

# EFEKTYWNY WSPÓLCZYNNIK PRZEWODZENIA CIEPŁA DLA KOMPOZYTU WŁÓKNISTEGO PRZY NIEDOSKONAŁYM KONTAKCIE TERMICZNYM POMIĘDZY KOMPONENTAMI<sup>(1)</sup>

JAN A. KOŁODZIEJ (POZNAŃ)

W pracy przedstawiono ogólną metodę określania efektywnego poprzecznego współczynnika przewodzenia ciepła w kompozytach włóknistych przy niedoskonałym kontakcie termicznym pomiędzy składnikami. Zakłada się znajomość geometrii regularnego rozłożenia włókien, współczynników przewodzenia ciepła komponentów oraz współczynnika oporu cieplnego pomiędzy komponentami. Wyniki numeryczne przedstawia się dla włókien rozłożonych w siatce kwadratowej.

## 1. WPROWADZENIE

Problem efektywnej przewodności ciepła materiałów kompozytowych lub innych efektywnych wielkości zestawionych w tablicy I, w pracy BATCHELORA [1], jest ważnym działem mikromechaniki ośrodków niejednorodnych. Obszerny przegląd publikacji dotyczących tego przedmiotu można znaleźć w pracy [2].

Ogólnie przyjmowaną przesłanką wstępną w pracach, których celem jest wyznaczanie efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła, jest założenie ciągłości temperatury i normalnych składowych strumienia ciepła na granicy składników. Takie idealne warunki na granicy składników są użyteczną idealizacją teoretyczną, która prowadzi do sensownych wyników w wielu przypadkach. W realnych kompozytach jednak, powierzchnia kontaktu składników jest warstwą przejściową o

<sup>(1)</sup>Praca została wykonana w ramach C.P.B.P.0201

pewnej grubości, w której mają miejsce oddziaływania mechaniczne, termiczne i chemiczne składników [3]. Oddziaływania te często mają złożoną naturę i w związku z tym założenie o idealnym kontakcie termicznym może okazać się zbyt dużym uproszczeniem. Jeśli istnieje warstwa przejściowa o skończonej grubości, to wówczas bardziej sensowne od wspomnianych wyżej warunków są tzw. warunki Kapitzy w postaci [4].

$$(1.1) \quad \lambda_I \frac{dt_I}{dn} = \lambda_{II} \frac{dt_{II}}{dn} = \beta(t_I - t_{II}),$$

gdzie  $\beta$  jest współczynnikiem określającym opór cieplny kontaktu materiałów,  $t_I$  i  $t_{II}$  są odpowiednio temperaturami w składnikach przy powierzchni styku,  $\lambda_I$  i  $\lambda_{II}$  są współczynnikami przewodzenia ciepła w składnikach,  $n$  jest normalną do powierzchni styku. W przypadku gdy  $\beta \rightarrow 0$  mamy do czynienia z doskonałą izolacją, podczas gdy  $\beta \rightarrow \infty$  zachodzi doskonały kontakt termiczny, tzn.  $t_I = t_{II}$  na granicy składników.

Obszerny przegląd prac dotyczących przepływu ciepła przez powierzchnię kontaktu dwóch materiałów (niekoniecznie w kompozytach) podaje publikacja [5]. Z drugiej strony, jak wynika z rozeznania autora niniejszej pracy, dotychczas w literaturze przedmiotu, z wyjątkiem pracy [4], nie uwzględniono niedoskonałego kontaktu termicznego na powierzchni rozdziału składników. W pracy [4] wyznaczono efektywny współczynnik przewodzenia ciepła dla szczególnej klasy kompozytów z uwzględnieniem niedoskonałego kontaktu termicznego. Po opisie określonej metody uśredniania wyznaczono efektywny współczynnik przewodzenia dla trzech przypadków kompozytów przy małym udziale objętościowym fazy dyspersyjnej; wtrącenia były: a) zorientowanymi wydłużonymi sferoidami, b) zorientowanymi spłaszczonymi sferoidami, c) losowo rozmieszczonymi sferoidami.

Wśród kompozytów ważną rolę odgrywają tzw. jednokierunkowe kompozyty włókniste, czyli kompozyty w postaci osnowy zbrojonej w jednym kierunku cylindrycznymi włóknami. Przegląd publikacji dotyczących metod wyznaczania efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła w kierunku prostopadłym do włókien można znaleźć w pracy [6].

Celem niniejszej pracy jest podanie metody określania efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła dla jednokierunkowego kompozytu włóknistego przy niedoskonałym kontakcie termicznym pomiędzy włóknami i osnową. W analizie zakłada się, że włókna w osnowie roz-

mieszczone są w regularny sposób według siatki kwadratowej, jednak opisana metoda może być w łatwy sposób zastosowana do innych regularnych siatek. Należy zauważyć, że sposób określania efektywnej przewodności przyjęty w niniejszej pracy nie nawiązuje do żadnego z głównych kierunków badań teoretycznych kompozytów, tj. procedury wygładzania, np. [7-9], czy procedury homogenizacji, np. [10-12], natomiast jego istota jest najbliższa eksperymentalnemu badaniu kompozytów. Efektywny współczynnik przewodzenia ciepła określa się z rozwiązania problemu ustalonego przewodzenia ciepła w powtarzającym się elemencie układu w kierunku prostopadłym do włókien. W ten sposób symuluje się wymagowany eksperyment fizyczny.

