

DYNAMIKA PŁYTY O LOSOWYCH PARAMETRACH JAKO KONSTRUKCJI WSPORCZEJ POD MASZINY⁽¹⁾

WŁADYSŁAW M I R O N O W I C Z, PAWEŁ Ś N I A D Y
(WROCLAW)

Przedstawiono rozwiązanie problemu drgań własnych i wymuszonych układu złożonego z prostokątnej płyty typu Mindlina podpartej sprężystość w obszarze i na obwodzie oraz sztywnych brył sprężystość opartych na płycie. Układ taki może być modelem konstrukcji wsporczej pod maszyny. Przyjęto, że niektóre parametry układu oraz obciążenia są losowe. Przy założeniu, że wielkości fluktuacji losowych są małe w porównaniu z wartościami oczekiwanymi odpowiednich charakterystyk, zastosowano metodę linearyzacji stochastycznej. Przedstawiono także rozwiązanie metodą kolejnych realizacji. Uzyskano wyniki w zakresie teorii korelacyjnej. Rozwiązanie zilustrowano przykładami analizy drgań własnych i wymuszonych płyty prostokątnej spełniającej warunki swobodnego podparcia a obciążonej sztywną bryłą, a także drgań własnych płyty o swobodnych brzegach - opartej na słupach i obciążonej sztywną bryłą. Analizowano przy tym wpływ losowego charakteru wybranych charakterystyk układu i obciążenia na rozwiązanie.

1. WSTĘP

Płyta o stosunkowo dużej grubości, charakteryzująca się znaczną sztywnością i masą, jest często stosowanym elementem konstrukcji wsporczych pod maszyny. Może ona występować na przykład jako fundament płytowy oparty na podłożu gruntowym oraz ewentualnie murach lub palach (traktowany niekiedy w sposób przybliżony jako niski fundament blokowy [1]), jako masywny strop lub pomost pod ciężkie maszyny, jako płyta górna fundamentu pod turbozespół (według najnowszej koncepcji płyta taka podparta jest quasi-punktowo za pomocą

⁽¹⁾Praca wykonana w ramach C.P.B.P. nr 02.01./2.9

sprężynowych zespołów wibroizolujących i może być traktowana jako oddzielna konstrukcja [2]). Modelem takich konstrukcji powinna być płyta gruba, podparta sprężystością w obszarze i na obwodzie, a dźwigająca bryły modelujące maszyny. Niektóre parametry, zwłaszcza sztywności więzi, powinny być traktowane jako losowe - ze względu na trudność określenia ich charakterystyk (na przykład sztywność zamocowania stropu) oraz ich zmianę w czasie (na przykład nierównomierne osiadanie).

Literatura dotycząca dynamiki płyt grubych jest bogata. Mając na uwadze testowanie proponowanych metod oraz analizę wpływu różnych parametrów, rozważano przede wszystkim problem drgań własnych izotropowych, prostokątnych płyt opartych niepodatnie na obwodzie [3-8]. Rozpatrywano też płyty ortotropowe [3,4,9], anizotropowe [3], warstwowe [10,11]. Uwzględniano wpływ dużych sił osiowych [3] i podłoża sprężystego [3,7,11]. Zakładano, że parametry opisujące układ są stałe i deterministyczne. Rozpatrywano także drgania wymuszone o różnej, deterministycznej postaci [3,12].

Przedmiotem niniejszej pracy jest rozwiązanie problemu drgań własnych i wymuszonych prostokątnej płyty grubej, podpartej sprężystością w obszarze i na obwodzie, a dźwigającej sprężystością oparte na niej sztywne bryły. Zakłada się, że niektóre charakterystyki układu i wymuszenia są losowe. Rozwiązanie formuluje się wykorzystując teorię płyt Mindlina [5], metodę linearyzacji stochastycznej oraz metodę kolejnych realizacji [15].

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

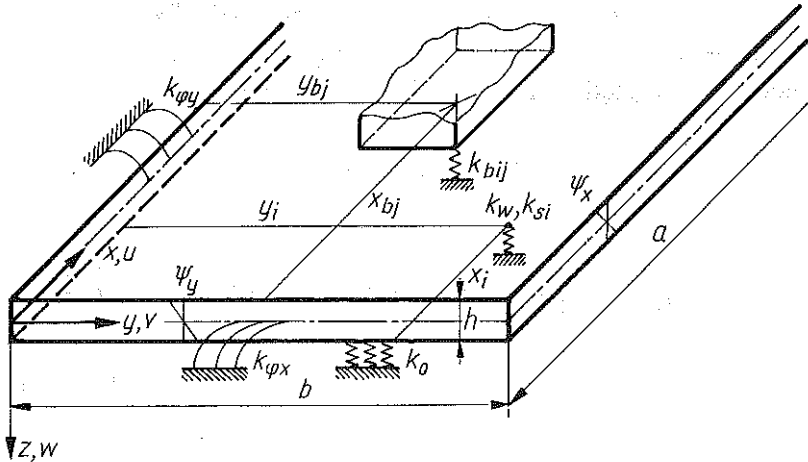
Rozpatrzmy płytę prostokątną pokazaną na rys.1.

Charakteryzują ją: moduł sprężystości E , współczynnik Poissona ν , współczynnik odkształcenia postaciowego κ^2 , gęstość ρ , sztywność podłoża Winklera k_w , sztywność punktowych więzi sprężystych k_s , sztywności więzi obwodowych $k_0, k_{\varphi x}, k_{\varphi y}$. Załóżmy, że wielkości $h, \rho, k_w, k_s, k_{\varphi x}, k_{\varphi y}$ są losowe i napiszemy je w postaci sum ich wartości oczekiwanych i losowych fluktuacji (tu i w dalszych rozważaniach symbol (\circ) oznacza wartość oczekiwaną, a $(\tilde{})$ losową fluktuację)

$$(2.1) \quad \begin{aligned} h &= \overset{\circ}{h} + \tilde{h}, & \rho &= \overset{\circ}{\rho} + \tilde{\rho}, & k_w &= \overset{\circ}{k_w} + \tilde{k}_w, \\ k_s &= \overset{\circ}{k_s} + \tilde{k}_s, & k_{\varphi x} &= \overset{\circ}{k_{\varphi x}} + \tilde{k}_{\varphi x}, & k_{\varphi y} &= \overset{\circ}{k_{\varphi y}} + \tilde{k}_{\varphi y}, \end{aligned}$$

przy czym wartości oczekiwane

$$E[h] = \bar{h}, \quad E[\rho] = \bar{\rho}, \quad E[k_w] = \bar{k}_w \dots$$



Rys. 1

Spoczywającą na płycie j -tą bryłę charakteryzują macierze bezwładności B_{bj} i sztywności K_{bj} oraz sztywność wibroizolacji bryły $k_{bj} = \overset{\circ}{k}_{bj} + \tilde{k}_{bj}$.

