wypadkowy moment przekrojowy M określony w (2.10)

$$(3.3) \quad M = M_s \mathbf{t}_0 + M_x \mathbf{n}_0 + M_y \mathbf{b}_0,$$

gdzie M_s — oznacza moment skręcający w kierunku \mathbf{t}_0 , M_x — moment zginający w kierunku \mathbf{n}_0 , M_y — moment zginający w kierunku \mathbf{b}_0 .

Poszczególne składowe wysiłku przekroju nazwano zgodnie z nazewnictwem klasycznym stosowanym w wytrzymałości materiałów.

Podstawiając związki (3.1), (3.2), (3.3) w definicjach (2.4) i (2.10) otrzymuje się następujące zależności sił uogólnionych od naprężeń:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA, & M_x &= \int_A y \sigma dA, & M_y &= - \int_A x \sigma dA \\ Q_x &= \int_A \tau_x dA, & Q_y &= \int_A \tau_y dA, & M_s &= \int_A (x \tau_y - y \tau_x) dA. \end{aligned}$$

Jak widać ze związków (3.4) oraz (3.1) siły uogólnione N , M_x , M_y można obliczyć znając rozkład naprężeń normalnych σ , a siły uogólnione Q_x , Q_y , M_s znając rozkład naprężeń stycznych τ_x , τ_y .

4. PODSTAWOWY UKŁAD RÓWNAŃ RUCHU DLA PRZYPADKU OGÓLNEJ DEFORMACJI ZWOJU SPRĘŻYNY

Podstawiając wyrażenia (3.2) i (3.3) do zasad zachowania (2.6) i (2.12) z uwzględnieniem ortogonalności wektorów \mathbf{t}_0 , \mathbf{n}_0 , \mathbf{b}_0 oraz wzorów SERRETA-FRENETA [3], otrzymuje się równanie pędu:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} m \mathbf{t}_0 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_0 &= \partial_S N - \kappa_0 Q_x, \\ m \mathbf{n}_0 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_0 &= \partial_S Q_x + \kappa_0 N - \sigma_0 Q_y, \\ m \mathbf{b}_0 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_0 &= \partial_S Q_y + \sigma_0 Q_x \end{aligned}$$

oraz równania momentu pędu:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{b}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{n}}_0 - 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{b}}_0)I_y - \mathbf{n}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{b}}_0 + 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{n}}_0)I_x - \ddot{\varphi}I_0 + \\
 & + [\mathbf{b}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{b}}_0 + 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{n}}_0 - (\dot{\varphi})^2\mathbf{b}_0) - \mathbf{n}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{n}}_0 - 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{b}}_0 - (\dot{\varphi})^2\mathbf{n}_0)]I_{xy} = \\
 & = \partial_s M_s - \kappa_0 M_x, \\
 (4.2) \quad Q_y = & \partial_s M_x + \kappa_0 M_s - \sigma_0 M_y - \mathbf{t}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{b}}_0 + 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{n}}_0)I_x - \\
 & - \mathbf{t}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{n}}_0 - 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{b}}_0)I_{xy},
 \end{aligned}$$

$$Q_x = -\partial_s M_y - \sigma_0 M_x - \mathbf{t}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{n}}_0 - 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{b}}_0)I_y - \mathbf{t}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{b}}_0 + 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{n}}_0)I_{xy},$$

gdzie κ_0 oznacza krzywiznę główną osi środków mas w konfiguracji aktualnej oraz σ_0 —skręcenie osi środków mas w konfiguracji aktualnej.

Powyższe sześć równań, po wykorzystaniu odpowiednich związków fizycznych, powinno służyć do określenia czterech pól u , φ .

W ogólnym przypadku deformacji zwoju sprężyny jest to układ przeokreślony. Równania (4.2)_{2,3} można w tym przypadku traktować jako określające rozkład naprężeń stycznych τ_x , τ_y —poprzez związki (3.4)—w zależności od rozkładu naprężeń normalnych σ , na przekroju poprzecznym zwoju sprężyny.

Otrzymany rozkład naprężeń na ogół będzie spełniał równania ruchu teorii sprężystości w sposób całkowity, a nie ścisły. Problem ten pojawia się również w klasycznej teorii zginania prętów prostych.

W związku z powyższymi rozważaniami eliminuje się siły Q_x , Q_y z układów równań (4.1) i (4.2). Po prostych, choć żmudnych przekształceniach otrzymuje się następujące cztery równania:

$$\begin{aligned}
 m\mathbf{t}_0 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_0 = & \partial_s N + \kappa_0 [\partial_s M_y + \sigma_0 M_x + \mathbf{t}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{n}}_0 - 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{b}}_0)I_y + \\
 & + \mathbf{t}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{b}}_0 + 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{n}}_0)I_{xy}], \\
 -\partial_s \left\{ \frac{1}{\sigma_0} \{ m\mathbf{n}_0 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_0 - \kappa_0 N + \partial_s [\partial_s M_y + \sigma_0 M_x + \mathbf{t}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{n}}_0 - 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{b}}_0)I_y + \right. \\
 & \left. + \mathbf{t}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{b}}_0 + 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{n}}_0)I_{xy}] \} \right\} = m\mathbf{b}_0 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_0 + \sigma_0 \{ \partial_s M_y + \sigma_0 M_x + \\
 & + \mathbf{t}_0 \cdot [(\ddot{\mathbf{n}}_0 - 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{b}}_0)I_y + (\ddot{\mathbf{b}}_0 + 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{n}}_0)I_{xy}] \}, \\
 (4.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_s M_s = & \mathbf{b}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{n}}_0 - 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{b}}_0)I_y - \mathbf{n}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{b}}_0 + 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{n}}_0)I_x - \ddot{\varphi}I_0 + \\
 & [\mathbf{b}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{b}}_0 + 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{n}}_0 - (\dot{\varphi})^2\mathbf{b}_0) - \mathbf{n}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{n}}_0 - 2\dot{\varphi}\dot{\mathbf{b}}_0 - (\dot{\varphi})^2\mathbf{n}_0)]I_{xy} + \kappa_0 M_x,
 \end{aligned}$$