## 2. WYZNACZANIE EFEKTYWNEGO WSPÓLCZYNNIKA PRZEWODZENIA CIEPŁA POPRZEZ MYŚLOWY EKSPERYMENT FIZYCZNY

Jedną z metod eksperymentalnego określania współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda$  polega na pomiarze przepływu ilości ciepła  $q$  w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni próbki badanego materiału przy danym gradiencie temperatury. Współczynnik przewodzenia oblicza się wówczas korzystając z prawa przewodzenia ciepła Fouriera, co prowadzi do wzoru

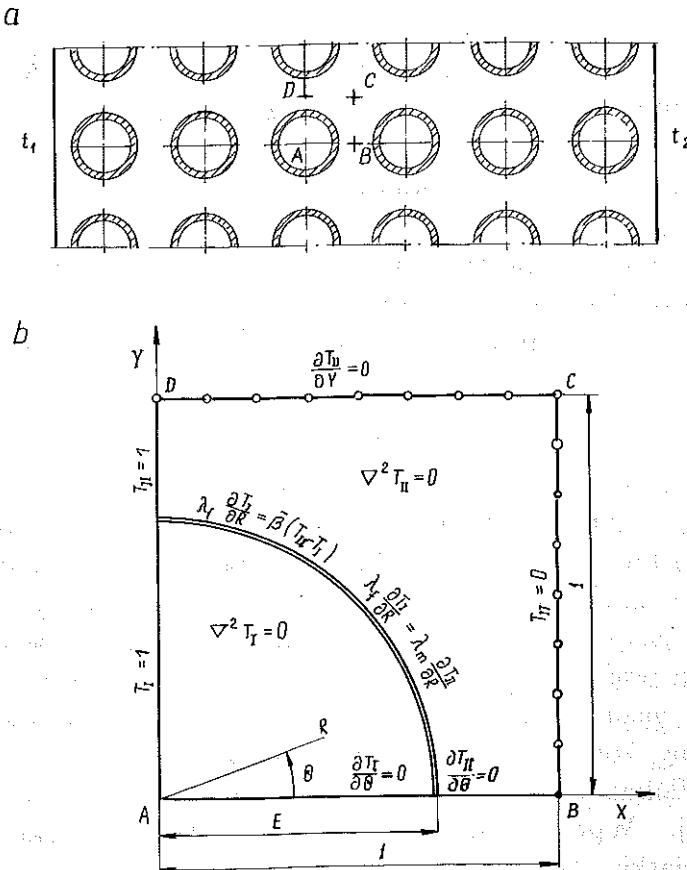
$$(2.1) \quad \lambda = \frac{qd}{t_1 - t_2},$$

gdzie  $d$  jest szerokością próbki doświadczalnej,  $t_1 - t_2$  jest daną różnicą temperatury. Interesujące uwagi na temat takich pomiarów oraz odsyłacze do literatury źródłowej można znaleźć w monografii [13]. Z uwag tych wynika, że w takich pomiarach nie jest preferowany przepływ ciepła przez płaską próbkę ze względów realizacji technicznej eksperymentu. W rozważaniach myślowych te względy nie stanowią problemu i w dalszym ciągu taki właśnie kształt próbki bierzemy pod uwagę.

Rozważmy kompozyt o jednokierunkowo ułożonych włóknach w osnowie. Włókna są rozmieszczone w regularny sposób według siatki kwadratowej. Wprowadzamy następujące wielkości charakteryzujące geometrię siatki:  $2a$  - średnica włókien,  $2b$  - odległość pomiędzy sąsiadującymi włóknami. Stosunek średnicy włókien do odległości pomiędzy sąsiadującymi włóknami oznaczmy przez  $E = a/b$ . Wielkość ta związana jest z objętościowym udziałem włókien  $\varphi$  zależnością  $\varphi =$

$\pi E^2/4$ . Stosunek przewodności cieplnych oznaczmy przez  $F = \lambda_f/\lambda_m$ , gdzie  $F = \lambda_f$  i  $\lambda_m$  są odpowiednio przewodnościami cieplnymi włókien i osnowy.

W dalszym ciągu celem określenia efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła należałoby rozważyć ustalony przepływ ciepła w warstwie kompozytu, jak na rys. 1a, wywołany różnicą temperatur na brzeżach warstwy. Okazuje się jednak, że identyczną wartość efektywnego współczynnika przewodzenia otrzymuje się z rozważenia przepływu ciepła w elementarnej komórce, tj. powtarzającym się obszarze siatki kwadratowej, którą przedstawia rys. 1b



Rys. 1 Jednokierunkowy kompozyt włóknisty; a) płaska warstwa eksperymentalna ze skończoną ilością rzędów włókien, b) powtarzający się obszar siatki kwadratowej

Sformułowanie problemu brzegowego w postaci bezwymiarowej w powtarzającym się fragmencie siatki kwadratowej podano na rys.1b. Tak sformułowany problem brzegowy będzie rozwiązywany metodą kolokacji brzegowej. Opis odmian tej metody i obszerny przegląd publikacji dotyczących jej zastosowania można znaleźć w pracy [14]. W stosowanej niżej wersji tej metody, założone rozwiązanie w postaci obciętego szeregu funkcji próbných spełnia ściśle równanie różniczkowe wchodzące do sformułowania problemu brzegowego oraz warunki brzegowe na części brzegu, podczas gdy warunki brzegowe na pozostałej części brzegu spełnia się ściśle jedynie w skończonej ilości punktów.