Stosując metodę linearyzacji stochastycznej przyjmijmy, że losowe fluktuacje parametrów układu są na tyle małe w porównaniu z ich wartościami oczekiwanymi, że metoda probabilistyczna I rzędu [13,14] daje dobre przybliżenie poszukiwanego rozwiązania. W tej sytuacji iloczyn dwóch wielkości losowych X i Y przybiera postać

$$(2.2) \quad XY = \overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y} + \overset{\circ}{X}\tilde{Y} + \tilde{X}\overset{\circ}{Y}$$

Energię potencjalną odpowiadającą jednostce powierzchni płyty, zgodnie z teorią Mindlina, przedstawia relacja [6]

$$(2.3) \quad dE_{pp} = \frac{1}{2} \frac{E}{24(1-\nu^2)} [(1+\nu)h^3(\Gamma_x + \Gamma_y)^2 + \\ + 12\kappa^2(1-\nu)h(\Gamma_{yz}^2 + \Gamma_{xz}^2) + (1-\nu)h^3((\Gamma_x - \Gamma_y)^2 + \Gamma_{yx}^2)],$$

gdzie

$$\Gamma_x = \psi_{x,x}, \quad \Gamma_y = \psi_{y,y}, \quad \Gamma_{yx} = \psi_{y,x} + \psi_{x,y}, \quad \Gamma_{xz} = \psi_x + w_{,x}, \\ \Gamma_{yz} = \psi_y + w_{,y}, \quad \psi_x = \gamma_x - w_{,x}, \quad \psi_y = \gamma_y - w_{,y},$$

w oznacza ugięcie płyty, γ_x, γ_y - kąty odkształcenia postaciowego.

Załóżmy:

$$(2.4) \quad w = \mathbf{q}^T(t)V(x, y), \quad \psi_x = \mathbf{g}_x^T(t)U_x(x, y), \quad \psi_y = \mathbf{g}_y^T(t)U_y(x, y),$$

$$\mathbf{q} = \mathring{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{g}_x = \mathring{\mathbf{g}}_x + \tilde{\mathbf{g}}_x, \quad \mathbf{g}_y = \mathring{\mathbf{g}}_y + \tilde{\mathbf{g}}_y.$$

Macierz sztywności płyty, wywodząca się z (2.3), w bazie $r_1 = [\mathbf{q}, \mathbf{g}_x, \mathbf{g}_y]^T$ - przybiera po uwzględnieniu (2.2) i (2.4) postać

$$(2.5) \quad \mathbf{K}_{p1} = \mathring{\mathbf{K}}_p + \tilde{\mathbf{K}}_p,$$

gdzie

$$\mathring{\mathbf{K}}_p = \frac{E}{24(1-\nu^2)} \iint \left[(1+\nu) \mathring{h}^3 \mathbf{Z}_1 + 12\kappa^2(1-\nu) \mathring{h} \mathbf{Z}_2 + \right. \\ \left. + (1-\nu) \mathring{h}^3 \mathbf{Z}_3 \right] dx dy,$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_p = \frac{E}{24(1-\nu^2)} \iint \left[(1+\nu) 3 \mathring{h}^2 \mathbf{Z}_1 + 12\kappa^2(1-\nu) \mathbf{Z}_2 + \right. \\ \left. + (1-\nu) 3 \mathring{h}^2 \mathbf{Z}_3 \right] \tilde{h} dx dy,$$

$$(2.6) \quad \mathbf{Z}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_3^T & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_6 + \mathbf{A}_7) & \mathbf{A}_8 & \mathbf{A}_9 \\ \mathbf{A}_8^T & \mathbf{A}_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_9^T & \mathbf{0} & \mathbf{A}_5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Z}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_{11}) & (-\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_{12}) \\ \mathbf{0} & (-\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_{12})^T & (\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_{10}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{U}_{x,x} \mathbf{U}_{x,x}^T, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{U}_{y,y} \mathbf{U}_{y,y}^T, \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{U}_{x,x} \mathbf{U}_{y,y}^T,$$

$$\mathbf{A}_4 = \mathbf{U}_x \mathbf{U}_x^T, \quad \mathbf{A}_5 = \mathbf{U}_y \mathbf{U}_y^T,$$

$$\mathbf{A}_6 = \mathbf{V}_{,x} \mathbf{V}_{,x}^T, \quad \mathbf{A}_7 = \mathbf{V}_{,y} \mathbf{V}_{,y}^T, \quad \mathbf{A}_8 = \mathbf{V}_{,x} \mathbf{U}_x^T,$$

$$\mathbf{A}_9 = \mathbf{V}_{,y} \mathbf{U}_y^T, \quad \mathbf{A}_{10} = \mathbf{U}_{y,x} \mathbf{U}_{y,x}^T,$$

$$\mathbf{A}_{11} = \mathbf{U}_{x,y} \mathbf{U}_{x,y}^T, \quad \mathbf{A}_{12} = \mathbf{U}_{x,y} \mathbf{U}_{y,x}^T, \quad \mathbf{A}_{13} = \mathbf{V} \mathbf{V}^T.$$

Macierz sztywności więzi sprężystych w bazie $\mathbf{r} = [\mathbf{q}, \mathbf{g}_x, \mathbf{g}_y, \mathbf{q}_b]^T$ (\mathbf{q}_b - wektor współrzędnych uogólnionych opisujących ruch bryły) ma postać

$$\mathbf{K}_{spr} = \mathring{\mathbf{K}}_{spr} + \tilde{\mathbf{K}}_{spr},$$

gdzie

$$\mathring{\mathbf{K}}_{spr} = \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{K}}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathring{\mathbf{K}}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathring{\mathbf{K}}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathring{\mathbf{K}}_{33} & \mathbf{0} \\ \mathring{\mathbf{K}}_{14}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathring{\mathbf{K}}_{44} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathring{\mathbf{K}}_{11} = & \int_0^a \int_0^b \mathring{k}_w(x, y) \mathbf{A}_{13} dx dy + \int_0^b \mathring{k}_o(y) \mathbf{A}_{13}(0, y) dy + \\ & + \int_0^b \mathring{k}_o(y) \mathbf{A}_{13}(a, y) dy + \int_0^a \mathring{k}_o(x) \mathbf{A}_{13}(x, 0) dx + \\ & + \int_0^a \mathring{k}_o(x) \mathbf{A}_{13}(x, b) dx + \sum_i \mathring{k}_{si} \mathbf{A}_{13i} + \sum_j \sum_i \mathring{k}_{bji} \mathbf{A}_{13ji}, \end{aligned}$$

$$(2.7) \quad \mathring{\mathbf{K}}_{22} = \int_0^b \mathring{k}_{\varphi x}(y) \mathbf{A}_4(0, y) dy + \int_0^b \mathring{k}_{\varphi x}(y) \mathbf{A}_4(a, y) dy,$$

$$\mathring{\mathbf{K}}_{33} = \int_0^a \mathring{k}_{\varphi y}(x) \mathbf{A}_5(x, 0) dx + \int_0^a \mathring{k}_{\varphi y}(x) \mathbf{A}_5(x, b) dx,$$

$$\mathring{\mathbf{K}}_{44} = \sum_j \sum_i \mathring{k}_{bji} (\mathbf{U}_b \mathbf{U}_b^T)_{ji}, \quad \mathring{\mathbf{K}}_{14} = - \sum_j \sum_i \mathring{k}_{bji} (\mathbf{V} \mathbf{U}_b^T)_{ji}$$

k_{bji} - oznacza sztywność wibroizolacji w punkcie i bloku j .