(4.3)[c.d.]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\kappa_0} \{ m \mathbf{b}_0 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_0 + \sigma_0 [\partial_s M_y + \sigma_0 M_x + \mathbf{t}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{n}}_0 - 2\dot{\varphi} \dot{\mathbf{b}}_0) I_y + \mathbf{t}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{b}}_0 + \\ & + 2\dot{\varphi} \dot{\mathbf{n}}_0) I_{xy}] \} + \frac{1}{\sigma_0} \partial_s \left(\frac{1}{\kappa_0} \right) \{ -m \mathbf{n}_0 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_0 + \kappa_0 N - \partial_s [\partial_s M_y - \sigma_0 M_x + \mathbf{t}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{n}}_0 - \\ & - 2\dot{\varphi} \dot{\mathbf{b}}_0) I_y + \mathbf{t}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{b}}_0 + 2\dot{\varphi} \dot{\mathbf{n}}_0) I_{xy}] \} = \mathbf{b}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{n}}_0 - 2\dot{\varphi} \dot{\mathbf{b}}_0) I_y - \mathbf{n}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{b}}_0 + \\ & + 2\dot{\varphi} \dot{\mathbf{n}}_0) I_x - \ddot{\varphi} I_0 + [\mathbf{b}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{b}}_0 + 2\dot{\varphi} \dot{\mathbf{n}}_0 - (\dot{\varphi})^2 \mathbf{b}_0) - \mathbf{n}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{n}}_0 - 2\dot{\varphi} \dot{\mathbf{b}}_0 - \\ & (\dot{\varphi})^2 \mathbf{n}_0)] I_{xy} + \kappa_0 M_x + \partial_s \left(\frac{1}{\kappa_0} \right) [\partial_s M_x - \sigma_0 M_y - \mathbf{t}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{b}}_0 + 2\dot{\varphi} \dot{\mathbf{n}}_0) I_x - \\ & - \mathbf{t}_0 \cdot (\ddot{\mathbf{n}}_0 - 2\dot{\varphi} \dot{\mathbf{b}}_0) I_{xy}]. \end{aligned}$$

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J.L.ERICKSEN, C.TRUESDELL, *Exact theory of stress and strain in rods and shells*, Arch.Rat.Mech.Anal.,1, 295-322, 1959.
2. J.FRANKOWSKI, K.WILMAŃSKI, *O nieliniowej deformacji zwoju sprężyny walcowej*, Zesz. Nauk. Polít.Świętokrzyskiej, Mechanika,33, Kielce, 1984.
3. A.GOETZ, *Geometria różniczkowa*, PWN, Warszawa 1965.
4. A.GREEN, *The equilibrium of rods*, Arch.Rat.Mech.Anal., 3, 417-421, 1959.
5. G.E.HAY, *The finite displacement of thin rods*, Trans.Am.Math.Soc., 51, 65-102, 1942.
6. М.В.Хвингия, *Вибрации пружин*, Машиностроение, Москва 1969.
7. А.А.Илюхин, *Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней*, Наукова думка, Киев 1979.
8. Е.П.Попов, *Нелинейные задачи статки тонких стержней*, ОТИЗ, Гостехиздат, 1948.
9. C.TRUESDELL, R.A.TOUPIN, *The classical field theories*, Handbuch der Physik, III, 1, 1960.
10. M.T.HUBER, *Stereomechanika techniczna*, PWN, Warszawa 1958.
11. В.А.Светлицкий, *Нелинейные уравнения движения тонких стержней*, Машиностроение, N^o6, 1969.
12. В.А.Светлицкий, *Механика трубопроводов и шлангов*, Машиностроение, Москва 1982.
13. Л.А.Смаросельский, *Об уравнениях описывающих колебания криволинейных упругих стержней*, Докл. АН СССР, N^o1, 1979.

14. Б.А.Корбут, Г.В.Лазарева, О динамической теории тонкостенных криволинейных стержней, Прикладная механика, 18, 5, 1982.

Резюме

ПРОБЛЕМА СТРОЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРУЖИНЫ

В сообщении представлены уравнения нелинейной динамики деформации витка винтовой цилиндрической пружины. Общая деформация определена вектором перемещения точек оси центров масс $u(s, \tau)$ и углом вращения $\varphi(s, \tau)$, измеряющим вращения материала витка пружины вокруг недеформируемой оси. Геометрические и кинематические соотношения процесса деформации подробно представлены Я.Франковским и К.Вильманьским в [2]. Уравнения движения пружины выведены, опираясь на законы баланса импульса и момента импульса. В заключительной части сообщения представлена система уравнений динамики пружины для общего случая деформации (u, φ) .

SUMMARY

EQUATIONS OF DYNAMICS OF CYLINDRICAL SPRINGS

Equations are presented governing the dynamics of finite deformation of a coil of helical spring. General deformation is determined by the displacement vector of the axis of mass centers $u(s, \tau)$, and by the rotation vector $\varphi(s, \tau)$ measuring the rotation of the spring coil about the undeformed axis of the spring. Kinematic and geometric relation of the deformation process were presented in detail by J. Frankowski and K. Wilmański in [2]. The equations of motion of the spring are derived from the conditions of balance of momentum and moment of momentum. Finally, the set of equations is presented, concerning the general case of dynamic spring deformation (u, φ) .

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 kwietnia 1989r.