Po przyjęciu biegunowego układu współrzędnych  $(R, \theta)$  jak na rys.1b, rozwiązania w obszarze włókna i obszarze matrycy przyjmujemy odpowiednio w następującej postaci

$$(2.2) \quad T_I = 1 + \sum_{k=1}^N X_k R^{(2k-1)} \cos[(2k-1)\theta],$$

$$(2.3) \quad T_{II} = 1 + \sum_{k=1}^N X_k \frac{1}{2} \{ [1 + F + (2k-1)G] R^{(2k-1)} + \\ + E^{4k-2} [1 - F + (2k-1)G] R^{-2k+1} \} \cos[(2k-1)\theta],$$

przy czym

$$(2.4) \quad G = \frac{\lambda_f a}{\beta b^2},$$

gdzie  $T_I$  i  $T_{II}$  są odpowiednio temperaturami w obszarze włókna i matrycy,  $X_k$  są chwilowo nieznanymi współczynnikami.

Przyjęte postacie rozwiązań, oprócz płaskiego równania Laplace'a spełniają następujące warunki brzegowe (warunki brzegowe na ciągłych liniach brzegów na rys.1b):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_I}{\partial \theta} &= \frac{\partial T_{II}}{\partial \theta} = 0 & \text{dla } \theta = 0, \\ T_I &= T_{II} = 1 & \text{dla } \theta = \frac{\pi}{2}, \\ \lambda_f \frac{\partial T_I}{\partial R} &= \beta b (T_{II} - T_I) \\ F \frac{\partial T_I}{\partial R} &= \frac{\partial T_{II}}{\partial R} & \text{dla } R = E, \end{aligned}$$

$T_I$  powinno być ograniczone dla  $R = 0$ .

Do wyznaczenia nieznanymi współczynników  $X_1, X_2, \dots, X_N$  dysponujemy następującymi warunkami brzegowymi (warunki na liniach z kółkami na rys.1b)

$$(2.5) \quad T_I = 0 \text{ dla } X = 1,$$

$$(2.6) \quad \frac{\partial T_{II}}{\partial Y} = 0 \text{ dla } Y = 1.$$

Po wykorzystaniu wzoru

$$\frac{\partial T_{II}}{\partial Y} = \frac{\partial T_{II}}{\partial R} \sin \theta + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{II}}{\partial \theta} \cos \theta$$

otrzymujemy

$$(2.7) \quad \frac{\partial T_{II}}{\partial Y} = - \sum_{k=1}^N X_k \frac{(2k-1)}{2} \{ [1 + F + (2k-1)G] R^{2(k-1)} \sin[(2k-1)\theta] + E^{4k-2} [1 - F + (2k-1)G] R^{-2k} \sin(2\theta) \}.$$

W dalszym ciągu warunki brzegowe (2.5) i (2.6) spełnia się w sposób przybliżony metodą kollokacji brzegowej. W tym celu na brzegach  $X = 1$  (brzeg  $BC$  na rys.1b) oraz  $Y = 1$  (brzeg  $CD$  na rys.1b) obieramy  $M$  punktów kollokacji, których współrzędne są określone odpowiednio wzorami:

a) na brzegu  $BC$

$$(2.8) \quad R_i = \sqrt{1 + \frac{(i-1)^2}{(M-1)^2}},$$

$$(2.9) \quad \theta_i = \arctg [(i-1)/(M-1)], \quad i = 1, 2, \dots, M,$$

b) na brzegu  $CD$

$$(2.10) \quad R_i = \sqrt{1 + \frac{(i-1)^2}{(M-1)^2}},$$

$$(2.11) \quad \theta_i = \frac{\pi}{2} - \arctg [(i-1)/(M-1)], \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Spełniając warunek brzegowy (2.5) w  $M$  punktach określonych wzorami (2.8) i (2.9) na brzegu  $BC$  oraz warunek (2.6) w  $M-1$  punktach określonych wzorami (2.10) i (2.11), ponieważ ostatni z warunków jest spełniony tożsamościowo dla  $i = M$ , po wykorzystaniu wzorów

(2.3) i (2.7) otrzymuje się  $2M - 1$  równań liniowych z niewiadomymi  $X_1, X_2, \dots, X_N$ . W celu uzyskania lepszej dokładności metody na brzegu  $BC$  oprócz kollokacji funkcji dokonuje się dodatkowo kollokacji pochodnej tej funkcji w kierunku stycznym do brzegu, tzn.

$$(2.12) \quad \frac{\partial T_{II}}{\partial Y} = 0, \text{ dla } X = 1.$$

Spełniając powyższy warunek w  $M - 2$  punktach kollokacji, czyli z wyjątkiem punktów  $i = 1$  i  $i = M$ , gdzie warunek ten jest spełniony tożsamościowo, uzyskuje się dodatkowo  $M - 2$  równań liniowych. W efekcie uzyskuje się  $3M - 3$  liniowych równań algebraicznych, w których niewiadomymi są  $X_i$ . Przyjmując, że  $Q = 3M - 3$  i rozwiązując ten układ metodą eliminacji Gaussa przy danych  $F, G, E$  otrzymuje się wzory w postaci zamkniętej na rozkład temperatury (2.2) i (2.3).