Macierz $\mathring{\mathbf{K}}_{spr}$ ma postać (2.7) z tym, że zamiast wartości oczekiwanych sztywności więzi występują ich fluktuacje.

Macierz sztywności całego układu w bazie \mathbf{r}

$$(2.8) \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_{spr},$$

przy czym \mathbf{K}_p jest macierzą (2.5) uzupełnioną zerową kolumną i zerowym wierszem odpowiadającymi w wektorze \mathbf{r} współrzędnej q_b .

Energię kinetyczną płyty opisuje relacja

$$dE_k = \frac{\rho h^3}{24} (\psi_{x,t}^2 + \psi_{y,t}^2) + \frac{\rho h}{2} w_{t}^2.$$

Macierz bezwładności układu zbudowanego z płyty i sztywnych brył przybiera w bazie \mathbf{r} postać

$$(2.9) \quad \mathbf{B} = \mathring{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{B}},$$

gdzie

$$\mathring{\mathbf{B}} = \text{diag} \left[\int_0^a \int_0^b \mathring{\rho} \mathring{h} \mathbf{A}_{13} dx dy, \int_0^a \int_0^b \frac{1}{12} \mathring{\rho} \mathring{h}^3 \mathbf{A}_4 dx dy, \right. \\ \left. \int_0^a \int_0^b \frac{1}{12} \mathring{\rho} \mathring{h}^3 \mathbf{A}_5 dx dy, \sum_i \mathbf{B}_{6i} \right],$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \text{diag} \left[\int_0^a \int_0^b (\mathring{\rho} \tilde{h} + \mathring{h} \tilde{\rho}) \mathbf{A}_{13} dx dy, \int_0^a \int_0^b \frac{1}{12} (3 \mathring{\rho} \mathring{h}^2 \tilde{h} + \mathring{h}^3 \tilde{\rho}) \mathbf{A}_4 dx dy, \right. \\ \left. \int_0^a \int_0^b \frac{1}{12} (3 \mathring{\rho} \mathring{h}^2 \tilde{h} + \mathring{h}^3 \tilde{\rho}) \mathbf{A}_5 dx dy, \mathbf{0} \right].$$

W szczególnym przypadku, gdy $k_o = \infty$, $k_{\varphi x} \neq \infty$, $k_{\varphi y} \neq \infty$, $k_w \neq \infty$, $k_s \neq \infty$, możliwe jest przyjęcie aproksymacji odpowiadającej płycie swobodnie podpartej

$$(2.10) \quad \mathbf{V} = \mathbf{s}(\xi) \star \mathbf{s}(\eta), \quad \mathbf{U}_x = \mathbf{c}(\xi) \star \mathbf{s}(\eta), \quad \mathbf{U}_y = \mathbf{s}(\xi) \star \mathbf{c}(\eta),$$

gdzie $\xi = x/a$, $\eta = y/b$, \star oznacza mnożenie tensorowe,

$$\mathbf{s}(\theta) = [\sin \pi\theta, \sin 2\pi\theta, \dots]^T, \quad \mathbf{c}(\theta) = [\cos \pi\theta, \cos 2\pi\theta, \dots]^T.$$

W sytuacji, gdy parametry (2.1) są zmiennymi losowymi, macierze (2.6), (2.7), (2.9) przybierają szczególnie prostą postać.

Oznaczając $\iint \mathbf{A}_i dx dy = \mathbf{a}_i$, mamy:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_6 = \mathbf{a}_{10} = \frac{1}{4} \delta^{-1} \{d\}^2 \star \mathbf{I}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_7 = \mathbf{a}_{11} = \frac{1}{4} \delta \mathbf{I} \star \{d\}^2, \\ \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_{12}^T = \frac{1}{4} \{d\} \mathbf{I} \star \mathbf{I} \{d\}, \quad \mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_{13} = \frac{1}{4} ab \mathbf{I} \star \mathbf{I}, \\ \mathbf{a}_8 = \frac{1}{4} b \{d\} \mathbf{I} \star \mathbf{I}, \quad \mathbf{a}_9 = \frac{1}{4} a \mathbf{I} \star \{d\} \mathbf{I},$$

gdzie

$$\mathbf{I} = \text{diag}[1, 1, 1, \dots], \quad \delta = a/b, \quad \{d\} = \text{diag}(i\pi), \quad i = 1, 2, \dots$$

Poza tym jest:

$$(2.11) \quad \mathring{\mathbf{K}}_{11} = \frac{1}{4} ab \mathring{k}_w \mathbf{I} \star \mathbf{I} + \sum_i \mathring{k}_{si} \mathbf{A}_{13i}, \\ \mathring{\mathbf{K}}_{22} = \frac{1}{4} b \mathring{k}_{\varphi x} ([J_{ij}] \star \mathbf{I} + [L_{ij}] \star \mathbf{I}), \\ \mathring{\mathbf{K}}_{33} = \frac{1}{4} a \mathring{k}_{\varphi y} (\mathbf{I} \star [J_{ij}] + \mathbf{I} \star [L_{ij}]),$$

gdzie

$$J_{ij} = 1, \quad L_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } (i+j) \text{ jest liczbą parzystą,} \\ -1 & \text{gdy } (i+j) \text{ jest liczbą nieparzystą,} \end{cases}$$

$$\mathring{\mathbf{B}} = \frac{1}{4}ab\rho \text{diag} \left[\mathring{h} (\mathbf{I} \star \mathbf{I}), \frac{1}{12} \mathring{h}^3 (\mathbf{I} \star \mathbf{I}), \frac{1}{12} \mathring{h}^3 (\mathbf{I} \star \mathbf{I}) \right],$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{4}ab \text{diag} \left[(\mathring{\rho} \tilde{h} + \mathring{h} \tilde{\rho})(\mathbf{I} \star \mathbf{I}), \frac{1}{12} (3 \mathring{\rho} \mathring{h}^2 \tilde{h} + \mathring{h}^3 \tilde{\rho})(\mathbf{I} \star \mathbf{I}), \right. \\ \left. \frac{1}{12} (3 \mathring{\rho} \mathring{h}^2 \tilde{h} + \mathring{h}^3 \tilde{\rho})(\mathbf{I} \star \mathbf{I}) \right].$$

Obciążenie dynamiczne układu opisuje wektor

$$\mathbf{f}(t) = \mathring{\mathbf{f}}(t) + \tilde{\mathbf{f}}(t).$$

3. ZAGADNIENIE WŁASNE

Zagadnienie własne opisuje równanie

$$(3.1) \quad (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B})\mathbf{r} = 0,$$

gdzie $\lambda = \mathring{\lambda} + \tilde{\lambda} = \omega^2$, $\mathbf{r} = \mathring{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{r}}$.