Efektywny współczynnik przewodzenia ciepła określamy ze wzoru (2.1), przy czym w rozważanym przypadku

$$q = -\lambda_f \int_0^E \frac{1}{R} \frac{\partial T_{II}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi/2} dR_f - \lambda_m \int_E^1 \frac{1}{R} \frac{\partial T_{II}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi/2} dR_m$$

jest strumieniem ciepła przez powtarzający się obszar kompozytu, czyli we wzorze (2.1) należy ponadto przyjąć  $d = 1, t_1 - t_2 = 1, \lambda = \lambda_z$ . Po dokonaniu całkowania drogą analityczną otrzymujemy

$$(2.13) \quad \frac{\lambda_z}{\lambda_m} = \sum_{k=1}^{3M-3} X_k (-1)^k F E^{2k-1} + \frac{1}{2} \{ [1 + F + (2k-1)G] \times \\ \times (1 - E^{2k-1}) + E^{4k-2} [1 - F + (2k-1)] (1/E^{2k-1} - 1) \}.$$

Obliczenia efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła dokonuje się więc w dwóch etapach. W pierwszym przy danych  $F, G, E$  i  $M$  rozwiązuje się układ liniowych równań algebraicznych w celu wyznaczenia stałych  $X_1, X_2, \dots, X_N$ . W drugim etapie przy znanych współczynnikach  $X_i$  korzysta się ze wzoru (2.13).

Należy zauważyć, że wzór (2.13), gdy istnieje doskonały kontakt termiczny pomiędzy włóknami i osnową ( $G = 0$ ), redukuje się do wzoru (C3) z pracy [6] dotyczącego takiego przypadku. Inny graniczny przypadek ( $G \rightarrow \infty$ ), tj. gdy warstwa przejściowa pomiędzy włóknami i osnową jest doskonałym izolatorem, nie jest możliwy do uzyskania przy przyjętych postaciach funkcji próbnych.

## 3. Dyskusja wyników

W pracy proponuje się względnie prosty wzór (2.13) określający efektywny współczynnik przewodzenia ciepła przy niedoskonałym kontakcie termicznym pomiędzy składnikami w kompozycie włóknistym. We wzorze tym występują stałe  $X_k$ , zależne od parametrów bezwymiarowych problemu fizycznego i pewnych parametrów zastosowanej metody rozwiązania zagadnienia brzegowego. Stałe te należy określić numerycznie rozwiązując układ równań liniowych wynikający ze spełnienia warunków brzegowych (2.4), (2.5) i (2.11) w punktach określonych współrzędnymi (2.8)–(2.11).

Parametry wejściowe w proponowanym modelu można podzielić na parametry fizyczne oraz parametry zastosowanej metody. Do pierwszych zaliczamy następujące parametry bezwymiarowe:  $E$  - stosunek średnicy włókien do odległości pomiędzy włóknami,  $F$  - stosunek współczynnika przewodzenia ciepła we włóknach do współczynnika przewodzenia w osnowie,  $G$  - parametr oporu powierzchniowego na granicy włókna i osnowy. Parametrem zastosowanej metody jest  $M$ , tj. ilość punktów kollokacji na jednostkowym brzegu. Ponadto w programie obliczeń wprowadzono wielkość wejściową  $HD$  związaną z wyznaczeniem maksymalnego błędu zastosowanej metody, tzn.  $HD$  jest długością kroku w metodzie przeszukiwania.

Intuicyjnie może się wydawać, że zwiększając liczbę punktów kollokacji (liczbę  $M$ ) zwiększamy dokładność spełnienia warunków brzegowych. Eksperymenty numeryczne wykazują, że takie odczucie jest słuszne tylko w pewnym zakresie. Przede wszystkim okazuje się, że wartość parametru  $M$ , przy małych i umiarkowanych wartościach parametru  $E$ , nie musi być zbyt duża, aby uzyskać stabilne wartości efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła i odpowiednio mały maksymalny błąd spełnienia warunków brzegowych pomiędzy punktami kollokacji. Sytuację tę ilustruje tablica 1, w której oprócz wartości efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła podano również bezwzględne wartości maksymalnego błędu spełnienia warunku brzegowego (2.5), czyli

$$(3.1) \quad ER1 = \max |T_{II}(1, Y)| \quad \text{dla} \quad 0 < Y < 1$$

oraz bezwzględne wartości maksymalnego błędu spełnienia warunku brze-



Tablica 1. Wpływ liczby punktów kollokacji  $3M - 3$  na wartość efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda_z/\lambda_m$  oraz wartości błędów spełniania warunków brzegowych  $ER1$  i  $ER2$  przy  $E = 0,5$ ,  $F = 10$ ,  $G = 1$ ,  $HD = 0,01$

$M$	$\lambda_z/\lambda_m$	$ER1$	$ER2$
2	1,357178	$5,5602E - 3$	0,14905
3	1,300483	$2,1117E - 4$	$2,7546E - 2$
4	1,301952	$1,4880E - 4$	$1,2728E - 2$
5	1,301190	$1,8717E - 6$	$4,2377E - 3$
6	1,301419	$1,9895E - 6$	$9,0285E - 3$
7	1,301237	$1,6968E - 6$	$8,6085E - 3$
8	1,303861	$2,9720E - 4$	1,29980
9	1,301454	$3,0512E - 5$	0,19967
10	1,300931	$3,8220E - 5$	0,35803
15	1,301255	$4,8837E - 5$	$3,2158E - 2$

Tablica 2. Wpływ liczby punktów kollokacji  $3M - 3$  na wartość efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda_z/\lambda_m$  oraz wartości błędów spełniania warunków brzegowych  $ER1$  i  $ER2$  przy  $E = 0,9$ ,  $F = 1$ ,  $G = 10$ ,  $HD = 0,01$

$M$	$\lambda_z/\lambda_m$	$ER1$	$ER2$
2	0,2167615	$2,9893E - 3$	0,31373
3	0,2705894	$6,8886E - 4$	0,12335
4	0,2892665	$1,6104E - 1$	$9,8201E - 2$
5	0,2869027	$3,5489E - 6$	$2,0738E - 2$
6	0,2841956	$3,9923E - 5$	0,24825
7	0,2922816	$2,1371E - 5$	0,46062
8	0,2886288	$2,6544E - 5$	0,21551
9	0,2879973	$5,0733E - 5$	$4,9172E - 2$
10	0,2878274	$4,6251E - 5$	0,28783
15	0,2882722	$3,5613E - 4$	0,79862

Tablica 3. Wpływ liczby punktów kollokacji  $3M - 3$  na wartość efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda_z/\lambda_m$  oraz wartości błędów spełniania warunków brzegowych  $ER1$  i  $ER2$  przy  $E = 0,9$ ,  $F = 10$ ,  $G = 50$ ,  $HD = 0,01$

$M$	$\lambda_z/\lambda_m$	$ER1$	$ER2$
2	0,3216932	$2,9051E - 3$	0,2719
3	0,3734150	$5,7988E - 4$	0,10078
4	0,3893184	$1,5040E - 4$	$9,1513E - 2$
5	0,3865397	$4,8401E - 6$	$3,3982E - 2$
6	0,3850046	$2,9773E - 5$	0,17896
7	0,3840652	$4,1194E - 5$	0,45629
8	0,3877452	$7,3492E - 6$	$3,0175E - 2$
9	0,3871591	$8,6769E - 5$	0,79647
10	0,3880758	$5,8972E - 5$	0,54988
15	0,3881706	$2,8154E - 4$	1,13801

Tablica 4. Wpływ liczby punktów kollokacji  $3M - 3$  na wartość efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda_z/\lambda_m$  oraz wartości błędów spełniania warunków brzegowych  $ER1$  i  $ER2$  przy  $E = 0,99$ ,  $F = 10$ ,  $G = 100$ ,  $HD = 0,01$

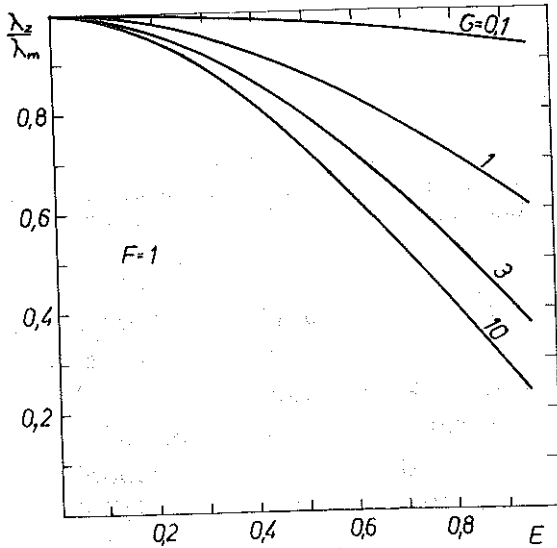
$M$	$\lambda_z/\lambda_m$	$ER1$	$ER2$
2	0,1234535	$8,1715E - 3$	0,33980
3	0,1428593	$4,6047E - 4$	0,23721
4	0,1520798	$2,2379E - 4$	0,19204
5	0,1601133	$3,2835E - 4$	0,66961
6	0,1636244	$1,1115E - 4$	0,39390
7	0,1571886	$4,6355E - 4$	5,40881
8	0,1599099	$9,3150E - 4$	1,23483
9	0,1681841	$2,0068E - 4$	2,06817
10	0,1676775	$4,3599E - 4$	3,06817
15	0,2365702	9,570837	347,9598

Tablica 5. Ilustracja utraty dokładności otrzymywanych wyników ze wzrostem liczby punktów kolołkacji wskutek złego uwarunkowania układu równań liniowych dla  $F = 1$ ,  $G = 0$ ,  $HD = 0,01$