Opierając się na metodzie linearyzacji stochastycznej, po zastosowaniu do (3.1) operacji wartości oczekiwanej, otrzymuje się

$$(\mathring{\mathbf{K}} - \mathring{\lambda} \mathring{\mathbf{B}}) \mathring{\mathbf{r}} = 0,$$

skąd można uzyskać wartości własne $\mathring{\lambda}_i$ i wektory własne $\mathring{\mathbf{w}}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) tworzące macierz własną $\mathring{\mathbf{W}}$.

Losowe fluktuacje wartości własnych przedstawia relacja

$$(3.2) \quad \tilde{\lambda}_i = \mathring{b}_i^{-1} \mathring{\mathbf{w}}_i^T (\tilde{\mathbf{K}} - \mathring{\lambda}_i \tilde{\mathbf{B}}) \mathring{\mathbf{w}}_i,$$

gdzie $\mathring{b}_i = \mathring{\mathbf{w}}_i^T \mathring{\mathbf{B}} \mathring{\mathbf{w}}_i$, kowariancję zaś ($\phi = \mathring{\mathbf{w}}_i \mathring{\mathbf{w}}_j^T$)

$$(3.3) \quad \text{cov}(\tilde{\lambda}_i, \tilde{\lambda}_j) = \mathring{b}_i^{-1} \mathring{b}_j^{-1} \mathring{\mathbf{w}}_i^T \{ E[\tilde{\mathbf{K}} \phi \tilde{\mathbf{K}}^T] + \mathring{\lambda}_i \mathring{\lambda}_j E[\tilde{\mathbf{B}} \phi \tilde{\mathbf{B}}^T] - \\ - \mathring{\lambda}_j E[\tilde{\mathbf{K}} \phi \tilde{\mathbf{B}}^T] - \mathring{\lambda}_i E[\tilde{\mathbf{B}} \phi \tilde{\mathbf{K}}^T] \} \mathring{\mathbf{w}}_j.$$

Elementy r, s macierzy składowych (3.3) mają postać wyrażoną ogólnym wzorem

$$E[\tilde{X}\phi\tilde{Y}]_{rs} = \sum_{l=1}^n \sum_{h=1}^n \phi_{lh} E[\tilde{X}_{rl}\tilde{Y}_{sh}].$$

Opierając się na metodzie kolejnych realizacji korzystamy z równania (3.1), w którym macierze \mathbf{B} i \mathbf{K} są zależne od parametrów $h, \rho, k_w, k_s, k_{\varphi x}, k_{\varphi y}$ mających cechy losowe oraz pozostałych, deterministycznych parametrów. Zbiór rozwiązań równania (3.1) dla każdorazowo ustalonych wartości $h, \rho, k_w, k_s, k_{\varphi x}, k_{\varphi y}$ oraz zbiór odpowiadających im prawdopodobieństw P - umożliwiają określenie charakterystyk rozwiązania. Wartość oczekiwaną wartości własnych określa relacja

$$(3.4) \quad E[\lambda] = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \lambda(h_i, \rho_j, k_{w,k}, k_{s,l}, k_{\varphi x,m}, k_{\varphi y,n}) \cdot P(h_i, \rho_j, k_{w,k}, k_{s,l}, k_{\varphi x,m}, k_{\varphi y,n}),$$

wariancja zaś ma postać

$$(3.5) \quad \delta_\lambda^2 = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n (\lambda(h_i, \rho_j, k_{w,k}, k_{s,l}, k_{\varphi x,m}, k_{\varphi y,n}) - \bar{\lambda})^2 \cdot P(h_i, \rho_j, k_{w,k}, k_{s,l}, k_{\varphi x,m}, k_{\varphi y,n}).$$

Gdy zmienne mające cechy losowe są niezależne, co w rozpatrywanym przypadku jest technicznie uzasadnione, to

$$(3.6) \quad P(h_i, \rho_j, k_{w,k}, \dots) = P(h_i)P(\rho_j)P(k_{w,k}) \dots$$

4. DRGANIA WYMUSZONE

Zagadnienie drgań wymuszonych opisuje równanie

$$(4.1) \quad \mathbf{B}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{f}(t),$$

w którym macierze \mathbf{B}, \mathbf{K} dane są w postaci (2.8), (2.9). Przy założeniu zerowych warunków początkowych, z równania (4.1) wynikają równania

$$(4.2) \quad \overset{\circ}{\mathbf{B}}\ddot{\overset{\circ}{\mathbf{r}}} + \overset{\circ}{\mathbf{C}}\dot{\overset{\circ}{\mathbf{r}}} + \overset{\circ}{\mathbf{K}}\overset{\circ}{\mathbf{r}} = \overset{\circ}{\mathbf{f}}(t),$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{B}}\ddot{\overset{\circ}{\mathbf{r}}} + \overset{\circ}{\mathbf{C}}\dot{\overset{\circ}{\mathbf{r}}} + \overset{\circ}{\mathbf{K}}\overset{\circ}{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{f}}(t) - \tilde{\mathbf{B}}\ddot{\overset{\circ}{\mathbf{r}}} - \tilde{\mathbf{C}}\dot{\overset{\circ}{\mathbf{r}}} - \tilde{\mathbf{K}}\overset{\circ}{\mathbf{r}},$$

określające wartość oczekiwaną i losową fluktuację wektora \mathbf{r} .

Przy założeniu $\mathbf{C} = \mu\mathbf{B} + \beta\mathbf{K}$ można sformułować rozwiązanie z wykorzystaniem transformacji własnej (μ, β - stałe)

$$\dot{\mathbf{r}} = \overset{\circ}{\mathbf{W}}\dot{\mathbf{y}}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{W}}\tilde{\mathbf{y}}$$

oraz impulsowej funkcji przejścia $\overset{\circ}{h}_i$. Ma ono postać

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(t) &= \int_0^t \{\overset{\circ}{h}_i(t-\tau)\} \overset{\circ}{\mathbf{W}}^T \overset{\circ}{\mathbf{f}}(\tau) d\tau, \\ \tilde{\mathbf{y}}(t) &= \int_0^t \{\overset{\circ}{h}_i(t-\tau)\} \overset{\circ}{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{f}}(\tau) d\tau - \int_0^t \{\overset{\circ}{h}_i(t-\tau)\} \overset{\circ}{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{B}} \overset{\circ}{\mathbf{W}} \ddot{\mathbf{y}}(\tau) + \overset{\circ}{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{C}} \overset{\circ}{\mathbf{W}} \ddot{\mathbf{y}}(\tau) + \overset{\circ}{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{K}} \overset{\circ}{\mathbf{W}} \dot{\mathbf{y}}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Funkcję korelacyjną współrzędnych głównych opisuje relacja

$$(4.4) \quad \mathbf{K}_{yy}(t_1, t_2) = E[\tilde{\mathbf{y}}(t_1)\tilde{\mathbf{y}}^T(t_2)].$$