$M$	$\lambda_z/\lambda_m$	$ER1$	$ER2$
2	1,0	$2,1453E - 7$	$1,8353E - 7$
3	1,0	$2,4384E - 7$	$1,7516E - 6$
4	0,9999986	$1,7156E - 7$	$2,8322E - 5$
5	0,9999931	$3,1528E - 7$	$3,7992E - 4$
6	1,0002450	$2,5510E - 6$	$1,5235E - 2$
10	0,9974231	$3,3231E - 4$	$2,4417E - 8$
15	0,9998478	$8,3476E - 6$	0,33134
20	1,000023	$4,6728E - 3$	0,19740

Tablica 6. Wpływ długości kroku przeszukiwania  $HD$  na wartości błędów spełnienia warunków brzegowych  $ER1$  i  $ER2$  dla  $E = 0,5$ ,  $F = 10$ ,  $G = 1$

$HD$	$M = 4$		$M = 8$	
	$ER1$	$ER2$	$ER1$	$ER2$
0,2	$7,9621E - 6$	$1,1187E - 2$	$2,0400E - 5$	0,36969
0,1	$1,4705E - 5$	$1,1440E - 2$	$5,2147E - 5$	0,80900
0,05	$1,4705E - 5$	$1,2728E - 2$	$2,8864E - 4$	1,27516
0,01	$1,4880E - 5$	$1,2728E - 2$	$2,9720E - 4$	1,29985
0,005	$1,5069E - 5$	$1,2736E - 2$	$3,0039E - 4$	1,29985
0,001	$1,5189E - 5$	$1,2736E - 2$	$3,0609E - 4$	1,30090

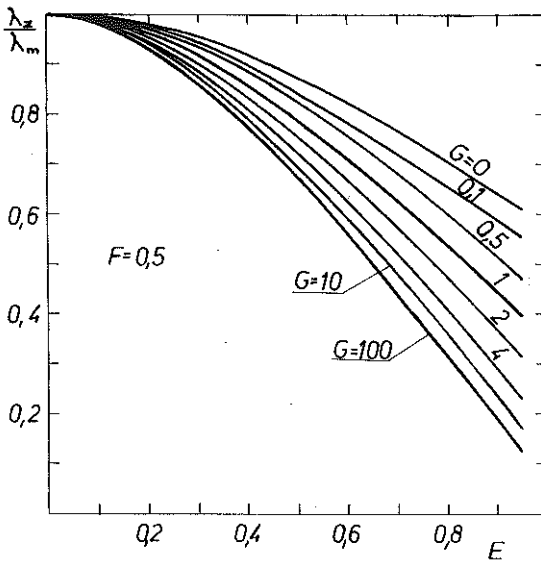


Rys. 2 Wartości efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda_z$  w funkcji stosunku średnicy włókien do odległości między włóknami  $E$  i bezwymiarowego oporu powierzchniowego  $G$  przy identycznych współczynnika przewodzenia ciepła włókien i osnowy ( $F = 1$ )

gowego (2.6), czyli

$$(3.2) \quad ER2 = \max \left| \frac{\partial T_{II}(X, 1)}{\partial Y} \right| \quad \text{dla } 0 < X < 1.$$

Już przy kilku punktach kollokacji ( $M > 4$ ) na brzegu  $BC$  i  $CD$  wartości efektywnego współczynnika przewodzenia na trzech miejscach znaczących są stabilne. Dla wartości parametru  $E$  bliskim maksymalnym istnieją trudności z uzyskaniem stabilnych wartości wyników na trzech miejscach znaczących oraz odpowiednio małego błędu spełnienia warunków brzegowych pomiędzy punktami kollokacji. Sytuację tę ilustrują tablice 2 i 3. Wówczas na rezultaty mają również wpływ wartości pozostałych dwóch parametrów, tzn.  $F$  i  $G$ . Generalnie, przy ustalonych pozostałych parametrach, najmniejsze błędy uzyskuje się jeśli  $F = 1$  (identyczna przewodność cieplna włókien i osnowy) oraz  $G = 0$  (doskonały kontakt termiczny). Im bardziej parametry  $F$  i  $G$  różnią się od tych granicznych wartości, tym trudniej jest uzyskać odpowiednią dokładność. Z tego powodu wyniki błędów w tablicy 2 są korzystniejsze niż w tablicy 3. Jeśli wartości parametrów  $E, F$  i  $G$  są wyjątkowo niekorzystne, to może okazać się, że zastosowana metoda



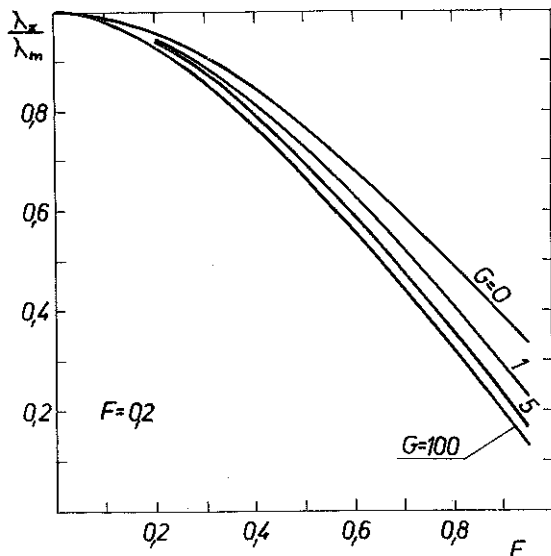
Rys. 3 Wartości efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda_z$  w funkcji stosunku średnicy włókien do odległości między włóknami  $E$  i bezwymiarowego oporu powierzchniowego  $G$  przy stosunku współczynnika przewodzenia ciepła we włóknach do współczynnika przewodzenia w osnowie  $F = 0,5$

nie daje zadowalających rezultatów niezależnie od punktów kollokacji (patrz tablica 4):

Należy zauważyć, że powiększenie ilości punktów kollokacji prowadzi w końcu do złego uwarunkowania układu równań liniowych. Związane to jest z faktem, że zagęszczenie punktów kollokacji powoduje, iż sąsiadujące ze sobą punkty kollokacji dają równania niewiele różniące się od siebie. Sytuację utraty dokładności rezultatów wskutek złego uwarunkowania układu równań liniowych ilustruje tablica 5.

Ponieważ  $F = 1$ , ponadto  $G = 0$ , więc  $\lambda_z/\lambda_m$  powinno być równe jedności. Wartość taką uzyskujemy dla  $M < 6$ , po czym wskutek złego uwarunkowania wyniki coraz bardziej odbiegają od tej wartości.

Wartości maksymalnych błędów określone wzorami (3.1) i (3.2) były wyznaczane metodą przeszukiwania. Jak już wspomniano długość kroku przeszukiwania określa parametr  $HD$ . W tablicy 6 przedstawiono wpływ tego parametru na wartości maksymalnych błędów  $ER1$  i  $ER2$ . Widocznym jest, że po przekroczeniu pewnej niezbyt małej wartości  $HD$  (około

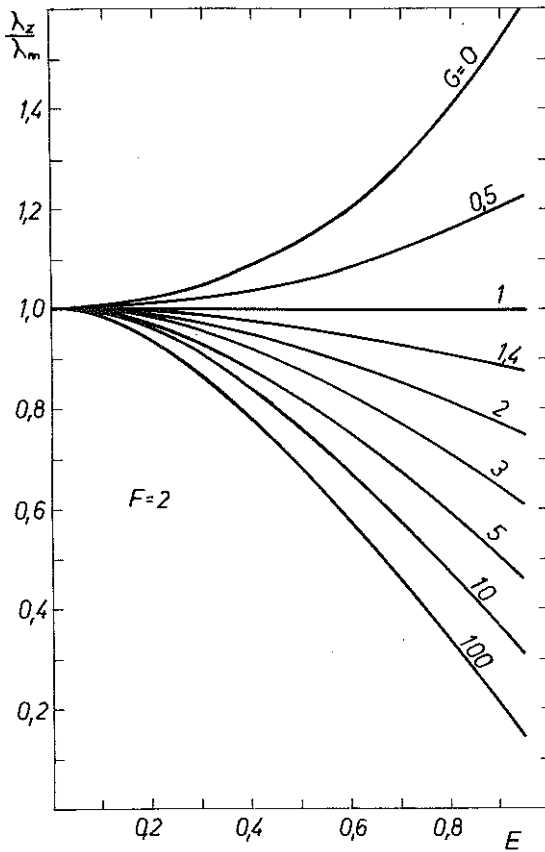


Rys. 4 Wartości efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda_x$  w funkcji stosunku średnicy włókien do odległości między włóknami  $E$  i bezwymiarowego oporu powierzchniowego  $G$  przy stosunku współczynnika przewodzenia ciepła we włóknach do współczynnika przewodzenia w osnowie  $F = 0,2$

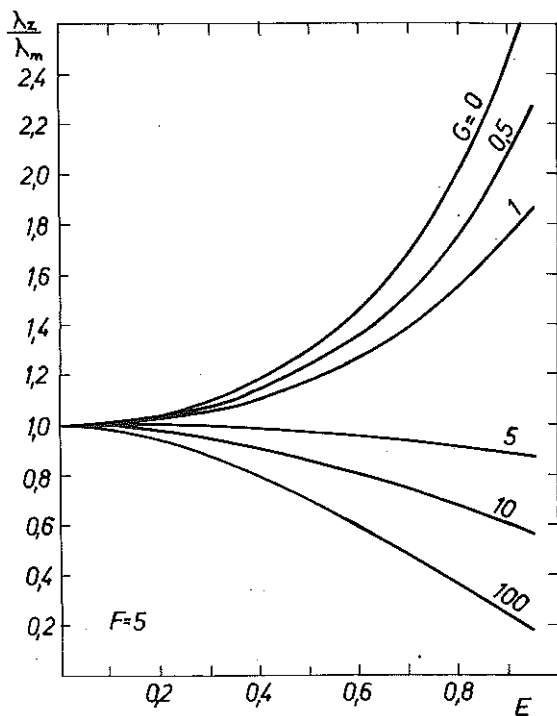
0,01) wartości błędów zmieniają się nieznacznie i dalsze pomniejszanie kroku przeszukiwania traci sens. Ponieważ mamy do czynienia z równaniem Laplace'a i metodą brzegową, więc wartości maksymalnych błędów na brzegu są maksymalnymi błędami metody [15].