Przy założeniu, że wektor $\mathbf{f}(t)$ jest niezależny od losowych charakterystyk \mathbf{B}, \mathbf{K} układu, otrzymuje się

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{K}_{yy}(t_1, t_2) &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \{\overset{\circ}{h}_i(t_1 - \tau_1)\} \overset{\circ}{\mathbf{W}}^T \mathbf{K}_{ff}(\tau_1, \tau_2) \cdot \\ &\cdot \overset{\circ}{\mathbf{W}} \{\overset{\circ}{h}_j(t_2 - \tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2 - \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \{\overset{\circ}{h}_i(t_1 - \tau_1)\} \overset{\circ}{\mathbf{W}}^T E[\tilde{\mathbf{R}}(\tau_1)\tilde{\mathbf{R}}^T(\tau_2)] \cdot \\ &\cdot \overset{\circ}{\mathbf{W}} \{\overset{\circ}{h}_j(t_2 - \tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned}$$

gdzie $\tilde{\mathbf{R}}(t) = \tilde{\mathbf{B}} \overset{\circ}{\mathbf{W}} \ddot{\mathbf{y}}(t) + \tilde{\mathbf{C}} \overset{\circ}{\mathbf{W}} \dot{\mathbf{y}}(t) + \tilde{\mathbf{K}} \overset{\circ}{\mathbf{W}} \dot{\mathbf{y}}(t)$.

Podobnie dla współrzędnych uogólnionych otrzymuje się

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= \int_0^t \overset{\circ}{\mathbf{H}}(t-\tau) \overset{\circ}{\mathbf{f}}(\tau) d\tau, \\ \tilde{\mathbf{r}}(t) &= \int_0^t \overset{\circ}{\mathbf{H}}(t-\tau) \tilde{\mathbf{f}}(\tau) d\tau - \int_0^t \overset{\circ}{\mathbf{H}}(t-\tau) \tilde{\mathbf{R}}(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

a także

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{K}_{rr}(t_1, t_2) &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \overset{\circ}{\mathbf{H}}(t_1 - \tau_1) \mathbf{K}_{ff}(t_1, t_2) \overset{\circ}{\mathbf{H}}^T(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - \\ &- \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \overset{\circ}{\mathbf{H}}(t_1 - \tau_1) E[\tilde{\mathbf{R}}(\tau_1)\tilde{\mathbf{R}}^T(\tau_2)] \overset{\circ}{\mathbf{H}}(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned}$$

gdzie $\overset{\circ}{\mathbf{H}}(t) = \overset{\circ}{\mathbf{W}} \{\overset{\circ}{h}_i(t)\} \overset{\circ}{\mathbf{W}}^T$ jest macierzą charakterystyk impulsowych.

W ważnym ze względów praktycznych przypadku, gdy

$$(4.8) \quad \mathbf{f}(t) = \mathring{\mathbf{f}}(t) + \tilde{\mathbf{f}}(t) = \mathring{\mathbf{F}} \sin pt + \tilde{\mathbf{F}} \cos pt,$$

można przyjąć rozwiązanie w postaci

$$(4.9) \quad \mathring{\mathbf{r}}(t) = \mathring{\mathbf{r}}_s \sin pt + \mathring{\mathbf{r}}_c \cos pt, \quad \tilde{\mathbf{r}}(t) = \tilde{\mathbf{r}}_s \sin pt + \tilde{\mathbf{r}}_c \cos pt.$$

Dla drgań nielumionych $\mathbf{C} \equiv 0$ i po podstawieniu (4.9) do (4.2)₁ otrzymuje się układ równań algebraicznych dla wartości oczekiwanych

$$(4.10) \quad (\mathring{\mathbf{K}} - p^2 \mathring{\mathbf{B}}) \mathring{\mathbf{r}}_s = \mathring{\mathbf{F}}, \quad (\tilde{\mathbf{K}} - p^2 \tilde{\mathbf{B}}) \tilde{\mathbf{r}}_c = 0,$$

skąd

$$\mathring{\mathbf{r}}_s = (\mathring{\mathbf{K}} - p^2 \mathring{\mathbf{B}})^{-1} \mathring{\mathbf{F}}, \quad \tilde{\mathbf{r}}_c = 0.$$

W konsekwencji, po wykorzystaniu (4.9) i (4.10), równanie (4.2) ma postać

$$(4.11) \quad (\mathring{\mathbf{K}} - p^2 \mathring{\mathbf{B}}) \tilde{\mathbf{r}}_s = \tilde{\mathbf{F}} - (\tilde{\mathbf{K}} - p^2 \tilde{\mathbf{B}}) (\mathring{\mathbf{K}} - p^2 \mathring{\mathbf{B}})^{-1} \mathring{\mathbf{F}},$$

$$(\mathring{\mathbf{K}} - p^2 \mathring{\mathbf{B}}) \tilde{\mathbf{r}}_c = 0,$$

skąd

$$\tilde{\mathbf{r}}_s = (\mathring{\mathbf{K}} - p^2 \mathring{\mathbf{B}})^{-1} \tilde{\mathbf{F}} - (\mathring{\mathbf{K}} - p^2 \mathring{\mathbf{B}})^{-1} (\tilde{\mathbf{K}} - p^2 \tilde{\mathbf{B}}) (\mathring{\mathbf{K}} - p^2 \mathring{\mathbf{B}})^{-1} \mathring{\mathbf{F}}, \quad \tilde{\mathbf{r}}_c = 0.$$

Wartość oczekiwana i funkcja korelacyjna rozwiązania, po oznaczeniu $(\mathring{\mathbf{K}} - p^2 \mathring{\mathbf{B}})^{-1} = \mathbf{N}$, przybierają postać

$$(4.12) \quad E[\mathbf{r}] = \mathring{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{N} \mathring{\mathbf{F}} \sin pt,$$

$$(4.13) \quad \mathbf{K}_{rr} = \mathbf{N} (E[\tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{F}}^T] + E[(\tilde{\mathbf{K}} - p^2 \tilde{\mathbf{B}}) \mathbf{N} \mathring{\mathbf{F}} \mathring{\mathbf{F}}^T \mathbf{N}^T (\tilde{\mathbf{K}} - p^2 \tilde{\mathbf{B}})^T]) \mathbf{N}^T \sin^2 pt.$$

Założono przy tym niezależność charakterystyk układu i wymuszenia.

Rozważmy jeszcze przypadek, gdy założenie $\mathbf{C} = \mu \mathbf{B} + \beta \mathbf{K}$ nie może być zaakceptowane i napiszmy równanie (4.1) w postaci

$$(4.14) \quad \mathbf{B}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{F}(x, y)f(t).$$

Dla uzyskania rozwiązania tego równania, przy założeniu dowolnej postaci macierzy \mathbf{C} , wprowadzimy wektor funkcyjny $\mathbf{g}(t - \tau)$, spełniający równanie

$$(4.15) \quad \mathbf{B}\ddot{\mathbf{g}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{g}} + \mathbf{K}\mathbf{g} = \mathbf{F}(x, y)\delta(t - \tau),$$

gdzie $\delta(t - \tau)$ oznacza funkcję delta Diraca.