Na rys 2-6 przedstawiono wpływ parametrów fizycznych, tj. stosunku średnicy włókien do odległości pomiędzy włóknami -  $E$ , stosunku współczynnika przewodzenia ciepła we włóknach do współczynnika przewodzenia w osnowie -  $F$  oraz parametru oporu powierzchniowego na granicy włókien i osnowy -  $G$  na wartość efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła.

W konkluzji należy zauważyć, że przedstawiona metoda wyznaczania efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła, poza granicznymi przypadkami maksymalnej gęstości upakowania włókien i doskonałego oporu cieplnego na granicy składników, jest prosta i efektywna. W łatwy sposób może być zastosowana do innych regularnych konfiguracji ułożenia włókien w osnowie.



Rys. 5 Wartości efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda_z$  w funkcji stosunku średnicy włókien do odległości między włóknami  $E$  i bezwymiarowego oporu powierzchniowego  $G$  przy stosunku współczynnika przewodzenia ciepła we włóknach do współczynnika przewodzenia w osnowie  $F = 2$



Rys. 6 Wartości efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda_z$  w funkcji stosunku średnicy włókien do odległości między włóknami  $E$  i bezwymiarowego oporu powierzchniowego  $G$  przy stosunku współczynnika przewodzenia ciepła we włóknach do współczynnika przewodzenia w osnowie  $F = 5$



## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. G.K.BAECHELOR, *Transport properties of two-phase materials with random structures*, A.Rev.Fluid Mech., **6**, 227-255, 1974.
2. D.K.HALE, *The physical properties of composite materials*, J.Mat.Scie., **11**, 2105-2141, 1976.
3. Composite Materials, [ed.] L.J.BROUTMAN and R.H.KROCK, vol. 1, *Interfaces in metal matrix composites*, [ed.] A.G.Metcalf, Academic Press, New York 1974.
4. Y.BENVENISTE, T.MILOH, *The effective conductivity of composites with imperfect thermal contact at constituent interfaces*, Int.J.Eng.Sci., **24**, 1537-1552, 1986.
5. C.V.MADHUSUDANA, L.FLETCHER, *Contact heat transfer - the last decade*, AIAA Jour., **24**, 510-523, 1986.
6. J.A.KOŁODZIEJ, *Określenie poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej kompozytu o jednokierunkowo ułożonych włóknach metodą kollokacji brzegowej*, Mech.Teoret. i Stos., **23**, 355-373, 1985.
7. J.B.KELLER, *Effective behaviour of heterogeneous media*, in Statistical mechanics and statistical methods in theory and applications, [ed.] R.Landman, 631-644, New York 1977.
8. D.R. AXELROD, *Micromechanics of solids*, Elsevier Scientific Publ., New York 1978.
9. M.J.BERAN, J.J.MCCOY, *Mean field variation in random media*, Quar.Appl.Match., **37**, 245-258, 1970.
10. I.BABUSKA, *Homogenization and its application. Mathematical and computational problems*, in Numerical Solution of Partial Differential Equations III, [ed.] B.Hubbard, 89-116, Academic Press, New York 1976.
11. A.BENSOUSAN, J.L.LIONS, G.PAPANICOLAOU, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland, Amsterdam 1978.
12. E.SANCHEZ-PALECIA, *Non-hogeneous media and vibration theory*, Springer, Berlin 1980.
13. H.S.CARSLAW, J.C.JAEGER, *Conduction of heat in solid*, Oxford University Press, London 1959.
14. J.A.KOŁODZIEJ, *Review of application of boundary collocations methods in mechanics of continuous media*, Solid Mech.Arch., **12**, 187-231, 1987.
15. L.COLLATZ, *The numerical treatment of differential equations*, Springer, Berlin 1960.

## Резюме

**ЭФФЕКТИВНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ КОМПОЗИТА  
УКРЕПЛЕННОГО ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ ВОЛОКНАМИ ПРИ НЕИДЕАЛЬНОМ  
ТЕРМИЧЕСКОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ КОМПОНЕНТАМИ**

Представлен общий метод определения эффективного поперечного коэффициента теплопроводности в композитах укрепленных однонаправленными волокнами при неидеальном термическом контакте между компонентами. Предполагая знание геометрии регулярного расположения волокон, коэффициентов теплопроводности компонентов, а также коэффициента теплового сопротивления между компонентами. Численные результаты приведены для волокон распределенных квадратной сетке.

## SUMMARY

**EFFECTIVE THERMAL CONDUCTIVITY OF FIBROUS COMPOSITES UNDER  
IMPERFECT THERMAL CONTACT BETWEEN THE COMPONENTS**

A general method of determination of effective transversal thermal conductivity of fibrous composites is proposed under the assumption of imperfect thermal contact between the components. Geometry of regular fiber distribution, thermal conductivity of individual components and thermal resistance at the interfaces are assumed to be known. Numerical results for the case of square fiber arrays are given.

**POLITECHNIKA POZNAŃSKA,  
INSTYTUT MECHANIKI STOSOWANEJ**

*Praca została złożona w Redakcji dnia 27 grudnia 1988 r.*