Wartość oczekiwaną i losową fluktuację przemieszczeń uogólnionych opisują relacje

$$(4.16) \quad \begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{r}}(t) &= \int_0^t \mathbf{g}(t - \tau) \overset{\circ}{f}(\tau) d\tau, \\ \tilde{\mathbf{r}}(t) &= \int_0^t \mathbf{g}(t - \tau) \tilde{f}(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

funkcję zaś korelacyjną

$$(4.17) \quad \begin{aligned} \mathbf{K}_{rr}(t_1, t_2) &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \mathbf{g}(t_1 - \tau_1) \mathbf{K}_{ff}(t_1, t_2) \mathbf{g}^T(t_2 - \tau_2) d\tau_1, d\tau_2 - \\ &- \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \mathbf{g}(t_1 - \tau_1) E[\tilde{\mathbf{R}}(\tau_1) \tilde{\mathbf{R}}^T(\tau_2)] \mathbf{g}^T(t_2 - \tau_2) d\tau_1, d\tau_2. \end{aligned}$$

5. WYNIKI NUMERYCZNE

Analizując rozwiązanie problemu drgań własnych oparte na metodzie linearyzacji stochastycznej założono:

$$k_0 = \infty, k_{\varphi x} = k_{\varphi y} = k_s = 0, \mathbf{B}_{bj} = 0$$

oraz przyjęto aproksymację (2.10) - jak dla płyty swobodnie podpartej. Rozważono dwa przypadki losowych cech sztywności podłoża Winklera. Gdy korelacja jest typu "biały szum"

$$E[\tilde{k}_w(\xi_1, \eta_1) \tilde{k}_w(\xi_2, \eta_2)] = Q\delta(\xi_1 - \xi_2)\delta(\eta_1 - \eta_2),$$

to wariancja pierwszej wartości własnej ma postać

$$\delta_1^2 = 4Q \overset{\circ}{\rho}^{-2} \left(\overset{\circ}{h} + \frac{1}{6} \overset{\circ}{h}^3 \right)^{-2}.$$

Dla przypadku sztywności podłoża scharakteryzowanej funkcją korelacyjną

$$E[\tilde{k}_w(\xi_1, \eta_1) \tilde{k}_w(\xi_2, \eta_2)] = \alpha e^{-\beta_1 |\xi_1 - \xi_2|} e^{-\beta_2 |\eta_1 - \eta_2|},$$

gdzie α, β_1, β_2 oznaczają stałe, zmienność wariancji pierwszej wartości własnej przedstawiono na rys.2, przy czym oznaczono $c = \frac{1}{16} \alpha^{-1} a^2 b^2 \rho^{\circ 2} (\overset{\circ}{h} + \frac{1}{6} \overset{\circ}{h}^3)^2$. Zbadano też zmienność wariancji pierwszej wartości własnej w sytuacji losowych cech sprężystych utwierdzenia dwóch przeciwległych brzegów płyty, równoległych do osi y .

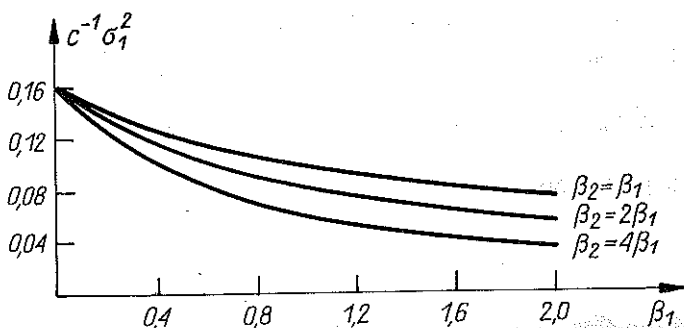
Dla funkcji korelacyjnej typu

$$E[\tilde{k}_{\varphi x}(\eta_1) \tilde{k}_{\varphi x}(\eta_2)] = \alpha e^{-\beta_1 |\eta_1 - \eta_2|}$$

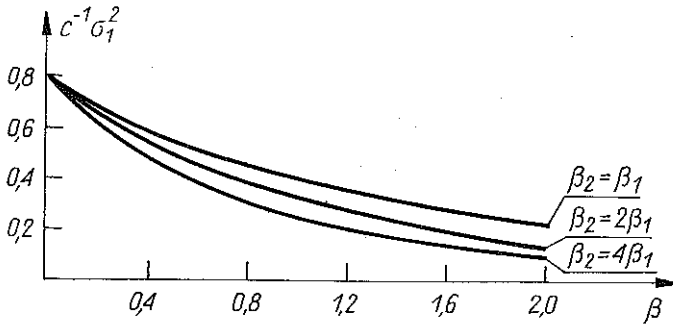
otrzymano wyniki przedstawione na rys.3. Parametr β_1 dotyczy przy tym brzegu $x = 0$, a parametr β_2 brzegu $x = a$.

Zastosowanie metody kolejnych realizacji w analizie problemu drgań własnych zilustrowano na przykładzie prostokątnej płyty o swobodnych brzegach, opartej na czterech słupach zlokalizowanych w narożach i obciążonej sztywną bryłą. Założono sztywne połączenie płyty ze słupami i sprężyste oparcie bryły na płycie. Wykorzystano algorytm sformułowany w [16]. Przyjęto, że konstrukcja wykonana jest z betonu o $\nu = 0,167$, $E = 0,3 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$, $\rho^{\circ} = 2400 \text{ kgm}^{-3}$, wymiary płyty $a = b = 8 \text{ m}$, słupy o wysokości 4 m i przekroju kwadratowym o boku $0,55 \text{ m}$. Rozważając wpływ losowego charakteru grubości płyty przyjęto $\overset{\circ}{h} = 1,2 \text{ m}$, odchylenie standardowe $\delta_h = 0,01 \text{ m}$ oraz założono, że rozkład tej grubości jest normalny, czyli gęstość rozkładu

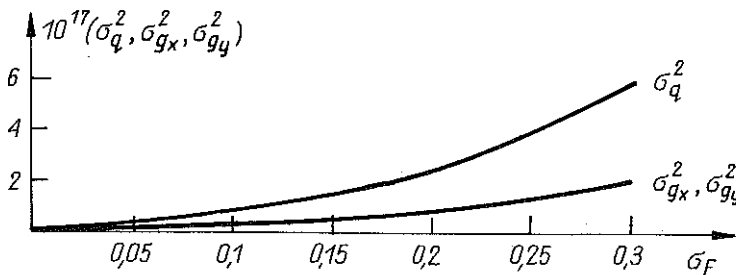
$$p_z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5z^2}, \quad z = \frac{x - \overset{\circ}{h}}{\delta_h}$$



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

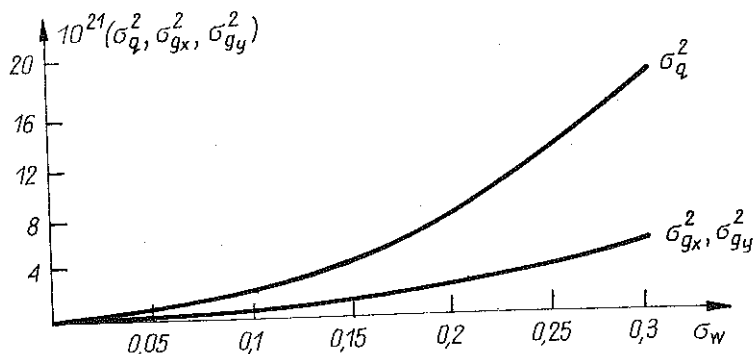
Tablica 1. Wpływ losowego charakteru grubości płyty

Charakterystyka	Wartości odpowiadające				
	λ_1^*	λ_2	λ_3	λ_4^*	λ_5
λ	0,2044	0,3546	1,521	3,096	4,481
σ_λ^2	$0,63 \cdot 10^{-5}$	$1,93 \cdot 10^{-5}$	$13,2 \cdot 10^{-5}$	$43,1 \cdot 10^{-5}$	$11,4 \cdot 10^{-5}$

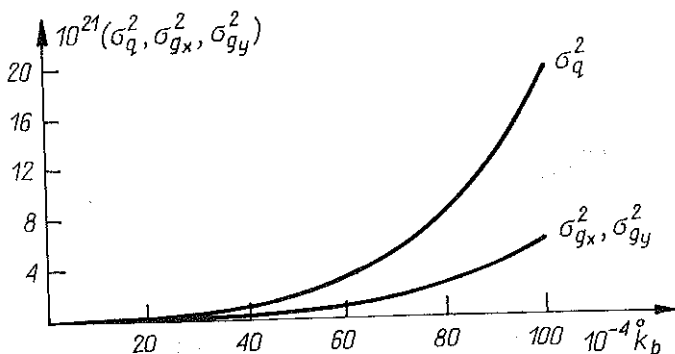
* oznacza pierwiastek podwójny

Dla przypadku gdy h jest zmienną losową - wartości oczekiwane i wariancje początkowych wartości własnych przytoczono w tablicy 1.

Rozważano też wpływ losowego charakteru sztywności wibroizolacji bryły. Bryłę w postaci prostopadłościanu o wymiarach $2 \cdot 2 \cdot 1$ m i masie $m_b = 0,1 \cdot 10^5$ kg zlokalizowano centrycznie. Przyjęto: grubość płyty 0,4 m, charakterystyki sztywności wibroizolacji $k_b^0 = 0,5 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-1}$, $\sigma_k = 1 \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-1}$, założono normalność rozkładu. Przy założeniu, że k_b jest zmienną losową, otrzymano wartości oczekiwane i wariancje początkowych wartości własnych - przedstawione w tablicy 2.

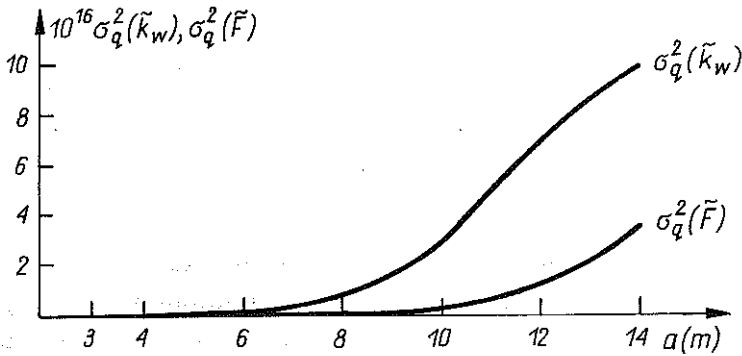


Rys. 5



Rys. 6

Rozwiązanie zagadnienia drgań wymuszonych zilustrowano na przykładzie kwadratowej, swobodnie podpartej płyty spoczywającej na sprężystym podłożu typu Winklera i dźwigającej centrycznie zlokalizowaną bryłę o kształcie sześcianu, opartą w narożach za pośrednictwem wibroizolacji. Charakterystyka płyty: $a = 5\text{m}$, $h = 0,8\text{m}$, $\rho = 2,4 \cdot 10^3 \text{kgm}^{-3}$, $E = 0,3 \cdot 10^{11} \text{Nm}^{-2}$, $\nu = 0,167$, $\kappa = 0,822$, $p = 20\text{s}^{-1}$, $k_w = 12\text{MPa}$. Długość boku bryły $1,0\text{m}$, sztywność wibroizolacji $k_{ib} = 0,25 \cdot 10^7 \text{Nm}^{-1}$. Przyjęto że sztywność podłoża i sztywność wibroizolacji są niezależnymi zmiennymi losowymi. Założono, że obciążenie mające postać (4.8) i $F = 5\text{N}$ stanowi pionowa siła skupiona umiejscowiona bisymetrycznie na bryle. Dla płyty przyjęto aproksymację (2.10) oraz jednoelementowe wektory $\mathbf{s}(\theta)$, $\mathbf{c}(\theta)$. Ruch



Rys. 7

Tablica 2. Wpływ losowego charakteru sztywności wibroizolacji bryły

Charakterystyka	Wartości odpowiadające				
	λ_1^*	λ_2^*	λ_3	λ_4	λ_5
λ	0,8380	1,422	1,430	1,629	2,418
σ_λ^2	$0,11 \cdot 10^{-3}$	$16,8 \cdot 10^{-3}$	$7,00 \cdot 10^{-3}$	0	$12,0 \cdot 10^{-3}$

* oznacza pierwiastek podwójny

bryły zapisano niezależną pionową współrzędną uogólnioną. W tej sytuacji wektor wartości oczekiwanych amplitud przemieszczeń uogólnionych przy założeniu $\mathbf{C} \equiv 0$ ma postać

$$\mathbf{r} = [0,5225 \cdot 10^{-8}, -0,2856 \cdot 10^{-8}, -0,2856 \cdot 10^{-8}, 0,2618 \cdot 10^{-5}]^T.$$

Przebiegi zmienności wariancji przemieszczeń uogólnionych q, g_x, g_y przedstawiono na rysunkach 4 i 5. Wprowadzono oznaczenia: σ_F - odchylenie standardowe amplitudy siły wymuszającej, σ_w - odchylenie standardowe sztywności podłoża. Rysunek 6 ilustruje wpływ k_b na wariancje przemieszczeń uogólnionych układu, przy założeniu $\sigma_w = \sigma_b = \sigma_F = 0,1$ (σ_b oznacza odchylenie standardowe sztywności wibroizolacji), a rysunek 7 wpływ wymiarów boku płyty na wariancję przemieszczenia uogólnionego q w przypadku losowej fluktuacji obciążenia i sztywności podłoża - scharakteryzowanych odchyleniami standardowymi $\sigma_F = \sigma_w = 0,1$.

Dla tej samej płyty rozważono przypadek, gdy funkcja korelacyjna obciążenia ma postać "białego szumu", czyli $\mathbf{C}_{ff}(\tau_1, \tau_2) = \sigma_{ff}^2 \cdot \delta(\tau_1 - \tau_2)$.

Przyjmując liczbę tłumienia $\alpha = 0,05$ otrzymano macierz korelacyjną odpowiedzi. Wariancja pierwszej współrzędnej głównej wynosi $\sigma_{y_1/2}^2 = \sigma_{ff}^2 \cdot 8,512 \cdot 10^{-18}$.

6. PODSUMOWANIE

Przedstawione rozwiązanie, oparte na metodzie linearyzacji stochastycznej, z uwagi na przejrzystość sformułowania jest dogodne ze względów aplikacyjnych. Może być ono stosowane w przypadkach, gdy losowe fluktuacje parametrów układu są małe w porównaniu z ich wartościami oczekiwanymi, co w większości praktycznych przypadków ma miejsce. Parametry te mogą być zmiennymi losowymi lub procesami stochastycznymi.

Rozwiązanie oparte na metodzie kolejnych realizacji odznacza się dużą prostotą, ale jego aplikacja ze względu na realizację numeryczną ogranicza się do przypadków, gdy liczba zmiennych losowych jest niewielka.

Przytoczone wyniki analizy numerycznej drgań wymuszonych wskazują na możliwość znaczącego wpływu losowych odchyłek analizowanych parametrów, zwłaszcza na przemieszczenie q opisujące stan giętny płyty (rysunki 4-7). W przypadku analizy zagadnienia własnego, wielkości wariancji wartości własnych λ_i kształtują się bardzo różnie i w niektórych przypadkach są znaczne (tablice 1 i 2 oraz rysunki 2 i 3).

Omawiane metody, dzięki uwzględnieniu obok losowego charakteru obciążenia także losowych cech układu, pozwalają na bardziej obiektywną analizę pracy konstrukcji. Prowadzi to jednak do bardziej skomplikowanych rozwiązań teoretycznych w porównaniu z rozwiązaniami, w których uwzględnia się tylko losowość obciążenia.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. LIPIŃSKI, *Fundamenty pod maszyny*, Arkady, Warszawa, 1985.
2. A. MAJOR, *Dynamics in civil engineering*, vol. III, Akademiai Kiadó, Budapest 1980.
3. Z. KĄCZKOWSKI, *The influence of the shear forces and rotatory inertia on the vibration of an anisotropic plate*, Arch. Mech. Stos., 12, 4, 531-550, 1960.

4. A. W. LEISSA, *Free vibration of elastic plates*, Am. Inst. of Aero a Astr. Seventh Aerospace Sci. Meet., paper No 69-24, New York 1969.
5. R. D. MINDLIN, *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates*, J. Appl. Mech., **18**, 73, 31-38, 1957.
6. D. I. DAVE, O. L. ROUFAEIL, *Rayleigh - Ritz vibration analysis of Mindlin plates*, J. Sound a Vibr., **69**, 3, 345-359, 1980.
7. W. SZCZEŚNIAK, *Drgania swobodne plyty o średniej grubości*, Arch. Inż. Łąd., **22**, 1, 107-127, 1976.
8. G. VENKATESWARA RAO, J. VENKATARAMANA, B. PRAKASA RAO, *Vibrations of thick plates using high precision triangular element*, Nucl. Eng. a Des., **31**, 102-105, 1974.
9. T. A. ROCK, E. HINTON, *A finite element method for the free vibration of a plates allowing for transverse shear deformation*, Comp. a Struct., **6**, 37-44, 1976.
10. Y. K. CHEUNG, S. CHAKRABARTI, *Free vibration of thick layered rectangular plates by a finite layer method*, J. Sound a Vibr., **21**, 3, 277-284, 1972.
11. A. KOCIOLEK, *Sandwich plates on elastic foundation*, Arch. Inż. Łąd., **16**, 3, 449-462, 1970.
12. YU-CHUNG LEE, H. REISSMANN, *Dynamics of rectangular plates*, Int. J. Engng. Sci., **7**, 93-113, 1968.
13. C. A. CORNELL, *A first order reliability theory of structural design*, Struct. Reliab. a Codif. Des. SM, Study No 3, University of Waterloo, 1970.
14. W. MIRONOWICZ, P. ŚNIADY, *Dynamics of machine foundations with random parameters*, J. Sound a Vibr., **112**, 1, 23-30, 1987.
15. E. BIELEWICZ, L. DZIEMIDOWICZ - TKACZ, M. SKOWRONEK, *Procesy losowe w liniowych układach sprężystych*, Rozpr. Inż., **23**, 3, 515-526, 1975.
16. W. MIRONOWICZ, *Przestrzenne drgania własne płytowo-słupowych konstrukcji wsporczych pod maszyny*, Arch. Inż. Łąd., **33**, 3, 307-317, 1987.

Резюме

ДИНАМИКА ТОЛСТОЙ ПЛИТЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ КАК НЕСУЩЕЙ КОНСТРУКЦИИ ПОД МАШИНЫ

Представлено решение задачи собственных и вынужденных колебаний системы, состоящей из прямоугольной плиты типа Миндлина упруго опертой в области и по контуру, а также жестких тел упруго опертых на плите. Такая система может быть моделью несущей конструкции под машины. Принимая, что некоторые параметры

системы и нагружения являюца случайными. При предположении, что величины случайных флуктуаций малы по сравнению с ожидаемыми значениями соответствующих характеристик, применен метод стохастической линеаризации. Представлено также решение методом последовательных реализаций. Получены результаты в области корреляционной теории. Решение иллюстрировано примерами анализа собственных и вынужденных колебаний прямоугольной плиты, удовлетворяющей условиям свободного опирания и нагруженной жестким телом, а также собственных колебаний плиты со свободными границами - опертой на столбах и нагруженной жестким телом. При этом анализируются влияние случайного характера избранных характеристик системы и нагружения на решение.

SUMMARY

DYNAMICS OF A THICK PLATE OF RANDOM PARAMETERS REPRESENTING A MACHINE SUPPORTING STRUCTURE

The problem of free and forced vibrations is discussed for the case of a Mindlin-type rectangular plate based upon elastic foundation and a system of rigid bodies on elastic supports resting on the plate. Such a system may simulate a machine mounted on an elastic structure. Some of the parameters characterizing the system are of a random type. Assuming the random fluctuations to be small as compared with the expected values of the corresponding characteristics, the method of stochastic linearization is applied. Consecutive realizations method was also applied. The solutions are illustrated by examples of the problems of free and forced vibrations of a simply supported rectangular plate loaded by a rigid solid body, and of a plate with free edges supported on columns and loaded by a rigid body. Effects of random characters of the system and loading were analyzed.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA
INSTYTUT INŻYNIERII ŁADOWEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 listopada 1988 r.